

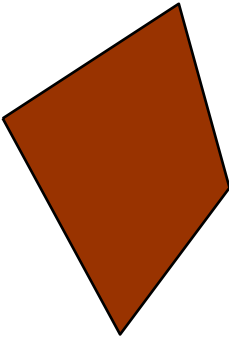
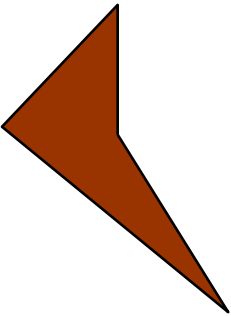
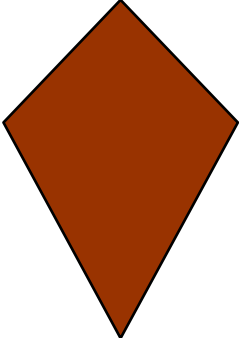
fem volar estels!



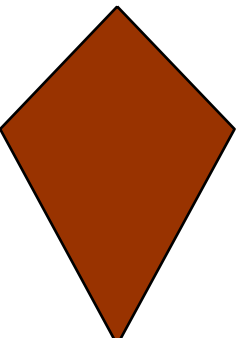
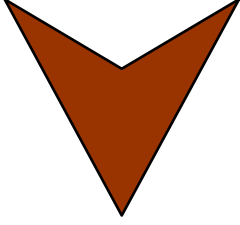
Estels i matemàtiques

ELS ESTELS, UNS QUADRILÀTERS ESPECIALS

La classificació dels quadrilàters acostuma a ser complexa perquè, en la seva forma més usual, barreja criteris de paral·lelisme i comparació de longitud de costats. Això provoca situacions que ens poden fer veure el quadrat com un rombe o un rectangle especial, el rombe o el rectangle com a romboides especials, etc. De vegades diferenciem també casos particulars de trapezis (l'isòsceles, el rectangle...). Però sovint, als que no presenten cap paral·lelisme de costats els qualifiquem com a *trapezoides* i ens quedem aquí. Com a molt els dividim en còncav i convexos. Però també tenim uns trapezoides especials: els *deltoïdes*

Trapezoides		
		
Trapezoide general convex	Trapezoide general còncav	Deltoïde

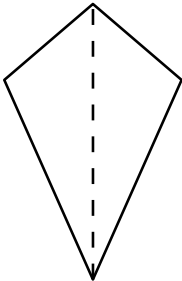
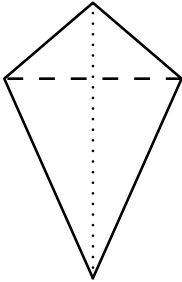
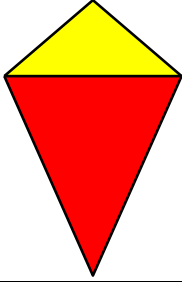
Entre els deltoïdes podem diferenciar entre *estels* (convexos) i *fletxes* (còncavos)

Deltoïdes	
	
Estel	Fletxa

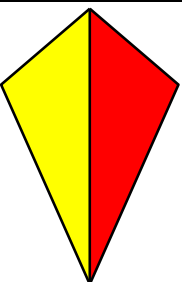
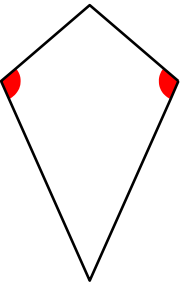
Els deltoïdes tenen sempre els costats iguals dos a dos, però, a diferència de rectangles i romboides, els costats iguals concorren en un mateix vèrtex.

PROPIETATS DELS ESTELS

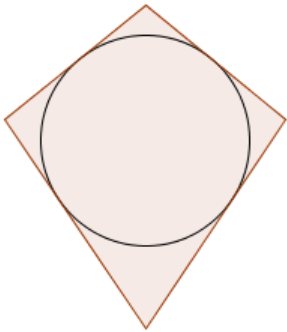
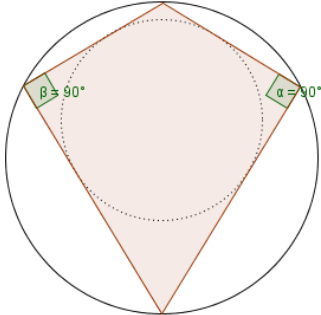
A continuació enumerem algunes de les propietats dels estels

Sempre tenen, com a mínim, un eix de simetria	
Les dues diagonals són perpendiculars	
Una de les diagonals divideix l'estel en dos triangles isòsceles	

D'aquestes se'n poden derivar algunes més:

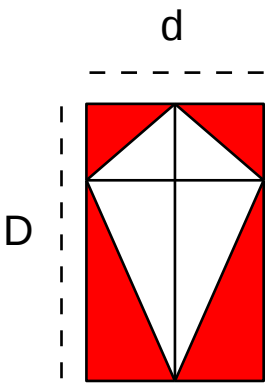
Una diagonal divideix l'estel en dos triangles congruents (idèntics)	
Sempre hi ha un mínim de dos angles oposats iguals.	

Els estels tenen altres propietats no tan evidents.

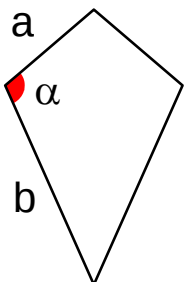
Sempre tenen circumferència inscrita	
Si els angles iguals són rectes també tenen circumferència circumscriu.	

L'ÀREA DELS ESTELS

Hi ha una fórmula relativament fàcil de descobrir a partir de les mesures de les diagonals. Al dibuix es pot veure que l'àrea de l'estel és la meitat de la del rectangle que té per costats les dues diagonals.

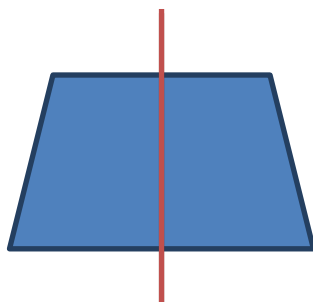
	$A = \frac{D \cdot d}{2}$
---	---------------------------

Per a trobar l'altra, que ens dona l'àrea a partir de les mesures dels costats desiguals i de l'angle que formen, cal fer ús dels càlculs trigonomètrics.

	$A = a \cdot b \cdot \sin \alpha$
---	-----------------------------------

PER QUÈ AQUESTA FORMA AJUDA A “VOLAR”

L'estel polígon pren el seu nom de l'estel volador més típic. Un estel bàsic vola aprofitant diferents forces de forma equilibrada, principalment les generades la dinàmica de fluids i la gravitatòria. En tot cas interessa que l'estel tingui una certa simetria en una direcció (per ajudar a l'estabilitat) i una certa asimetria en l'altra per provocar el desplaçament del centre de gravetat i fer que s'inclini. Aquesta inclinació s'accentua, normalment, amb el pes afegit de la cua. El fet de que els estels tinguin un sol eix de simetria (excepte en els casos particulars del quadrat i el rombe) fa acomplir les dues condicions. Una altra figura possible seria el trapezi isòsceles.



(plantilla: <http://goo.gl/ScWlyf>)

Existeix una dualitat interessant entre trapezis isòsceles i estels: les propietats que un té amb els angles l'altre la té amb els costats.

Estel	Trapezi isòsceles
Dos parells de costats adjacents iguals	Dos parells d'angles adjacents iguals
Un parell d'angles oposats iguals	Un parell de costats oposats iguals
Un eix de simetria a través d'un parell d'angles oposats	Un eix de simetria a través d'un parell de costats oposats
Cercle inscrit	Cercle circumscrit



ACTIVITATS PER A EDUCACIÓ INFANTIL I CICLE INICIAL DE PRIMÀRIA

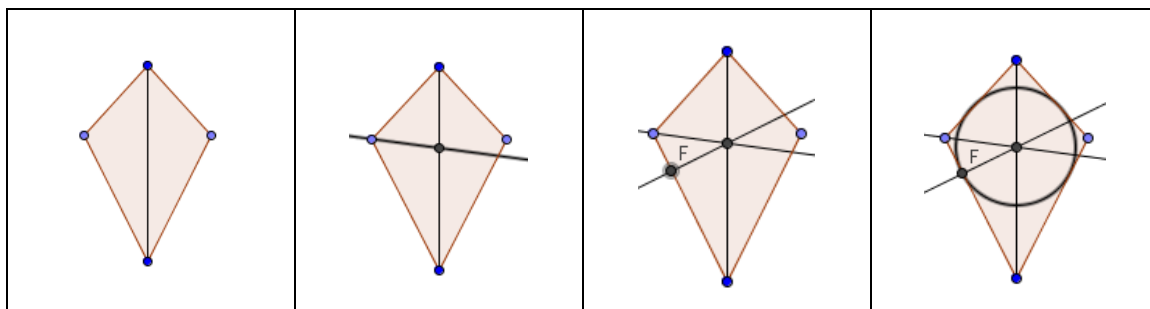
- Repartir dos parells de tires de cartolina de diferent llargada i investigar els quadrilàters que es poden fer. Probablement obtindrem rectangles, estels o fletxes. Amb els més petits segurament haurem d'insistir en algunes característiques especials: que les cartolines es toquin pels vèrtexs, que facin figures tancades, que no es creuen les tires... Si no surten tots els models podem fer les preguntes oportunes perquè surtin. Posteriorment podem fer que ens expliquin, amb les seves paraules, les característiques de cadascun, les diferències, si "l'han vist" en algun lloc...
- Repartir un full amb diferents quadrilàters i un mirall. Investigar simetries amb el mirall: de quantes maneres el podem posar per reconstruir la figura completa, on l'hem de posar, classificar el que no tenen cap simetria, els que tenen una, els que tenen dos...

ACTIVITATS PER A CICLE MITJÀ I SUPERIOR DE PRIMÀRIA

- Fer descobrir i descriure les característiques del polígons estel en quant a simetries, costats, angles...
- Al Cicle Superior es pot intentar buscar com trobar l'àrea (a partir de la descomposició en dos triangles, de la duplicació en un rectangle...) i comparar els mètodes.
- Construir un estel tradicional o un de trapezoïdal a partir d'una plantilla fent observar els aspectes relatius a la simetria i asimetria comentat anteriorment.

ACTIVITATS PER A ESO

- Fer descobrir i descriure les característiques del polígons estel en quant a simetries, costats, angles...
- Buscar com trobar l'àrea (a partir de la descomposició en dos triangles, de la duplicació en un rectangle...) i comparar els mètodes.
- A 4t d'ESO intentar trobar la fórmula trigonomètrica de l'àrea.
- Construir amb GeoGebra la circumferència inscrita descrivint el mètode o fent-lo buscar i justificar (mètode: traçar la diagonal gran, fer la bisectriu d'un dels angles de l'altre diagonal per obtenir el centre de la circumferència, dibuixar la perpendicular d'aquets centre a un costat per obtenir el punt de tangència i obtenir el radi)



- Investigar amb GeoGebra quines són les condicions perquè hi hagi també una circumferència circumscrita.
- Estudiar la dualitat entre trapezis isòsceles i els estels.

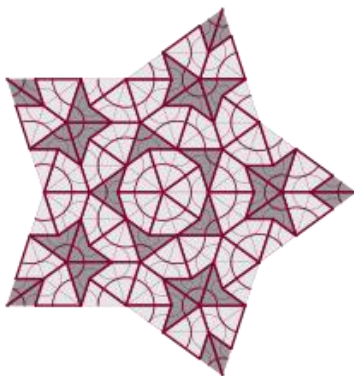
ACTIVITATS PER A BATXILLERAT

- Trobar la fórmula trigonomètrica de l'àrea a partir dels costats desiguals i l'angle que formen. També és pot cercar una fórmula que, a partir de les mateixes dades localitzi el centre de gravetat de l'estel sobre la diagonal gran.
- Estudiar les construccions de les circumferències inscrites i circumscrites.
- Investigar sobre fractals i estels fractals

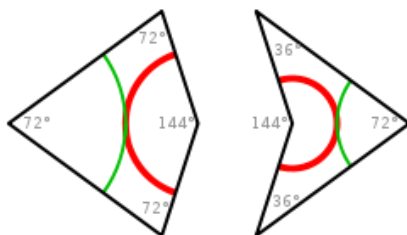
AMPLIACIONS

- **Mosaics de Penrose**

Els mosaics de Penrose es construeixen a partir de dues peces bàsiques que tenen forma d'estel: una còncava i l'altra convexa. El mosaic que s'obté és aperiòdic, és a dir, no hi ha cap fragment de mosaic al que li puguem aplicar una translació i es superposi exactament a un altre fragment.



Mosaic de Penrose



Peces del mosaic

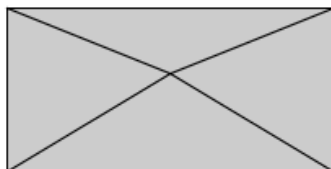
Webs relacionats:

- Informació Viquipèdia: <http://goo.gl/jCGiDZ>
- Idees per fer-los amb material manipulable: <http://goo.gl/GVqjdk>
- Applet 1: <http://goo.gl/ElwqZg>
- Applet 2: <http://goo.gl/VFsrNx>
- Mòdul del MMACA (Museu de Matemàtiques de Catalunya) amb mosaics de Penrose: <http://goo.gl/HTg76O>

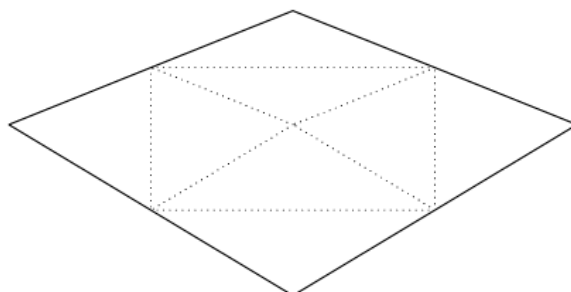


- **Polígons que “fan sobre”**

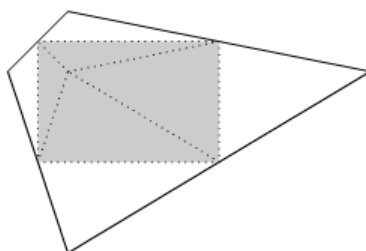
Un sobre clàssic pot tenir, més o menys, una forma com aquesta:



En realitat hem obtingut aquest “sobre” rectangular a partir del plegat d'un quadrilàter més gran. En el nostre cas d'un *estel*.

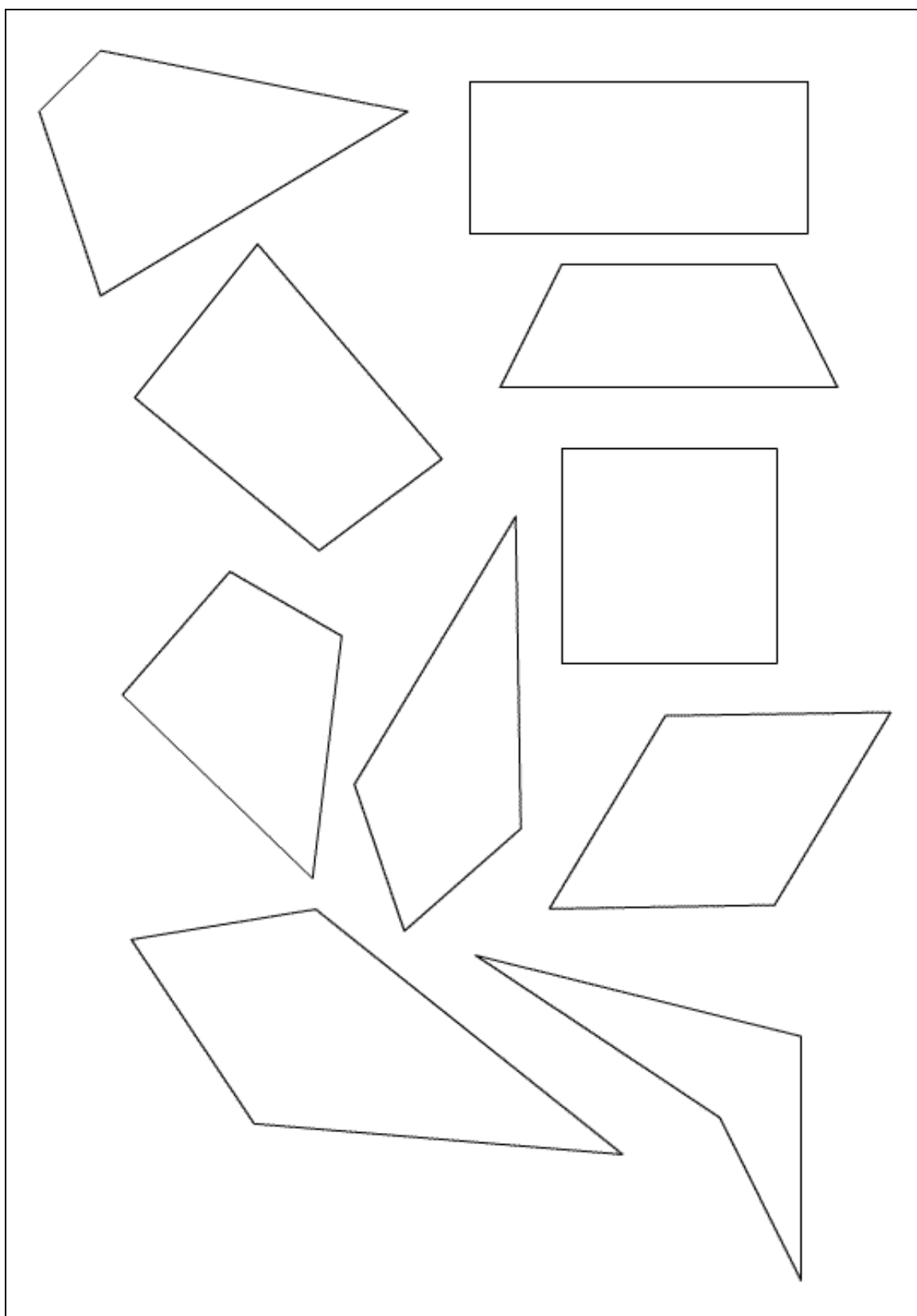


No tots els polígons els podem plegar d'aquesta manera per formar una “sobre” rectangular. Per exemple, amb un rectangle no és possible. Amb quadrats, rombes o estels sempre ho és, però hi ha altres quadrilàters que també ho permeten. El següent trapezoide es pot transformar en “sobre”.



Podem proposar una investigació a l'aula, molt indicada per l'ESO, sobre quines condicions ha de tenir un quadrilàter per poder-se plegar en forma rectangular de “sobre” (reunint els quatre vèrtexs en un punt amb quatre plects de forma que s'obtingui un rectangle). És força pràctic sortir d'alguns exemples dibuixats, amb quadrilàters que ho permetin i d'altres que no.

Descobrirem que la condició perquè un quadrilàter “tanqui en sobre” és queles dues diagonals siguin perpendiculars. Si són convexos amb quatre plects en tondrem prou. Si són còncaus caldrà fer més plects, cap endavant i cap endarrere. És un cas interessant de provar.



Estels fractals

Actualment es fan estels amb moltes formes diferents i no només planes. Unes de les més espectaculars visualment són els estels amb formes fractals, com aquest que reproduïx la *piràmide de Sierpinski*.



<http://posaunestelalcel.blogspot.com.es/search/label/FRACTALS>

Webs relacionats:

- Instruccions per fer un estel de Sierpinski: <http://goo.gl/9qfl6W>
- Altres estels fractals i polièdrics: <http://goo.gl/OnKZn>
- Principis físics del vol dels estels – Quines proporcions han de tenir les diagonals?
 - <http://goo.gl/hMEoK4>