

TOR 4t d'ESO: Sentit espacial

Consideracions generals.....	1
Blocs de sabers.....	1
Formes geomètriques de dues i tres dimensions.....	1
Sabers.....	1
Descripció i orientacions.....	2
Reflexions inicials.....	2
Comentaris sobre les connexions.....	2
Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació.....	2
Recursos i activitats.....	2
Recursos i activitats per treballar sabers concrets.....	2
Localització i sistemes de representació.....	5
Sabers.....	5
Descripció i orientacions.....	6
Reflexions inicials.....	6
Comentaris sobre les connexions.....	6
Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació.....	6
Recursos i activitats.....	7
Recursos i activitats generals per al bloc de sabers.....	7
Recursos i activitats per treballar sabers concrets.....	7
Moviments i transformacions.....	12
Sabers.....	12
Descripció i orientacions.....	12
Reflexions inicials.....	12
Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació.....	12
Recursos i activitats.....	12
Recursos i activitats per treballar sabers concrets.....	12
Visualització i modelització geomètrica.....	14
Sabers.....	14
Descripció i orientacions.....	15
Reflexions inicials.....	15
Comentaris sobre les connexions.....	15
Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació.....	15
Recursos i activitats.....	15
Recursos i activitats per treballar sabers concrets.....	15
Blocs de competències: processos matemàtics i gestió socioemocional.....	20
Resolució de problemes (CE 1 i CE 2).....	20
Sabers.....	21
Recursos.....	21
Raonament i prova (CE 3 i CE 4).....	21



Sabers.....	21
Recursos.....	21
Connexions amb altres parts de la matemàtica (CE 5).....	22
Sabers.....	22
Recursos.....	22
Connexions amb altres matèries i amb l'entorn (CE 6).....	23
Sabers.....	23
Recursos.....	23
Comunicació i representació (CE 7).....	23
Sabers.....	23
Recursos.....	24
Gestió socioemocional (CE 8 i CE 9).....	24
Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 8.....	24
Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 9.....	25

Consideracions generals

La geometria ens ajuda a interpretar el món que ens envolta. El seu estudi i el desenvolupament del sentit espacial són un objectiu en si mateix, però alhora ajuden a comprendre i a desenvolupar la resta de sentits i a consolidar els coneixements propis d'altres branques de les matemàtiques. A més, la geometria pot condicionar o ajudar a la recerca de la solució de problemes propis d'altres disciplines. Per tots aquests motius, cal parar especial atenció a l'estudi de la geometria, i la geometrització de l'educació matemàtica hauria de ser habitual a les aules de secundària.

A grans trets, el desenvolupament del sentit espacial al llarg de l'educació secundària comença donant un pes molt important a l'estudi de figures geomètriques de dues i tres dimensions, formalitzant i aprofundint en un treball ja iniciat a l'educació primària, i acaba de forma més abstracta treballant els sistemes de representació i la geometria analítica, tot passant per l'estudi dels moviments i les transformacions geomètriques elementals. Al llarg de tot el període, a més, cal parar especial atenció a la visualització i modelització geomètrica, no només durant l'estudi de la geometria, sinó especialment durant el treball en les altres branques de les matemàtiques. Aquesta geometrització dels altres sentits servirà, d'una banda, per consolidar l'aprenentatge dels continguts que s'estiguin treballant en aquell moment i, de l'altra, per aconseguir una base geomètrica més sòlida.

Al llarg de tot el treball fet entorn del sentit espacial s'ha volgut donar continuïtat a les línies de treball que promou el document «[Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria](#)» (Aubanell, 2015).

Un espai que pot servir de suport en l'aprenentatge de les matemàtiques en general i del sentit espacial en particular és el Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA), ja que, en totes les exposicions que organitza pel territori, inclou mòduls que ajuden a l'assoliment dels sabers tractats al llarg de l'etapa.

A l'últim curs de l'educació secundària obligatòria, el gruix del treball en el sentit espacial és entorn de la geometria analítica. L'estudi i el treball amb vectors i rectes es reparteixen els sabers del bloc Localització i sistemes de representació. A banda d'aquest bloc, també s'ha previst el treball de les homotècies dins el bloc Moviments i transformacions i, sense pretendre ser un saber nou per treballar, també caldrà aplicar les propietats de figures planes i tridimensionals, que és un saber del bloc Figures geomètriques de dues i tres dimensions.

A més dels sabers proposats en els tres blocs ja esmentats, i tal com passa a la resta de cursos amb el sentit espacial, el segon gran gruix de sabers el trobem dins el bloc Visualització i modelització geomètrica, que promou una visió geometritzada de la resta de sentits matemàtics i àrees del coneixement. Dins aquest bloc, tal com passava a tercer, la majoria dels sabers tornen a estar estretament vinculats al sentit algebraic, que és el sentit més representat a 4t d'ESO.

Blocs de sabers

Formes geomètriques de dues i tres dimensions

Sabers

- A. Aplicació de les propietats geomètriques de figures planes i de tres dimensions en la resolució de problemes. Ús de la geometria dinàmica per a la recerca de la solució, si s'escau.

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

El bloc de formes geomètriques de dues i tres dimensions es treballa intensament a 1r i 2n d'ESO. A 4t d'ESO s'ha considerat posar un únic saber que, més que un saber generador de coneixement, pretén recollir els continguts ja treballats per aplicar-los en diferents situacions. Així doncs, per treballar aquest saber el que serà important és trobar les situacions adequades que requereixin l'ús de propietats ja conegudes, com podrien ser, per exemple, el teorema de Tales o el de Pitàgores.

Comentaris sobre les connexions

El saber d'aquest bloc no ha estat connectat a cap altre bloc de continguts del currículum perquè no hi ha una connexió real amb un saber concret, sinó que seran les activitats que es proposin per treballar alguns sabers determinats, per exemple, del bloc de relacions i funcions del sentit algebraic, les que permetran generar aquesta connexió.

Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

No s'ha marcat el saber d'aquest bloc com a essencial perquè s'ha considerat que, en el marc de 4t d'ESO, no és prou rellevant, malgrat que es consideri que les propietats geomètriques sí que són bàsiques per resoldre les diferents situacions que es puguin proposar.

Recursos i activitats

Recursos i activitats per treballar sabers concrets

saber #4.ESP.FG.A

Per treballar el **saber #4.ESP.FG.A** hi ha el projecte «[Crea el teu envàs](#)» de Maite Gorriz i Santi Vilches. El projecte té com a objectiu crear un envàs. El treball comença amb l'exploració de l'experiència prèvia, que consisteix a definir amb les paraules pròpies de l'alumnat què és un cub, i fer la construcció amb vocabulari adient utilitzat de forma rigorosa.



Font: «[Crea el teu envàs](#)», de Maite Gorriz i Santi Vilches.

El que es pretén és modelitzar el càlcul de volums a partir de la comparació amb un patró que es correspon a una unitat de mesura concreta: la unitat cúbica. S'estudien diferents tipus de cossos geomètrics a partir d'envasos que porta l'alumnat per acabar dissenyant un nou envàs.

Tot i que la proposta inicial dels autors està formulada per a 2n d'ESO, com que un dels punts més forts d'aquest projecte és que és un problema obert i permet que l'alumnat sigui creatiu amb les seves propostes, es pot adaptar a diferents cursos i nivells. En funció de la seva proposta es pot estirar més o no,

adaptant-nos a les capacitats i utilitzant tanta matemàtica com sigui necessària.

Saber #4.ESP.FG.A

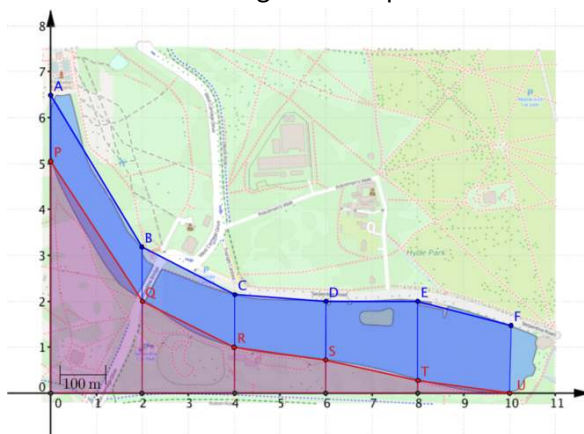
També per treballar el **saber #4.ESP.FG.A**, hi ha el recurs «[Serpentine Lake](#)» del web Underground Mathematics que, a més de la resolució de problemes a través de l'aplicació de les propietats de figures 2D i l'ús de programes de geometria dinàmica, comporta un treball de mesura important. A la proposta, es presenta a l'alumnat una imatge d'un llac de Londres:



Font: «[Serpentine Lake](#)», del web Underground Mathematics.

Tot seguit, se'ls explica que el llac té 40 hectàrees. Com ho poden comprovar?

En primer lloc, caldrà establir els límits del llac i després trobar estratègies de resolució. Es pot aproximar la forma del llac per trapezis, i acabar introduint la regla dels trapezis:



Font: «[Serpentine Lake](#)», del web Underground Mathematics.

Algunes qüestions interessants que poden plantejar-se mentre l'alumnat està treballant són, per exemple:

- Importa si els trapezis tenen diferents amplades?
- Què passa si tots els trapezis tenen la mateixa amplada?
- Com afectarà el nombre de trapezis a l'aproximació?

Saber #4.ESP.FG.A

Al llarg de 4t d'ESO, en molts contextos apareixerà la necessitat d'utilitzar eines apreses durant els cursos anteriors relacionades amb les formes geomètriques. Un d'aquests contextos pot ser el treball amb els nombres irracionals, lligat al **saber #4.NUM.QU.B**. Els nombres irracionals apareixen de manera natural quan treballem amb figures geomètriques cercant longituds, superfícies o volums desconeguts. Això ens proporciona un context perfecte per treballar les formes geomètriques, ara ja utilitzant els nombres exactes

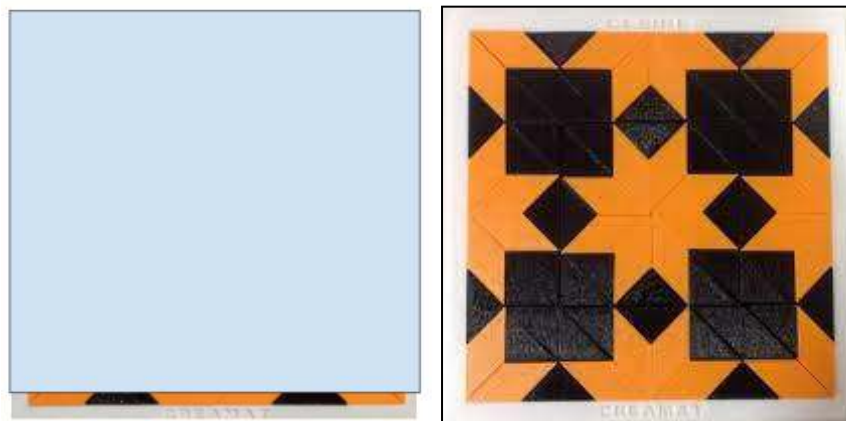
i no les seves aproximacions decimals.

A l'entrada del PuntMat «[Nombres irracionals i materials manipulatius](#)» es poden veure moltes propostes per treballar els nombres irracionals a partir de les figures geomètriques que trobem en el tangram clàssic, els *pattern blocks* o treballant amb geoplans.

Una altra activitat interessant per treballar-ho, que podríem titular «Quadrat de Puig Adam», és la que expliquen Alsina, Aubanell i Burgués en la seva obra *Tres professors de matemàtiques* (2019, pàg. 100), extreta del llibre *Didáctica matemática heurística* (Puig Adam, 1956) i que forma part del capítol que es titula «Iniciación al cálculo con irracionales cuadráticos».

Es tracta de repartir un grapat de peces de dos tipus: triangles rectangles isòsceles el catet dels quals mesura una unitat i rombes que tenen de costat la unitat i un angle agut de 45° . Després de familiaritzar-se amb les peces, es pregunta pels valors dels perímetres, els seus angles interiors i les seves àrees. Es pot veure que la del triangle val $\frac{1}{2}$ i la del rombe, $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Es pot demanar també construir petits mosaics amb les figures. Arribats en aquest punt, es pot entrar de ple en el treball de raonament a partir de preguntes com: «Seria possible construir una figura formada tan sols per triangles que tingués la mateixa àrea que una figura formada tan sols per rombes?». La intenció de la pregunta és clara: fer adonar l'alumnat d'aquesta impossibilitat a partir dels càlculs fets anteriorment, donat que $\sqrt{2}$ és incommensurable. Si anem més enllà, podem deduir que l'àrea de tota figura composta per aquests triangles i rombes tindrà una part racional procedent dels triangles i una part irracional procedent dels rombes. Això permet resoldre el problema-repte següent:

Sabent que el mosaic que hi ha a sota és quadrat i conté només els dos tipus de peces anteriors, i veient només aquesta petita part del mosaic, podríem deduir quants triangles i quants rombes el componen?



Font: CREAMAT.

Sembla que no disposem de prou informació, però en realitat és possible respondre la pregunta. La resolució passa per la diferenciació de la part d'àrea racional i la part d'àrea irracional del mosaic. Tenint en compte la mida del costat, podem saber l'àrea del mosaic quadrat i, a partir d'aquí, diferenciar les parts racional i irracional, amb la qual cosa sabrem el nombre de peces de cada tipus fent un parell de divisions.

Les peces es poden imprimir en paper i plastificar o bé podem descarregar el [disseny per a impressió 3D](#) creat pel CREAMAT.

Saber #4.ESP.FG.A

I ja per acabar, anomenarem la [prova Cangur](#), que pot ser una font inesgotable de recursos i idees per treballar aquest saber. Podem trobar-hi propostes com les que es mostren a les imatges següents:

1. Quin quadrat està dividit en dues peces que no tenen la mateixa forma?

A)



B)



C)



D)

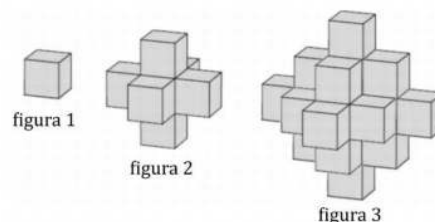


E)



Font: prova Cangur de 4t d'ESO de 2024.

10. En Joan té molts cubs idèntics. Ha construït l'estructura de la figura 2 agafant un cub (figura 1) i enganxant-hi un altre cub a cada cara. Vol construir una estructura més gran (figura 3) enganxant nous cubs a la de la figura 2, de manera que totes les cares visibles d'aquesta quedin amagades. Quin és el nombre mínim de cubs que cal afegir a la construcció de la figura 2 per a obtenir la de la figura 3?



A) 18

B) 16

C) 14

D) 12

E) 10

Font: prova Cangur de 4t d'ESO de 2024.

1. Un paleta vol enrajolar un terra que fa 4×6 m amb peces de ceràmica totes iguals. No les vol sobreposar ni deixar-hi forats. Quina de les següents peces de ceràmica, compostes cada una de rajoles quadrades d' 1×1 m, no podrà usar?

A)



B)



C)



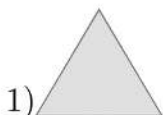
D)



E)



2. Observeu els polígons que hi ha sota. Quins es poden dividir en dos trapezis amb una línia recta?



A) Només el 3

B) Només el 3 i el 4

C) El 2, el 3 i el 4, però l'1 i el 5, no

D) L'1, el 3 i el 4, però el 2 i el 5, no

E) Tots excepte el de la figura 1

Font: prova Cangur de 4t d'ESO de 2023.

Localització i sistemes de representació

Sabers

- Comprensió del concepte i característiques (mòdul, direcció i sentit) dels vectors com a desplaçament entre dos punts. **[ESS]**
- Càlcul de les components d'un vector. Determinació del mòdul d'un vector a partir de les components.
- Ús dels vectors, les seves propietats i les operacions entre ells per resoldre problemes geomètrics senzills. **[ESS]**
- Estudi de les diferents equacions d'una recta. **[AMP]** **#ALG.ID**, **#ALG.RF**

- E. Determinació dels elements determinants d'una recta (punts, vector director, pendent, angle respecte a l'eix d'abscisses, etc.) donada la seva equació. [AMP]
- F. Estudi de la posició relativa de dues rectes i determinació del paral·lelisme, la perpendicularitat i el punt de tall, si s'escau. [AMP] #ALG.ID, #ALG.RF
- G. Selecció de l'equació de la recta més adequada en funció de la situació que cal resoldre. [AMP]

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

El bloc Localització i sistemes de representació entra amb força a l'últim curs d'ESO. A 2n d'ESO, abans de començar l'estudi de funcions, ja s'ha treballat la localització de punts en el pla; la idea de vector també ha aparegut a 3r d'ESO dins el marc de les translacions i l'alumnat també ha treballat amb les rectes i, fins i tot, amb algunes de les seves expressions en el moment de treballar sistemes d'equacions i funcions lineals o afins, però no és fins a 4t d'ESO que s'introdueix la geometria analítica i es treballen els conceptes de vectors i rectes de forma explícita.

Els sabers d'aquest bloc tenen dues característiques que, a priori, poden semblar contradictòries. Per una banda, la importància de les magnituds vectorials o la modelització de situacions mitjançant equacions lineals (de dues incògnites) genera la necessitat de treballar tots els sabers d'aquest bloc de la manera més rigorosa i profunda possible. Per altra banda, el treball entorn d'aquests sabers requereix un nivell d'abstracció important i cal tenir present que, malgrat que sigui l'últim, el 4t d'ESO encara és un curs d'educació obligatòria que, en principi, cursen tots els alumnes. Saber trobar l'equilibri entre aquestes dues realitats serà molt important per prendre les decisions corresponents adaptades a la realitat de cada aula. Visualitzar i manipular tot el que sigui possible pot ajudar a reduir el grau d'abstracció necessària i que un nombre més elevat d'alumnes sigui capaç d'entendre els conceptes que s'hi treballen.

Comentaris sobre les connexions

Els sabers d'aquest bloc que tracten sobre rectes estan estretament vinculats amb el sentit algebraic. Per una banda, amb el bloc Igualtat i desigualtat (#ALG.ID), en què cal entendre per què es parla d'equació de la recta i on es tracta la classificació de sistemes i, per altra banda, amb el bloc relacions i funcions (#ALG.RF), en què hi ha una vinculació molt estreta entre l'estudi de la funció afí i els seus paràmetres i l'equació explícita de la recta.

Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

Aquest bloc està dividit en dues parts molt diferenciades, una de sabers entorn dels vectors i l'altra de sabers entorn de les rectes. S'ha decidit que els sabers essencials fossin de la part de vectors perquè aquests sabers alimenten el treball que es fa en altres assignatures i perquè recull i tanca un treball iniciat a tercer amb la introducció del concepte. Dins els sabers que tracten els vectors, s'ha considerat essencial la comprensió del concepte (saber #4.ESP.LS.A) i l'aplicació en problemes senzills (saber #4.ESP.LS.C), perquè es considera que els càlculs necessaris (saber #4.ESP.LS.B) no quedaran sense treballar. Per altra banda, s'ha trobat oportú considerar d'ampliació els sabers que tracten les rectes amb la idea de, si és necessari, reduir-ne l'aprofundiment o l'abstracció. Malgrat aquesta etiqueta, es vol animar, sempre que sigui possible, a treballar també aquest grup de sabers. Cal tenir en compte que moltes idees relacionades amb les rectes ja s'han treballat des d'altres sentits, fins i tot, en cursos anteriors.

Recursos i activitats

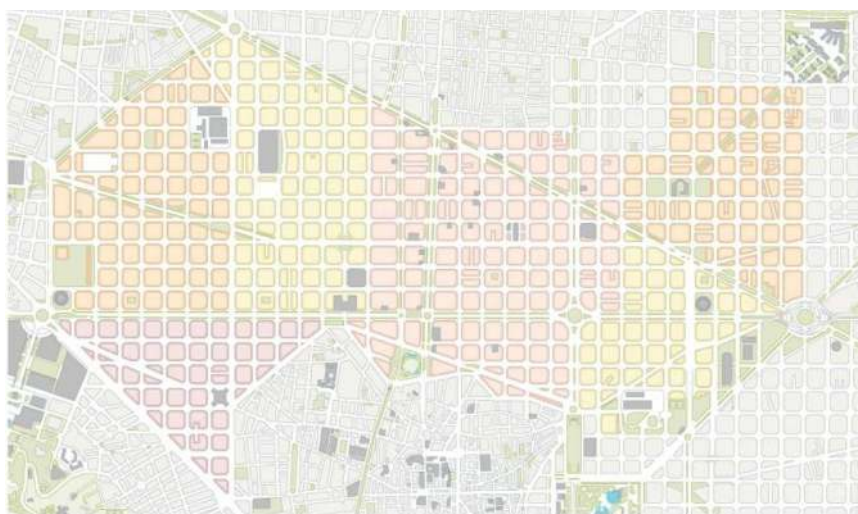
Recursos i activitats generals per al bloc de sabers

Per treballar els sabers de tot el bloc, inclosos els d'ampliació, hi ha el recurs a l'ARC «[Vectors i rectes en el pla](#)», de Victòria Oliu. La seqüència d'activitats consta d'un joc de rol per convertir l'alumnat en punts del pla amb les seves coordenades i representar així rectes «vivents» a partir de l'equació. També s'hi troben activitats de GeoGebra interactives per repassar conceptes bàsics de geometria plana, introduir els nous conceptes i plantejar reflexions. Inclou, així mateix, fulls de treball per copiar els enunciats canviant les dades i fer problemes a classe, intercanviant els enunciats per parelles. I, per acabar, s'hi troben les activitats finals: l'elaboració d'un mapa conceptual de tot el que s'ha treballat i la proposta d'invenió d'un problema per intercanviar.

Recursos i activitats per treballar sabers concrets

Sabers #4.ESP.LS.A, #4.ESP.LS.B i #4.ESP.LS.C

Per treballar els sabers **#4.ESP.LS.A, #4.ESP.LS.B i #4.ESP.LS.C** tot donant un context proper als alumnes, proposem introduir el concepte de vector com a desplaçament a partir del plànol d'una ciutat ortogonal, com per exemple el de l'Eixample de Barcelona. Si s'aprofita una sortida real, l'activitat encara tindrà més sentit per a l'alumnat.



Mapa mut de l'Eixample de Barcelona de Pedro Monzo. Font: [Educaplay](#).

Caldrà definir uns eixos de coordenades en els quals la unitat sigui la distància mitjana entre dos carrers paral·lels consecutius, un origen i destacar-hi alguns punts.

L'activitat consisteix a demanar com anirien d'un punt a un altre (d'entre els diversos marcats al plànol) i quina distància real es recorreria. D'aquesta manera, introduïm els vectors, les seves components i les característiques de direcció i sentit. El mòdul del vector s'entén fàcilment com a distància en línia recta entre dos punts i és fàcil conduir-los a adonar-se que, de fet, calcular aquesta distància equival a calcular la hipotenusa del triangle rectangle que té per catets les components del vector desplaçament.

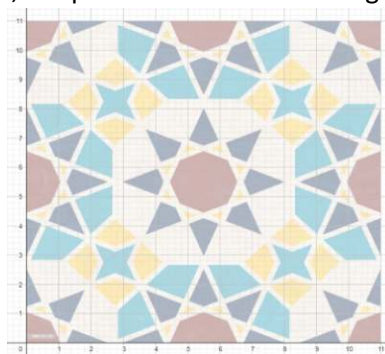
Es pot parlar també de vectors lliures, paral·lels, perpendiculars, etc. En definitiva, pot ser un context sobre el qual anar construint tots els sabers del bloc Localització i representació de 4t d'ESO.

Sabers #4.ESP.LS.A, #4.ESP.LS.B i #4.ESP.LS.C

Una proposta per introduir els vectors i resoldre problemes és «[Situacions vectorials](#)», de Pere Burgués. Es tracta d'un llibre de GeoGebra que és una adaptació i ampliació de la seqüència presentada per Carles Rodríguez en el seu treball de final de màster «Vectors en el pla a 4t d'ESO: millora i redisseny de la UD».

El llibre consta de diverses parts, totes molt interessants:

- «La [constel·lació d'Orió](#)» (**saber #4.ESP.LS.A**). L'objectiu és entendre el significat dels vectors (i les seves components) com a desplaçaments entre dos punts del pla i calcular el mòdul d'un vector.
- «[El Tour de França](#)» (**saber #4.ESP.LS.A**). A través del treball amb vectors, es tracta de calcular quina ha estat la distància i el desplaçament total que han fet els ciclistes en una etapa del Tour, entenent la distància com tots els quilòmetres reals que han recorregut els ciclistes tenint en compte el desnivell i el desplaçament com la distància horitzontal que han fet els ciclistes sense tenir en compte el desnivell.
- «[Producte escalar d'un Vector](#)» (**saber #4.ESP.LS.B**). Es tracta de veure com canvia un vector quan el multipliquem per un escalar.
- «[El laberint](#)» (**saber #4.ESP.LS.C**). A través de la suma de vectors, es tracta de treballar la situació següent. Dues persones s'han trobat enmig d'un laberint i han de trobar la sortida. Han decidit separar-se per trobar la sortida abans, però al cap de poc s'han tornat a trobar en una cruïlla. A partir de les explicacions dels recorreguts que ha fet cadascuna de les persones i encadenant desplaçaments, com la suma de vectors, s'introdueix també la idea de vector oposat i es troba la sortida del laberint.
- «[Un passeig pel parc](#)» (**saber #4.ESP.LS.C**). Per treballar desplaçaments i perpendicularitat.
- «[El mosaic](#)» (**saber #4.ESP.LS.C**). S'inicia l'activitat fent la proposta següent: com a classe, s'ha tingut la idea de dibuixar un mosaic al pati. Després de moltes idees i debats, el disseny que s'ha triat és el de la imatge que hi ha continuació, en què s'intercalen colors i figures geomètriques:



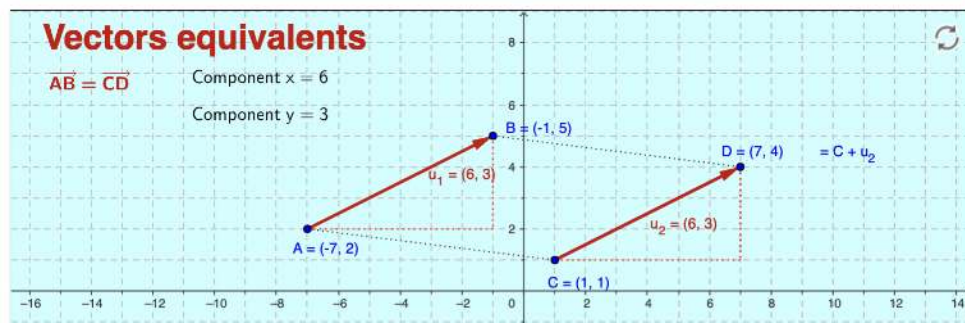
Font: «[El mosaic](#)», de Pere Burgués.

Per poder dibuixar-lo, s'ha dividit el pati en una quadrícula per tenir clar com s'ha de traçar cada línia. El primer repte de l'alumnat és saber com poden determinar el centre exacte del pati per fer la figura central. A través del treball de vectors, distàncies i punts mitjans, l'alumnat resol el repte i arriba a crear el seu propi mosaic.

Saber #4.ESP.LS.B

Per treballar el **saber #4.ESP.LS.B**, es poden trobar moltes construccions amb GeoGebra que poden ser ben útils. Un exemple és «[Vectors en el pla](#)» de Victòria Oliu.

Els vectors els representem com a fletxes amb un punt origen i un punt extrem.
Les components d'un vector es poden obtenir restant Extrem menys Origen.
Vectors amb components iguals direm que són equivalents.

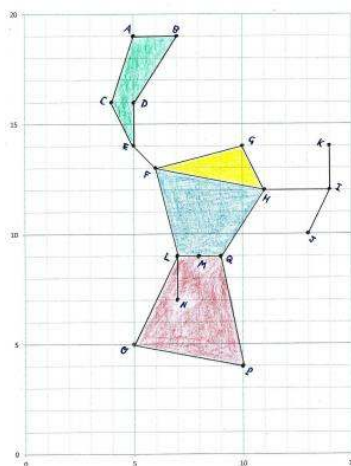


Font: «[Vectors en el pla](#)», de Victòria Oliu.

Es tracta d'una activitat per treballar el càlcul de les components d'un vector i trobar-ne d'equivalents.

Sabers #4.ESP.LS.A i #4.ESP.LS.B

Per treballar els **sabers #4.ESP.LS.A i #4.ESP.LS.B** hi ha el recurs a l'ARC «[La constel·lació d'Orió](#)», de Pepe Ródenas, una versió molt clara en paper d'una de les activitats esmentades anteriorment al recurs «Situacions vectorials». Amb els objectius d'identificar punts del pla a partir de les seves coordenades cartesianes, entendre el significat dels vectors (i les seves components) com a desplaçaments entre dos punts del pla i calcular el mòdul d'un vector en 2D emprant el teorema de Pitàgores, es proposa a l'alumnat dibuixar la constel·lació d'Orió sobre una quadrícula a partir de les coordenades cartesianes de les seves estrelles. Després, s'han d'escriure les components dels vectors que connecten determinades parelles d'estrelles i s'ha de calcular a quina distància es troben entre si, fent ús de les components i del teorema de Pitàgores.



Font: «[La constel·lació d'Orió](#)», de Pepe Ródenas.

Saber #4.ESP.LS.D

Per treballar el **saber #4.ESP.LS.D**, podem fer servir «la doble cara del GeoGebra» que mostra un fet molt elemental, però que sovint passa per alt: la relació entre la finestra gràfica i la finestra algebraica. La idea de correspondència entre figures geomètriques i expressions algebraiques pot arribar a ser molt potent. Amb aquesta idea, tenim el recurs «[Investiguem l'equació de la recta](#)» de Jordi Campos, en què s'estudien diferents equacions de la recta tenint en compte les dues finestres del GeoGebra que s'han comentat anteriorment.

Sabers #4.ESP.LS.D, #4.ESP.LS.E i #4.ESP.LS.F

Per treballar els sabers #4.ESP.LS.D, #4.ESP.LS.E i #4.ESP.LS.F hi ha el recurs amb GeoGebra «[Punts, rectes i vectors](#)» de Josep Lluís Cañadilla. En primer lloc, es fa un petit treball amb vectors, introduint el concepte i calculant-ne les components. Tot seguit es mostra com trobar les equacions d'una recta a partir d'un punt i un vector, fet que porta a introduir les equacions paramètriques, l'equació contínua i la general. Tot seguit, es fa un repàs de la potencialitat del GeoGebra a l'hora de treballar amb vectors i rectes i els recursos que ens ofereix:

- Crear rectes paral·leles i perpendiculars: *Recta(A,f)* i *Perpendicular(A,f)*
- Establir la posició relativa (es tallen, són paral·leles o perpendiculars): *SónIguals(recta, recta)*
SónParaleles(recta, recta) *SónPerpendiculars(recta, recta)*
- Trobar el punt de tall de dues rectes: *Intersecció(recta, recta)*
- Mesurar distàncies (d'un punt a una recta o d'una recta a una altra recta): *Distància(objecte, objecte)*
- Mesurar l'angle que formen dos vectors o dues rectes: *Angle(recta, recta)* o *Angle(vector, vector)*
- Trobar el punt mitjà de dos punts: *PuntMitjà(punt,punt)*

Finalment, es proposen un seguit de tasques d'aplicació d'allò que s'ha treballat.

Sabers #4.ESP.LS.D, #4.ESP.LS.E i #4.ESP.LS.F

Per treballar els sabers #4.ESP.LS.D, #4.ESP.LS.E i #4.ESP.LS.F, també hi ha recurs «[Lots of vector lines!](#)» del web Underground Mathematics. Es presenten a l'alumnat les dotze equacions de rectes següents:

① $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$	② $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$	③ $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9.5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix}$	④ $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
⑤ $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$	⑥ $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$	⑦ $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$	⑧ $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}$
⑨ $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$	⑩ $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$	⑪ $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$	⑫ $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Font: «[Lots of vector lines!](#)», del web Underground Mathematics.

L'alumnat haurà d'aparellar-les, segons les condicions següents:

- Que siguin paral·leles.
- Que siguin perpendiculars.
- Que tallin l'eix de les x pel mateix punt.
- Que tallin l'eix de les y pel mateix punt.
- Que passin pel punt (1,5).
- Que les dues rectes...

A més de fer les parelles, també hauran de trobar la característica comuna de l'última parella de rectes.

Aquest recurs aprofundeix en el treball amb rectes en forma vectorial i dona l'oportunitat de reflexionar sobre les diferències entre treballar amb unes determinades equacions o unes altres.

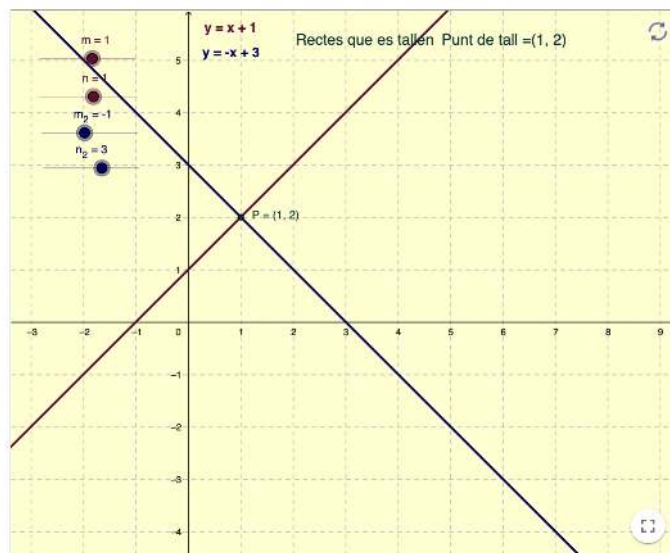
De manera similar, hi ha també el recurs «[Lots of lines!](#)», en què es tracta de fer exactament el mateix que a l'activitat anterior, però ara amb dotze rectes expressades en diferents formes:

$y = 4x + 4$	$4y = x + 3$	$y = 8x - 3$	$y + 4x + 6 = 0$
$3y = 2x - 8$	$y + 6x = 11$	$y + 8x = 6$	$2y + 8 = 3x$
$2y + x = 4$	$2y = 8x + 3$	$y = 6x - 4$	$y + x + 8 = 0$

Font: «[Lots of vector lines!](#)», del web Underground Mathematics.

Saber #4.ESP.LS.F

Per treballar el **saber #4.ESP.LS.F** hi ha el recurs «[Posició relativa de dues rectes](#)» de Victòria Oliu.



Font: «[Posició relativa de dues rectes](#)», de Victòria Oliu.

L'activitat proposa moure els punts lliscants fins a obtenir parelles de rectes que siguin:

- Paraleles.
- Coincidents.
- Secants.

Proposa a l'alumnat que observi en cada cas com són els pendents i l'ordenada a l'origen, pregunta com es pot calcular el punt de tall en el cas de les rectes secants i demana dibuixar més exemples a la llibreta i escriure'n les conclusions.

Sabers #4.ESP.LS.F i #4.ESP.LS.G

Es pot plantejar el treball dels **sabers #4.ESP.LS.F** i **#4.ESP.LS.G** a partir de petites investigacions de propietats geomètriques, com per exemple que les tres medians es tallen en un mateix punt. Amb aquesta idea, es poden trobar molts recursos preparats amb programes de geometria dinàmica. Un d'aquests és «[Rectes i punts notables](#)», d'Alba Blasco, fet amb el GeoGebra. La proposta planteja treballar les mediatrises d'un triangle, el circumcentre, les bisectrius, l'incentre, les altures, l'ortocentre, les mitjanes, el baricentre i la recta d'Euler.

Amb la mateixa idea, però menys pautat, hi ha el recurs «[Els quatre centres del triangle i la recta d'Euler](#)» de Pep Bujosa i Carlos Giménez Esteban, en què, a partir d'unes definicions donades, s'han de construir el baricentre, l'ortocentre i el circumcentre d'un triangle, i comprovar que estan alineats.

Sabers #4.ESP.LS.F i #4.ESP.LS.G

Per treballar els **sabers #4.ESP.LS.F** i **#4.ESP.LS.G** també hi ha el recurs «[Vector squares](#)», del web Underground Mathematics. Es planteja la situació següent a l'alumnat. Un quadrat està limitat per les equacions:

$$(1) \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(4) \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Font: «[Vector squares](#)», del web Underground Mathematics.

Es demana a l'alumnat:

- Que comprovi que es tracta realment d'un quadrat, és a dir, que les rectes que formen costats adjacents del quadrat són perpendiculars.
- Que trobi la superfície del quadrat.
- Que trobi les equacions de les diagonals del quadrat.

En aquest problema, l'alumnat ha d'interpretar i treballar amb equacions vectorials d'una recta, incloent-hi la recerca de punts de tall. El problema també anima els estudiants a establir connexions amb representacions geomètriques i a començar a reconèixer les característiques de les rectes perpendiculars en forma vectorial.

Moviments i transformacions

Sabers

- Estudi de les característiques principals de les homotècies: centre i raó.

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

L'estudi dels moviments en el pla és molt interessant per cultivar la mirada matemàtica de l'alumnat. Les connexions d'aquest bloc de continguts amb l'entorn dels alumnes són molt fortes i és un bon moment per demanar-los que reconeguin aquells conceptes treballats en els elements de la seva vida quotidiana i viceversa, i es pot aprofitar per treballar conceptes matemàtics mitjançant l'anàlisi del món que ens envolta.

Les homotècies són transformacions geomètriques que no deixen invariants les longituds ni la superfície de la figura inicial, així que no són moviments en el pla. S'ha considerat que l'estudi de moviments en el pla es fes a tercer i el d'homotècies a quart per respectar l'organització del decret d'ordenació curricular, però, malgrat que no sigui un saber propi del curs, és important que en el moment de treballar les transformacions geomètriques es vegi la diferència entre un tipus de transformacions i les altres. Per tant, es considera positiu que les homotècies no es treballin de forma aïllada.

Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

Tal com passa amb el bloc de formes geomètriques de dues i tres dimensions, tenint en compte el context general de 4t d'ESO no es considera que el saber d'aquest bloc sigui essencial, malgrat que es reconeix la importància de treballar les homotècies i les figures semblants.

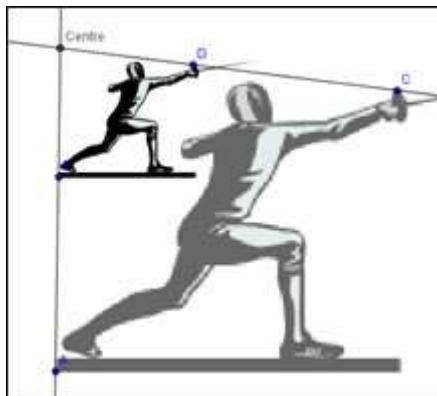
Recursos i activitats

Recursos i activitats per treballar sabers concrets

Saber #4.ESP.MT.A

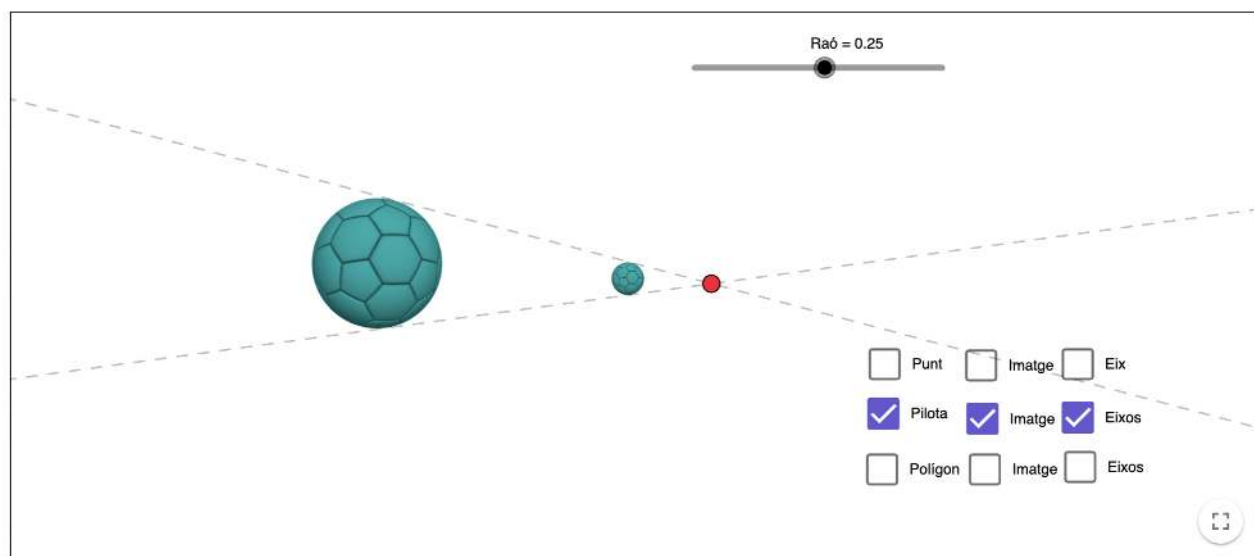
Per treballar el **saber #4.ESP.MT.A**, trobem el recurs a l'ARC «[Homotècia amb GeoGebra](#)», de Josep Lluís Cañadilla. L'activitat consta de dues parts. En la primera, l'alumnat ha de dibuixar un polígon i aplicar una homotècia. S'aprofita la geometria dinàmica per observar la transformació segons la raó sigui més gran o

més petita que 1 i també observar la transformació segons la raó sigui positiva o negativa. En la segona part, l'alumnat ha de trobar el centre i la raó de l'homotècia, donada la transformació.



Font: «[Homotècia amb GeoGebra](#)», de Josep Lluís Cañadilla.

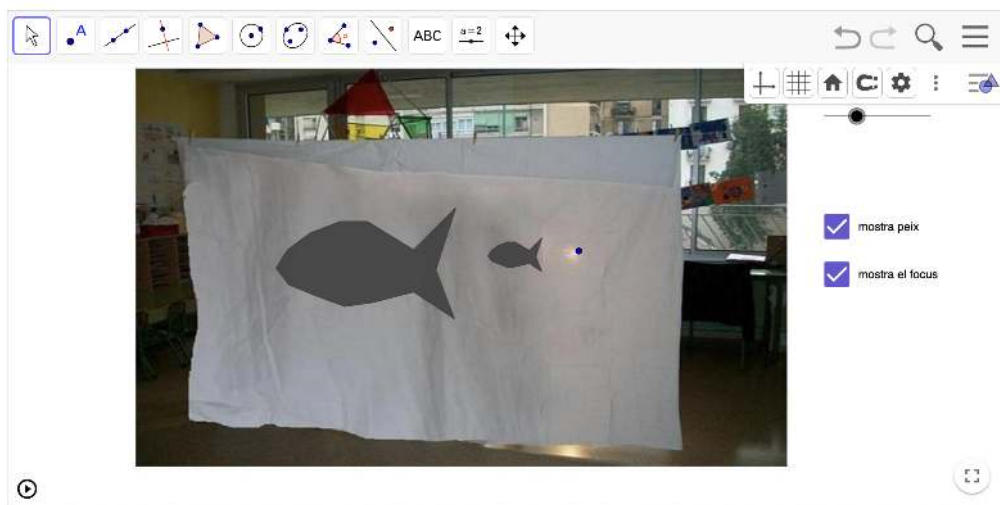
Les construccions amb programes de geometria dinàmica permeten visualitzar molt bé els canvis que es produeixen en la figura transformada en variar la figura inicial. Un exemple és la construcció «[Homotècia](#)» d'Enric Castellà:



Font: «[Homotècia](#)», d'Enric Castellà.

O aquesta altra anomenada «[Homotècia projecció d'ombres](#)», de Bernat Ancochea i Isabel Sorigué, que permet visualitzar una situació de la vida quotidiana, que més o menys tots hem fet quan hem jugat amb ombres, en què apareixen homotècies:

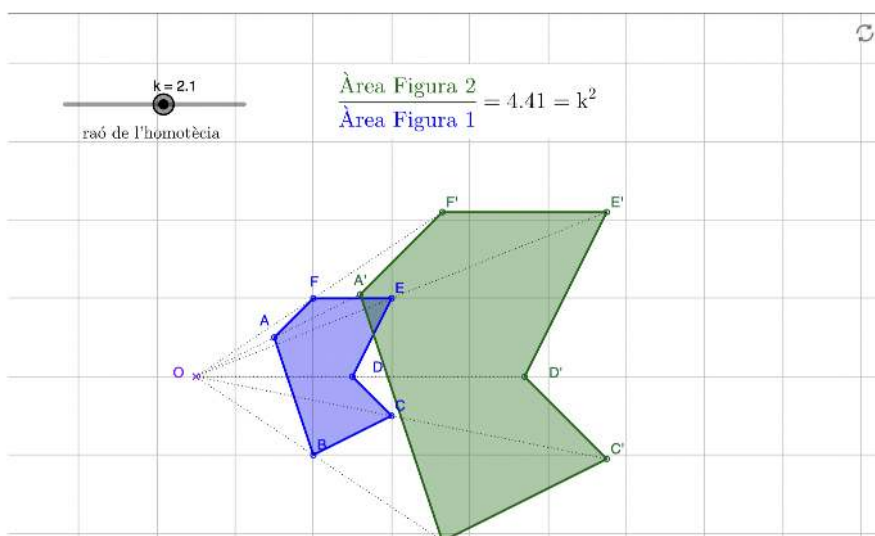
Mou el cursor.
 Pots mostrar el peix que es projecta
 Pots mostrar el focus



Font: «[Homotècia projecció d'ombres](#)» de Bernat Ancochea i Isabel Sorigué.

Per visualitzar la relació entre àrees de figures homotètiques hi ha la construcció de Manel Martínez «[Relació entre àrees de figures homotètiques](#)»:

Pots modificar la posició dels vèrtexs del polígon (blau).
 Si mous el punt lliscant veuràs una figura homotètica a l'original amb centre O i raó k.
 Els costats de la nova figura estaran en proporció k respecte la figura inicial; però observaràs que la relació d'àrees és k^2 .



Font: “«[Relació entre àrees de figures homotètiques](#)», de Manel Martínez.

Visualització i modelització geomètrica

Sabers

- Visualització de les funcions com a rectes, paràboles, hipèrboles i altres tipus de corbes amb unes característiques concretes. **#ALG.RF**
- Visualització dels zeros d'una funció o arrels d'un polinomi com a punts de tall amb l'eix d'abscisses. **#ALG.ID, #ALG.RF**
- Visualització de la regió solució en inequacions i sistemes d'inequacions lineals. **#ALG.ID**

- D. Reconeixement de connexions entre el sentit espacial, la resta de sentits i altres àrees de coneixement properes a l'alumnat. **[ESS]**

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

Seguint en la línia començada a 3r d'ESO, el gruix de sabers de 4t d'ESO es troba en el sentit algebraic, per aquest motiu el bloc Visualització i modelització geomètrica torna a connectar de forma directa amb aquest sentit. El bloc de visualització és una crossa que ha d'ajudar els alumnes a entrar a l'abstracció que requereixen els sabers de funcions i inequacions des de la comprensió dels conceptes i no des de l'aplicació de receptes.

En aquest bloc de sabers hi apareix la visualització d'algunes idees, però és important tenir en compte que passar per la geometria pot ajudar a entendre altres conceptes i propietats matemàtiques que no han quedat reflectides en aquest bloc. En aquest sentit, es considera molt important intentar geometritzar qualsevol concepte, sigui del sentit que sigui, sempre que sigui possible.

Comentaris sobre les connexions

A mesura que van avançant els cursos, aquest bloc perd connexió amb el sentit numèric i la visualització de propietats concretes i en guanya amb el sentit algebraic (**#ALG.ID** i **#ALG.RF**) per contribuir a la comprensió d'idees més abstractes.

L'únic saber que no està vinculat directament al sentit algebraic és el **saber #4.ESP.VM.D**, ja que, de forma explícita, proposa connectar la geometria amb tots els sentits.

Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

Com a saber essencial, només s'ha destacat el **#4.ESP.VM.D**, perquè és un saber molt genèric que inclou tots els altres. Els tres primers sabers no s'han destacat perquè, malgrat que el que es treballa en cadascun es considera molt important, el saber propi del bloc simplement és l'eina per treballar-ho d'una forma més rica i que ajudi més l'alumnat. Així doncs, el que es considera més important i, per tant essencial, és aprofitar totes les oportunitats que es donin en el treball de la resta de sabers per poder-los abordar també des del punt de vista de la geometria i ajudar, així, a la comprensió i a la consolidació de conceptes.

Recursos i activitats

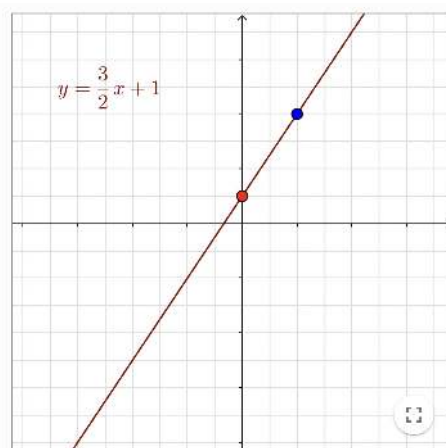
Recursos i activitats per treballar sabers concrets

Saber #4.ESP.VM.A

Al web de l'**NRICH** podem trobar molts recursos per visualitzar les funcions constant, lineal, afí, quadràtica, de proporcionalitat inversa, exponencial, etc., com a rectes, paràboles, hipèrboles i altres tipus de corbes amb unes característiques concretes, és a dir, per treballar el **saber #4.ESP.VM.A**. Vegem-ne alguns tot seguit.

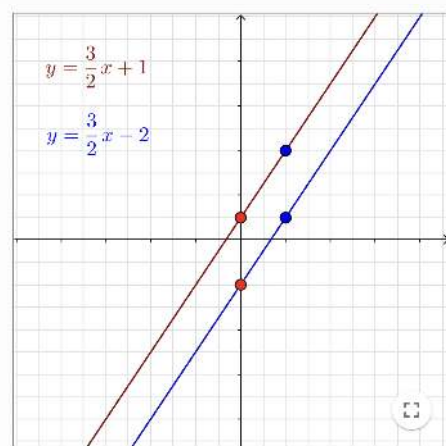
Per treballar la visualització de funcions lineals i afins, tenim el recurs «**Parallel lines**». Aquest recurs permet a l'alumnat explorar la connexió entre una recta de forma gràfica i l'equació que la representa o la defineix, equacions de la forma $y = mx + n$. S'anima l'alumnat a fer conjectures i a comprovar-les.

En primer lloc, es mostra la imatge següent i es demana que moguin els punts i observin com canvien el gràfic i l'equació:



Font: «[Parallel lines](#)», d'NRICH.

Tot seguit, es mostra la imatge següent i es demana a l'alumnat que experimenti movent els punts, que busqui diferents rectes paral·leles i que observi. A continuació, es pregunta a l'alumnat què observa sobre les equacions de les rectes paral·leles:



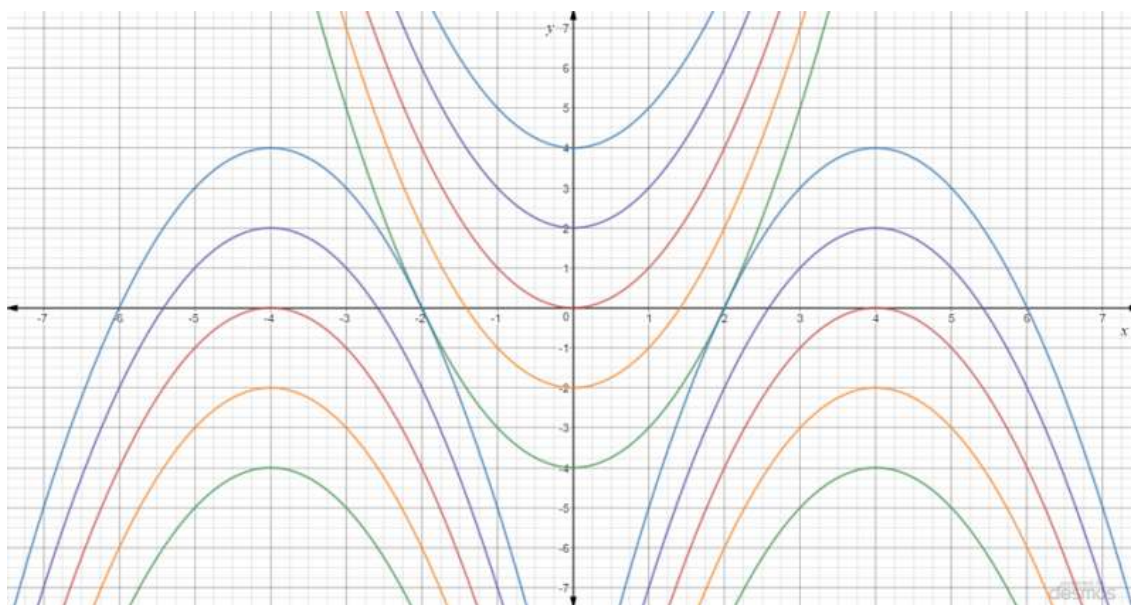
Font: «[Parallel lines](#)», d'NRICH.

Similar a aquest recurs que s'acaba de descriure, però per treballar la perpendicularitat de rectes, hi ha l'activitat «[Perpendicular lines](#)». A partir d'un gràfic amb dues rectes, es demana a l'alumnat que mogui els punts per situar-les de forma que siguin perpendiculars. A continuació, se'ls demana que observin com són les equacions d'aquestes dues rectes i que conjeturin quina relació hi ha entre elles.

Seguint amb les rectes, també trobem l'activitat «[Translating lines](#)», que proposa investigar què passa amb les equacions de diverses rectes quan fem translacions verticals i horitzontals. Després d'experimentar amb l'*applet* proposat, es demana a l'alumnat que conjeturi i expliqui les seves troballes. Finalment, es proposa un joc de fer parelles, en què s'han d'aparellar equacions amb translacions.

I ja per acabar amb les rectes, també comentarem l'activitat «[Reflecting lines](#)», en què es treballen rectes i les seves reflexions tant sobre l'eix d'abscisses com sobre l'eix d'ordenades.

Respecte a la funció de segon grau i la paràbola, també podem trobar-hi nombrosos recursos. Un exemple és «[Parabolic patterns](#)». En aquest gràfic es mostren 15 paràboles:

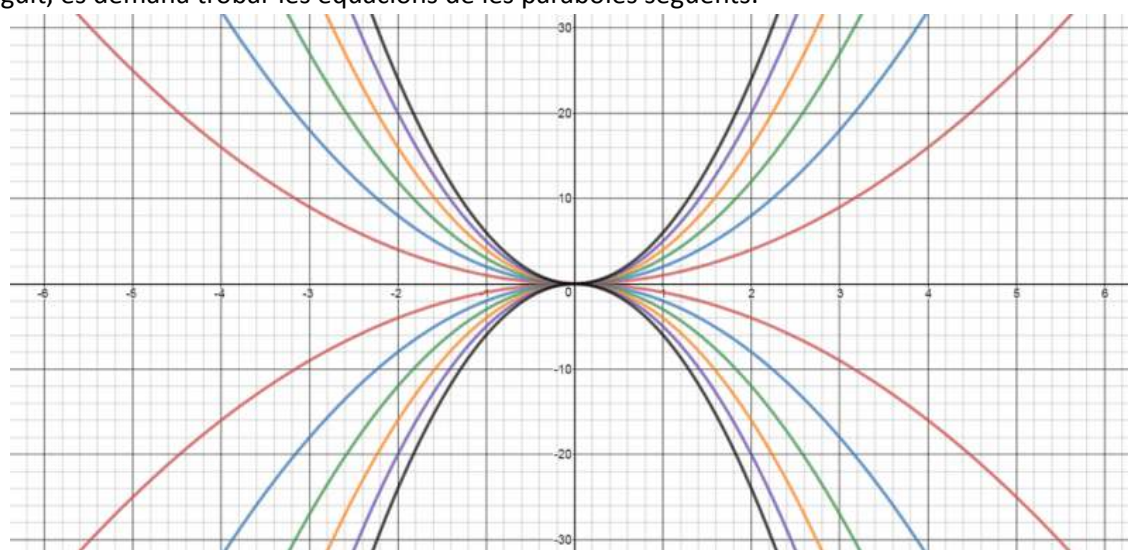


Font: «[Parabolic patterns](#)», d'NRICH.

Dues d'aquestes paràboles corresponen a les funcions de segon grau $y = x^2$ i $y = -(x - 4)^2$. Es tracta de trobar la resta d'equacions de les 15 paràboles.

L'alumnat es pot ajudar de programes de geometria dinàmica per experimentar i comprovar les seves conjetures.

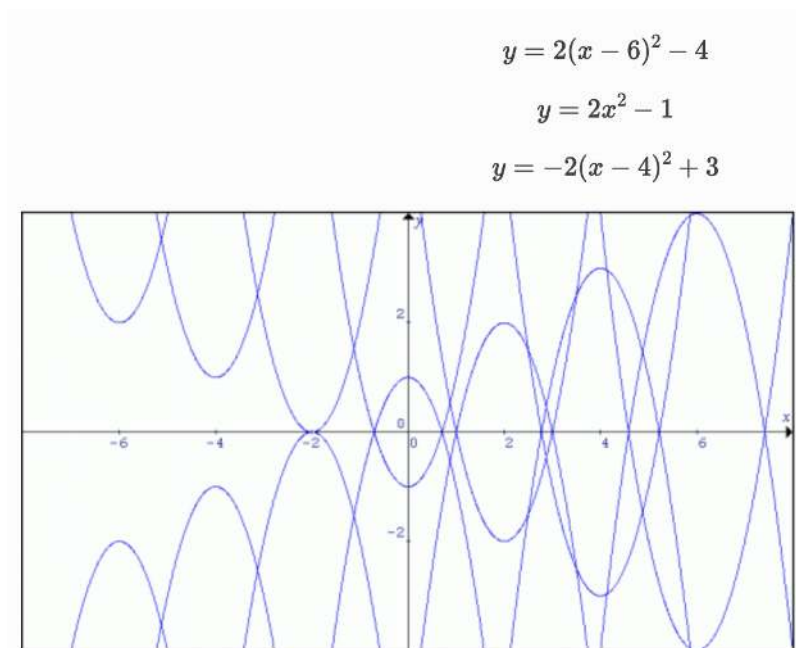
Tot seguit, es demana trobar les equacions de les paràboles següents:



Font: «[Parabolic patterns](#)», d'NRICH.

El fet de donar les gràfiques i demanar a l'alumnat que trobi les equacions l'anima a experimentar canviant les equacions sistemàticament per descobrir l'efecte en els gràfics i començar a fer generalitzacions.

Hi ha una altra activitat similar, amb un nivell de dificultat una mica més elevat, anomenada «[Parabolas again](#)». Es tracta de trobar les equacions de 14 paràboles donades tres equacions:



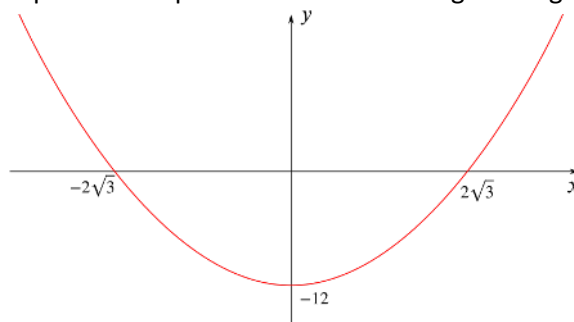
Font: «[Parabolas again](#)», d'NRICH.

I ja per acabar amb les paràboles, comentarem l'activitat «[Paired parabolas](#)». En primer lloc, es demana a l'alumnat què tenen d'igual i què tenen de diferent aquestes parelles d'equacions:

1. $y = x^2 - 4$ and $y + x^2 - 4 = 0$
2. $y = 4 - 9x^2$ and $y + 4 = 9x^2$
3. $2y = 4x^2 - 6$ and $-(y - 3) = 2x^2$

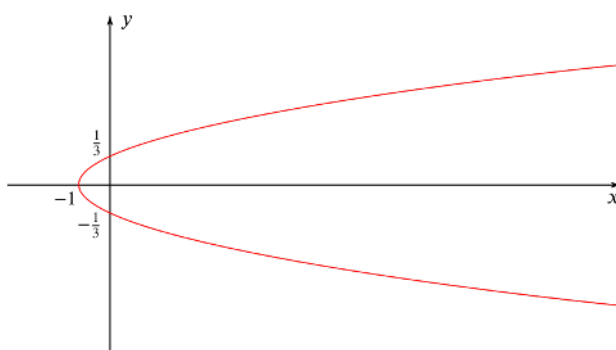
Imatge de l'activitat «[Paired parabolas](#)», d'NRICH

Tot seguit, es demana trobar l'equació de la parella de la funció del gràfic següent:



Font: «[Paired parabolas](#)», d'NRICH.

I, finalment, el mateix per a la funció del gràfic següent:



Font: «[Paired parabolas](#)», d'NRICH.

Aquesta activitat treballa la visualització de parelles de funcions quadràtiques. L'alumnat té l'oportunitat de desenvolupar la seva comprensió de les propietats de simetria de les paràboles i com això es pot relacionar amb la diferència de dos quadrats.

Saber #4.ESP.VM.A

Per treballar també altres tipus de funcions i la seva visualització, tenim el recurs fet amb GeoGebra «[Famílies de funcions](#)», de Josep Lluís Cañadilla. L'activitat proposa crear els punts lliscants necessaris per estudiar com són les famílies de funcions que s'han de treballar i observar-ne els punts de tall amb els eixos, el creixement i decreixement, extrems relatius, domini, recorregut, etc. Les funcions que es proposa treballar són la potencial, l'exponencial, la logarítmica i la de proporcionalitat inversa, entre d'altres.

Saber #4.ESP.VM.B

Per treballar el **saber #4.ESP.VM.B**, els programes de geometria dinàmica són molt útils. Donada una família de funcions, es pot demanar que s'observin els punts de tall amb l'eix d'abscisses i que se cerqui quina relació hi ha entre aquest punt i l'equació que defineix la funció.

Fet amb GeoGebra, hi ha el recurs «[Signes i tall amb els eixos](#)», de Ricard Agudo i Javier Cayetano Rodríguez, que genera diferents activitats per a l'alumnat en què, a partir d'un gràfic, es demanen els punts de tall amb els eixos i els intervals en què la funció és positiva i és negativa.

Saber #4.ESP.VM.C

Per treballar el **saber #4.ESP.VM.C**, hi ha l'activitat a l'ARC «[Inequacions amb dues incògnites](#)». Es tracta d'un joc de rol en què cada estudiant s'identifica amb un punt del pla i va comprovant si les seves coordenades compleixen o no determinades condicions algebraïques. L'alumnat es va aixecant i es van formant semiplans on els punts són els mateixos alumnes.

L'alumnat se situa a la seva taula habitual, formant una quadrícula. Caldrà emplenar els passadissos desplaçant algunes cadires. Tot l'alumnat haurà d'estar assegut. La primera fila serà l'eix d'abscisses i la primera columna serà l'eix d'ordenades. L'estudiant que sigui a l'extrem esquerre de la primera fila serà l'origen i, a partir d'aquí, anirem assignant la primera i la segona coordenada a cada alumne. Serà important que tothom recordi les seves coordenades (si cal, se les poden apuntar). Llavors demanem que es posin dretes les persones que tinguin unes coordenades que compleixin una determinada condició:

- La primera coordenada és més gran que 3.
- La segona coordenada és més petita que la primera.
- La segona coordenada és més petita o igual que la primera.
- La primera coordenada és més petita o igual que la segona.

Per simplificar i concretar els missatges, arribem a l'acord d'indicar la condició a través de notació algebraica, de manera que x és la primera coordenada i y , la segona. Així, començarem a donar condicions del tipus:

$$y \geq 2x - 1$$

$$y = 2x - 1$$

$$y > 2x - 1$$

$$y < 2x - 1$$

S'anirà descobrint que els punts que compleixen les desigualtats formen semiplans i que els que compleixen la igualtat formen precisament la recta frontera dels semiplans. Es proposaran diversos blocs d'exemples insistint en desigualtats estrictes o no estrictes i en igualtats. Quan les idees es vagin consolidant, ho representarem també a la pissarra.

Es pot consultar un article sobre aquesta activitat i altres de similars, «Construint matemàtiques. Nosaltres com a recurs: *role-plays* a classe de matemàtiques (2)» (Aubanell, 2017), de la [revista Noubiaix núm. 40](#) (p. 73-76). També es pot veure un [vídeo d'aquesta activitat](#) duta a terme pel Grup Cúbic a la Facultat de Matemàtiques i Estadística (FME) de la UPC en la 20a Jornada d'ABEAM.

Saber #4.ESP.VM.D

Tal com es recorda també als documents dels cursos anteriors, per treballar el **saber #4.ESP.VM.D**, reconeixement de connexions entre el sentit espacial, la resta de sentits i altres àrees de coneixement properes a l'alumnat, el professorat ha de plantejar situacions i activitats en què aquest reconeixement sigui possible. A través del coneixement espacial es pot descriure i interpretar el món on vivim, fet que ens pot servir per contextualitzar moltes situacions que podem plantejar a l'aula.

El treball del sentit espacial a 4t d'ESO ens obre les portes per poder connectar les matemàtiques amb altres matèries i disciplines de maneres molt diverses. L'estudi de les homotècies ens pot ser molt útil per relacionar les matemàtiques amb l'art, el disseny, la tecnologia, etc. D'altra banda, el treball algebraic que es fa a quart (tota mena de funcions elementals, les seves característiques, equacions, inequacions i sistemes) ens proporciona contextos en els quals podem establir connexions interessants amb el sentit algebraic. Tal com es mostra als recursos anteriors, podem geometritzar l'àlgebra i, així, donar sentit geomètric als zeros de les funcions o a les solucions d'equacions i inequacions.

La connexió amb el sentit de la mesura continua sent forta, igual que en els cursos anteriors. Podem generar activitats interessants sobre càlculs de superfícies, de perímetres o de volums quan fem activitats sobre el primer bloc de continguts, així com formes geomètriques de dues i tres dimensions. I amb el treball de les homotècies, podem fer un bon repàs del treball sobre semblança fet a 3r d'ESO.

Blocs de competències: processos matemàtics i gestió socioemocional

El conjunt de sabers que constitueixen el sentit espacial, com tots els altres sentits, s'ha de relacionar amb el conjunt de competències del currículum. Sense un coneixement dels sabers difícilment es poden desenvolupar els processos per avançar en l'assoliment de les competències i, d'altra banda, la manera com s'introdueixen, es construeixen i s'utilitzen els sabers és clau per dur a terme un treball competencial.

Així doncs, tots els sabers poden contribuir a desenvolupar qualsevol competència si es treballen en activitats adequades. Igualment, un saber pot contribuir a desenvolupar diverses competències.

Es presenta la relació entre els sentits i les competències específiques a través dels processos següents: resolució de problemes (competències específiques CE 1 i CE 2); raonament i prova (competències específiques CE 3 i CE 4); connexions, en què distingim les internes (competència específica CE 5) i les externes (competència específica CE 6); comunicació i representació (competència específica CE 7), i gestió socioemocional (competències específiques CE 8 i CE 9).

Aquesta relació, pel que fa al sentit espacial, es concreta, en el marc d'aquest exemple, de la manera que es descriu en els apartats següents, tot i que hi pot haver altres anàlisis igualment vàlides.

Resolució de problemes (CE 1 i CE 2)

El treball dels sabers del sentit espacial a 4t d'ESO posa sobre la taula de forma explícita l'oportunitat de

treballar diferents continguts a través de la resolució de problemes, cosa que permet aplicar els conceptes treballats a diferents contextos.

Sabers

A tall d'exemple, entre els sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar la resolució de problemes trobem, entre altres, que:

- El **saber #4.ESP.FG.A** pretén que es plantegin problemes que requereixin l'ús de propietats geomètriques per ser resolts, i contribueix, d'aquesta manera, a la CE 1 i a la CE 2.
- De manera anàloga, el **saber #4.ESP.LS.C** i el **saber #4.ESP.LS.G** proposen que es plantegin problemes i situacions que requereixin l'ús de vectors i rectes per ser resoltes, cosa que afavoreix el desenvolupament de la CE 1 i la CE 2.

Recursos

Molts dels recursos que s'han esmentat per treballar diferents sabers fan referència directa al procés de resolució de problemes. Per exemple:

- L'activitat «Crea el teu envàs», en què es treballa el **saber #4.ESP.FG.A**, proposa la construcció d'un envàs sota unes condicions concretes. Un bon context per treballar la CE 1 i la CE 2.
- Als problemes de la prova Cangur hi trobem múltiples propostes per treballar el **saber #4.ESP.FG.A**, de manera que es promou el desenvolupament de la CE 1 i la CE 2.
- En l'activitat «Serpentine lake», que permet treballar el **saber #4.ESP.FG.A**, s'ha de comprovar que un llac concret té una superfície de 40 hectàrees. Aquesta investigació fomenta el treball de la CE 1.
- L'activitat «Situacions vectorials» és un recull d'activitats per treballar els **sabers #4.ESP.LS.A**, **#4.ESP.LS.B** i **#4.ESP.LS.C**, en què es poden trobar diferents contextos que poden contribuir al desenvolupament de les competències CE 1 i CE 2.
- A les activitats «Lots of vector lines!» i «Lots of lines!» (**sabers #4.ESP.LS.D**, **#4.ESP.LS.E** i **#4.ESP.LS.F**) es proposa trobar parelles de rectes sota unes condicions concretes. Resolent problemes d'aquest estil s'afavoreix l'assoliment de la CE1.

Raonament i prova (CE 3 i CE 4)

El raonament matemàtic es pot treballar amb profunditat en contextos geomètrics. L'estudi de diferents objectes i conceptes permet la construcció de coneixement, la formulació de conjetures i la construcció d'arguments matemàtics que poden ser útils a l'hora de fer servir i aplicar aquest coneixement. Per altra banda, l'ús de programari de geometria dinàmica o altres contribueixen a l'assoliment de la CE 4.

Sabers

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar el raonament són, entre altres:

- Els **sabers #4.ESP.LS.A**, **#4.ESP.LS.D** i **#4.ESP.MT.A**, que col·laboren al desenvolupament de les competències CE 3 i CE 4 a partir de l'estudi d'objectes matemàtics i la construcció de coneixement.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers fan referència directa al procés de raonament i prova. Per exemple:

- L'activitat «Quadrat de Puig Adam» (**saber #4.ESP.FG.A**) promou el raonament preguntant sobre el nombre i el tipus de peces que formen el quadrat, cosa que afavoreix la CE 3.
- Les activitats «Eixample de Barcelona» i «Situacions vectorials» (**sabers #4.ESP.LS.A, #4.ESP.LS.B i #4.ESP.LS.C**) promouen la construcció de coneixement partint d'un context, i contribueixen així a la CE 3.
- L'activitat «Investiguem l'equació de la recta» (**saber #4.ESP.LS.D**) fomenta la construcció de coneixement a través d'una investigació, fet que afavoreix el desenvolupament de la CE 3.
- El conjunt d'activitats d'NRICH per treballar el **saber #4.ESP.VM.A** («Parallel lines», «Perpendicular lines», «Translating lines», «Reflecting lines», «Parabolic patterns», «Parabolas again» i «Paired parabolas») contribueixen al desenvolupament de la CE 3 a través la construcció de coneixement mitjançant l'observació de la gràfica i l'expressió de diferents funcions.
- La CE 4 és present en molts dels recursos proposats per treballar els sabers d'aquest sentit perquè s'utilitzen programes de geometria dinàmica. Aquestes activitats són: «Vectors en el pla» (**saber #4.ESP.LS.B**), «Investiguem l'equació de la recta» (**saber #4.ESP.LS.D**), «Punts, rectes i vectors» (**sabers #4.ESP.LS.D, #4.ESP.LS.E i #4.ESP.LS.F**), «Posició relativa de dues rectes» (**saber #4.ESP.LS.F**), «Rectes i punts notables» (**sabers #4.ESP.LS.F i #4.ESP.LS.G**), «Homotècia amb GeoGebra» (**saber #4.ESP.MT.A**) i «Relació entre àrees de figures homotètiques» (**saber #4.ESP.MT.A**).

Connexions amb altres parts de la matemàtica (CE 5)

El treball de geometria analítica entorn de les rectes connecta directament amb el sentit algebraic, tant en el seu llenguatge com amb la seva relació amb les funcions lineals i afins. A més, el bloc Visualització i modelització geomètrica serveix de crossa a l'estudi de funcions, per tant, tot aquest bloc connecta directament amb el sentit algebraic tant pel que fa a sabers com a recursos i activitats.

Sabers

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit poden ajudar a reforçar les connexions internes. Així, trobem, entre altres, que:

- Els **sabers #4.ESP.LS.A i #4.ESP.LS.F** connecten de forma directa amb el sentit algebraic i poden contribuir a desenvolupar la CE 5.
- El bloc Visualització i modelització geomètrica (**sabers #4.ESP.VM.A, #4.ESP.VM.B i #4.ESP.VM.C**) ajuda a l'estudi i l'aprenentatge dels diferents tipus de funcions i, per tant, en treballar-lo s'afavoreix l'assoliment de la CE 5.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers aporten o utilitzen connexions internes. Per exemple:

- En les activitats «Crea el teu envàs» i «Serpentine lake» (**saber #4.ESP.FG.A**) es treballa el càlcul de volums d'àrees, respectivament. Connecten així amb el sentit de la mesura i, per tant, afavoreixen el desenvolupament de la CE 5.
- Les activitats «Nombres irracionals i materials manipulatius» i «Quadrat de Puig Adam» (**saber #4.ESP.FG.A**) connecten directament amb el sentit numèric, i contribueixen així al desenvolupament de la CE 5.
- L'activitat «Investiguem l'equació de la recta» (**saber #4.ESP.LS.D**) connecta amb el sentit algebraic i, per tant, ajuda al desenvolupament de la CE 5.
- L'activitat «Rectes i punts notables» (**sabers #4.ESP.LS.F i #4.ESP.LS.G**) connecta amb altres sabers del sentit espacial diferents dels propis del bloc i del curs, i treballa així la CE 5.
- Els recursos proposats dins el bloc Visualització i modelització geomètrica ajuden al

desenvolupament de la CE 5 perquè connecten directament amb el sentit algebraic.

Connexions amb altres matèries i amb l'entorn (CE 6)

El treball entorn del sentit espacial de 4t d'ESO pot donar l'oportunitat de treballar les connexions externes i de vincular la geometria amb les altres branques de les matemàtiques i amb l'entorn dels alumnes. Per exemple, les homotècies es poden relacionar amb les fotocòpies, les fotografies, els cartells, les il·lusions òptiques o les obres d'art.

Sabers

A tall d'exemple, esmentem alguns sabers d'aquest sentit que, entre altres, poden ajudar a reforçar les connexions externes:

- El **saber #4.ESP.LS.A** pot ser un bon context per cultivar la mirada matemàtica de l'alumnat i, d'aquesta manera, contribuir al desenvolupament de la CE 6.
- El **saber #4.ESP.VM.D** promou la geometrització de qualsevol àrea del coneixement i, per tant, el desenvolupament de la CE 6.

Recursos

Alguns dels recursos descrits per treballar diferents sabers del sentit espacial ofereixen oportunitats per fer connexions externes. Per exemple:

- L'activitat «Serpentine lake» (**saber #4.ESP.FG.A**) ofereix l'oportunitat de treballar matemàtiques en un context quotidià que es pot canviar per un entorn proper a l'alumnat i treballar així el desenvolupament de la CE 6.
- De la mateixa manera, l'activitat «Eixample de Barcelona» (**sabers #4.ESP.LS.A, #4.ESP.LS.B i #4.ESP.LS.C**) també pretén treballar matemàtiques en el context d'un entorn proper a l'alumnat, i potenciar així el desenvolupament de la CE 6.
- El conjunt d'activitats «Situacions vectorials» (**sabers #4.ESP.LS.A, #4.ESP.LS.B i #4.ESP.LS.C**) ofereix diferents contextos no matemàtics en què intervenen les matemàtiques. Es col·labora, així, al treball de la CE 6.

Comunicació i representació (CE 7)

La manera com es comuniquen i es representen els conceptes i les idees matemàtiques forma part del saber fer matemàtic. El professorat ha de procurar donar l'oportunitat que l'alumnat expliqui, amb les paraules adequades i en el format correcte, els seus arguments a l'hora de resoldre problemes i treure conclusions.

Sabers

A tall d'exemple, hi ha alguns sabers d'aquest sentit que, entre altres, poden ajudar a reforçar la comunicació i la representació:

- El **saber #4.ESP.LS.D** pretén que es comuniqui una mateixa idea matemàtica de diferents maneres. Col·labora així al desenvolupament de la CE 7.
- El **saber #4.ESP.LS.G** promou l'ús de la forma més adient en cada situació i, per tant, afavoreix l'assoliment de la CE 7.

Recursos

Alguns dels recursos esmentats per treballar diferents sabers del sentit espacial fan referència al procés de comunicació i representació. Per exemple:

- Les activitats de resolució de problemes promouen la comunicació d'arguments i afavoreixen el desenvolupament de la CE 7. Alguns exemples d'aquesta mena són l'activitat «Nombres irracionals i materials manipulatius» (**saber #4.ESP.FG.A**) i el recull «Situacions vectorials» (**sabers #4.ESP.LS.A, #4.ESP.LS.B i #4.ESP.LS.C**).
- L'activitat «Investiguem l'equació de la recta» (**saber #4.ESP.LS.D**) promou l'estudi de les diferents equacions de la recta i, per tant, l'aprenentatge de les diferents formes d'escriure un mateix concepte. Treballa, doncs, la CE 7.
- A les activitats «Lots of vector lines!» i «Lots of lines!» (**sabers #4.ESP.LS.D, #4.ESP.LS.E i #4.ESP.LS.F**) cal justificar de forma adequada i amb el llenguatge matemàtic correcte els motius pels quals dues expressions són parelles. En funció de com es faci, pot ser una bona activitat per desenvolupar la CE 7. En la mateixa línia, les activitats d'NRICH proposades per treballar el **saber #4.ESP.VM.A** també són bons contextos per a la comunicació matemàtica.
- Amb referència a la representació de conceptes, una activitat que serveix per treballar la CE 7 és «Inequacions amb dues incògnites» (**saber #4.ESP.VM.C**), en què es representen de manera col·lectiva diverses inequacions.

Gestió socioemocional (CE 8 i CE 9)

A l'últim curs d'ESO, el llenguatge algebraic ja s'ha convertit en habitual, però malgrat que ja s'ha estat més d'un any treballant-hi no es pot oblidar que és un llenguatge abstracte i que molts alumnes encara estan assimilant aquest procés d'abstracció. Per tant, és molt important ser conscients d'aquest camí que alguns alumnes encara estan recorrent per poder acompanyar-los correctament: allunyant-los de les pors que els pugui generar, dotant-los de prou confiança per seguir avançant i acostant-los a una bona relació amb les matemàtiques.

La gestió socioemocional està vinculada a dues competències específiques:

- CE 8, relacionada amb el desenvolupament d'habilitats personals com les creences, les actituds i les emocions envers les matemàtiques.
- CE 9, centrada en el desenvolupament d'habilitats socials com el treball en equip i la presa de decisions.

A continuació s'indiquen alguns aspectes que, treballats des del sentit espacial, poden contribuir al desenvolupament de les competències CE 8 i CE 9.

Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 8

- La cerca de matemàtiques en el nostre entorn i l'èxit de les troballes poden trencar barreres entre l'alumnat i les matemàtiques, i afavorir el sentiment que tothom és capaç de fer interpretacions des del punt de vista matemàtic. Un bon context per aconseguir aquest objectiu és en el moment de treballar les homotècies (**saber #4.ESP.MT.A**) i les transformacions.
- Les representacions dels objectes i dels processos matemàtics que apareixen al bloc Visualització i modelització geomètrica (**#4.ESP.VM**) són una bona eina per ajudar l'alumnat a interpretar i entendre millor el que estan treballant amb llenguatge algebraic i han d'esdevenir una bona eina per vèncer les pors que puguin aparèixer en l'alumnat.
- L'activitat «Quadrat de Puig Adam» (**saber #4.ESP.FG.A**) pot ser una oportunitat per perseverar i gaudir fent investigacions matemàtiques per a aquell alumnat que vulgui anar més enllà.

Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 9

- Les activitats que promouen el treball en equip són un bon context per fomentar les actituds positives, la implicació en la presa de decisions, el respecte per les aportacions dels altres i la superació de qualsevol idea limitant sobre les habilitats pròpies o alienes en matemàtiques. Una activitat que proposa aquest tipus de treball és «Crea el teu envàs» (**saber #4.ESP.FG.A**).
- Un altre tipus d'activitats que afavoreixen la construcció de coneixement de manera col·lectiva i permeten valorar les aportacions dels altres són les que faciliten la comunicació d'argumentació, normalment emmarcades dins d'una situació de resolució de problemes. Dues de les activitats proposades que poden ajudar en aquesta línia són «Lots of vector lines!» i «Lots of lines!» (**sabers #4.ESP.LS.D, #4.ESP.LS.E i #4.ESP.LS.F**).
- Una altra proposta que requereix el col·lectiu per poder construir coneixement és l'activitat «Inequacions amb dues incògnites» (**saber #4.ESP.VM.C**), en què és necessària la col·laboració de tota la classe per poder visualitzar la representació d'inequacions en un pla. A més, en funció de com es condueixi l'activitat, poden ser els mateixos alumnes que visualitzin i es corregeixin les errades que es generin entre ells mateixos.