

TOR 4t d'ESO: Sentit de la mesura

Consideracions generals.....	1
Blocs de sabers.....	2
Magnitud.....	2
Sabers.....	2
Descripció i orientacions.....	3
Recursos i activitats.....	3
Mesurament.....	5
Sabers.....	5
Descripció i orientacions.....	6
Recursos i activitats.....	7
Estimació i relacions.....	26
Sabers.....	26
Descripció i orientacions.....	27
Recursos i activitats.....	27
Blocs de competències: processos matemàtics i gestió socioemocional.....	29
Resolució de problemes (CE 1 i CE 2).....	30
Sabers.....	30
Recursos.....	31
Raonament i prova (CE 3 i CE 4).....	31
Sabers.....	31
Recursos.....	32
Connexions amb altres parts de la matemàtica (CE 5).....	32
Sabers.....	32
Recursos.....	33
Connexions amb altres matèries i amb l'entorn (CE 6).....	33
Sabers.....	33
Recursos.....	34
Comunicació i representació (CE 7).....	34
Sabers.....	35
Recursos.....	35
Gestió socioemocional (CE 8 i CE 9).....	36
Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 8:.....	36
Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 9:.....	37

Consideracions generals

El conjunt de sabers en el currículum de matemàtiques de secundària ve distribuït en dos blocs temporals: un, format pels cursos de primer a tercer de la secundària obligatòria, i l'altre on només figura el quart. Ens trobem, doncs, en aquest darrer curs de l'ESO, en el qual la quantitat de sabers que fan referència al sentit de la mesura disminueix considerablement si ho comparem amb els cursos anteriors. Tanmateix, cal tenir en compte que un dels pilars fonamentals en què s'ha basat l'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques en l'educació bàsica ha estat l'establiment constant de connexions entre sabers d'un mateix sentit o dels diferents sentits que constitueixen la matèria. Aquest fet, juntament amb les connexions externes existents entre les matemàtiques i les altres àrees, ens permet afirmar que el sentit de la mesura es continua desenvolupant i treballant, també des dels altres sentits, no només a 4t d'ESO, sinó al llarg de tota la vida.

En aquesta línia, cal posar en relleu les paraules de Bishop en el seu llibre *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural* (Bishop, 1999):

«La mesura constitueix una de les principals activitats humanes a partir de les quals es desenvolupa la matemàtica. Està present en totes les cultures, atès que permet comparar, ordenar, estimar, calcular, amb més o menys precisió, diferents magnituds.»

Els sabers que conformen el sentit de la mesura venen agrupats en tres blocs: Magnitud, Mesurament i Estimació i relacions. Malgrat que en el currículum, per a aquest curs, només figuren sabers en el bloc de Mesurament, hem considerat necessari especificar-ne també per als altres dos blocs, tenint en compte que, tal com s'ha anat repetint durant tota la secundària, les activitats d'experimentació centrades en el Mesurament també fan que es treballin sabers propis dels altres dos blocs. Per aquesta raó, recomanem fer una lectura completa d'aquest document seguint l'ordre en què s'ha escrit. D'aquesta manera es pot tenir una visió completa del que volem treballar amb el nostre alumnat, però en el moment de dur-lo a l'aula amb activitats d'experimentació, aquesta seqüenciació no és tan rígida, ja que la interacció entre els sabers de diferents blocs apareix de forma natural.

Volem que les classes de matemàtiques es desenvolupin en un ambient de resolució de problemes, fent que el repte i la curiositat siguin motors d'aprenentatge. Cal que les propostes puguin servir per recollir i aplicar sabers apresos en cursos anteriors, i alhora permetin prou autonomia a l'alumnat perquè es puguin emprar diferents estratègies que condueixin a la seva resolució. En aquest curs proposem, pel que fa a mesura, que les competències específiques es mobilitzin en activitats que introdueixen la trigonometria, i en altres on conflueixen la probabilitat i la geometria. És important que l'alumnat mostri certa destresa en l'ús de la calculadora, el full de càlcul i el GeoGebra, i que aquestes eines tecnològiques esdevinguin un bon suport per a les seves investigacions i comprovacions.

Tal com indica el professor Anton Aubanell (2015, pàg. 72):

[...] són moltes les activitats que es poden fer a classe entorn de la mesura. Serà bo que els alumnes treballin en grups, amb un bon grau d'autonomia i amb un ambient d'intercanvi d'idees, al llarg d'un procés per al qual es pot proposar un cert patró general de possibles accions:

- 1. Conjecturar, fer una estimació de la mesura que es busca. Si pot ser, posar-la en comú argumentant les raons que l'han fonamentada.*
- 2. Establir la unitat de mesura més adequada.*

3. *Buscar o construir l'eina de mesura i conèixer bé com fer-la servir: cintes mètriques, làsers, goniòmetres, etc. La construcció d'un goniòmetre per part del mateixos alumnes és una proposta molt instructiva.*
4. *Mesurar tant com calgui amb les millors condicions per garantir la màxima exactitud.*
5. *Prendre consciència de l'existència d'errors en la mesura i de procediments que poden millorar-ne la precisió. Per exemple, fer la mateixa mesura repetidament i fer la mitjana dels resultats.*
6. *A vegades s'estarà fent una mesura indirecta. En aquest cas, la mesura que s'està determinant no és la que s'ha mesurat directament sinó que ha de ser deduïda per mitjà de procediments geomètrics o trigonomètrics. En aquests casos cal tenir en compte dues coses:*
 - *El domini dels conceptes i les relacions que cal posar en joc. (...)*
 - *La propagació d'errors en el procés de càlcul. Els errors en els mesuraments inicials poden créixer i afectar significativament el resultat final. (...) Sovint, en aquest context, els alumnes tenen tendència a donar el resultat de les operacions fetes amb moltes xifres decimals, com si més xifres impliquessin més exactitud. És important subratllar el fet que no podem atorgar al resultat final més exactitud que la que tenien les dades de partida i que, potser, encara se n'ha perdut al llarg del procés de càlcul.*
7. *Valorar la plausibilitat de la mesura obtinguda («Té sentit en el context?» «És coherent amb altres dades de què es disposa?») i la seva precisió, expressant-la adequadament atenent, en especial, a les xifres significatives i a les unitats.*
8. *Si és possible, fer comprovacions comparant el resultat obtingut en el mesurament amb mesures procedents d'altres fonts: si es tracta d'un edifici, preguntant a un veí; si es tracta d'un objecte petit, submergint-lo en aigua i mesurant l'augment de volum; en altres casos, embolicant l'objecte per aproximar-nos a la mesura de la seva àrea o emplenant-lo per al volum.*
9. *Reprendre les conjectures fetes inicialment i valorar el nivell d'aproximació que s'havia assolit.*

En resum, proposem treballar el sentit de la mesura a partir dels processos matemàtics, cinc engranatges ben connectats el principal dels quals és la resolució de problemes, que acaba posant en funcionament el raonament i prova, les connexions internes i externes, la representació i comunicació, i la gestió socioemocional. Les propostes han de preveure, sempre que es pugui, els tres blocs de sabers: Magnitud, Mesurament i Estimació i relacions, d'aquesta manera s'anirà desenvolupant el sentit com un tot, i no pas com la suma disjunta d'unes parts. A més a més, recomanem que els conceptes es defineixin i consolidin quan siguin necessaris, procurant no avançar-ne l'aparició.

Com a criteri comú a tots els sentits i en tots el cursos, s'han considerat essencials un parell de sabers, com a màxim tres, per a cadascun dels blocs. Les raons que ens han portat a seleccionar-los les argumentem més endavant.

Blocs de sabers

Magnitud

Sabers

- A. Ús de factors de conversió que permetin comparar unitats de mesura d'angles i l'establiment del radian com a unitat internacional de mesura. **[ESS]**

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

Els angles i la seva obertura ja han estat objecte d'estudi a la primària i en tots els cursos fets de la secundària. Les unitats utilitzades fins aleshores per mesurar-los han estat principalment les del sistema sexagesimal, un sistema de numeració posicional amb base 60 emprat pels sumeris entre el 3000 aC i el 2000 aC, i que actualment utilitzem per a la mesura del temps horari i l'amplitud dels angles. En el bloc de magnitud hem cregut necessari afegir un saber que permeti a l'alumnat treballar amb les unitats adequades de mesura d'angles, establir comparacions entre elles i fins i tot fer operacions si les situacions així ho requereixen. Proposem que en aquest curs l'alumnat descobreixi altres sistemes de mesura angular com el centesimal o francès, i l'internacional; i ho faci aprofitant el context històric i social on apareixen. L'establiment d'una unitat de mesura per als angles que depèn exclusivament d'una propietat mètrica de la circumferència, i la conversió d'altres unitats habituals, com les del sistema sexagesimal, a aquesta, serà fonamental per al desenvolupament de situacions de mesurament on intervenen relacions entre longituds i angles.

Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

El fet de concretar un únic saber en aquest bloc ens ha portat directament a proposar-lo com a essencial. Igualment, pensem que és molt important la concepció del radian com a unitat de mesura d'angles, en tant que esdevé unitat en el sistema internacional i, a més a més, permet recollir sabers anteriors relacionats amb la longitud de la circumferència i el treball amb els seus elements, com són l'arc, angle central, etc., propis del sentit espacial. Volem destacar també que l'ús de factors de conversió per comparar unitats en el sistema sexagesimal, per exemple, amb els radians, permetrà treballar el raonament proporcional i alhora és una bona oportunitat per recollir sabers de cursos anteriors on són presents el càlcul amb angles i les seves expressions dins del sistema sexagesimal, tant en forma complexa com incomplexa.

Recursos i activitats

Recursos i activitats generals per al bloc de sabers

Per treballar el **saber #4.MES.MA.A** proposem activitats que a partir del raonament i la representació ajudin a fer que l'alumnat entengui la unitat de mesura del radian fins al punt que el puguin utilitzar per fer mesuraments i estimacions de magnituds angulars. A més a més, per tal que la comprensió sigui plena és convenient que pugui comparar-se amb unitats ja conegudes per l'alumnat, com són les del sistema sexagesimal.

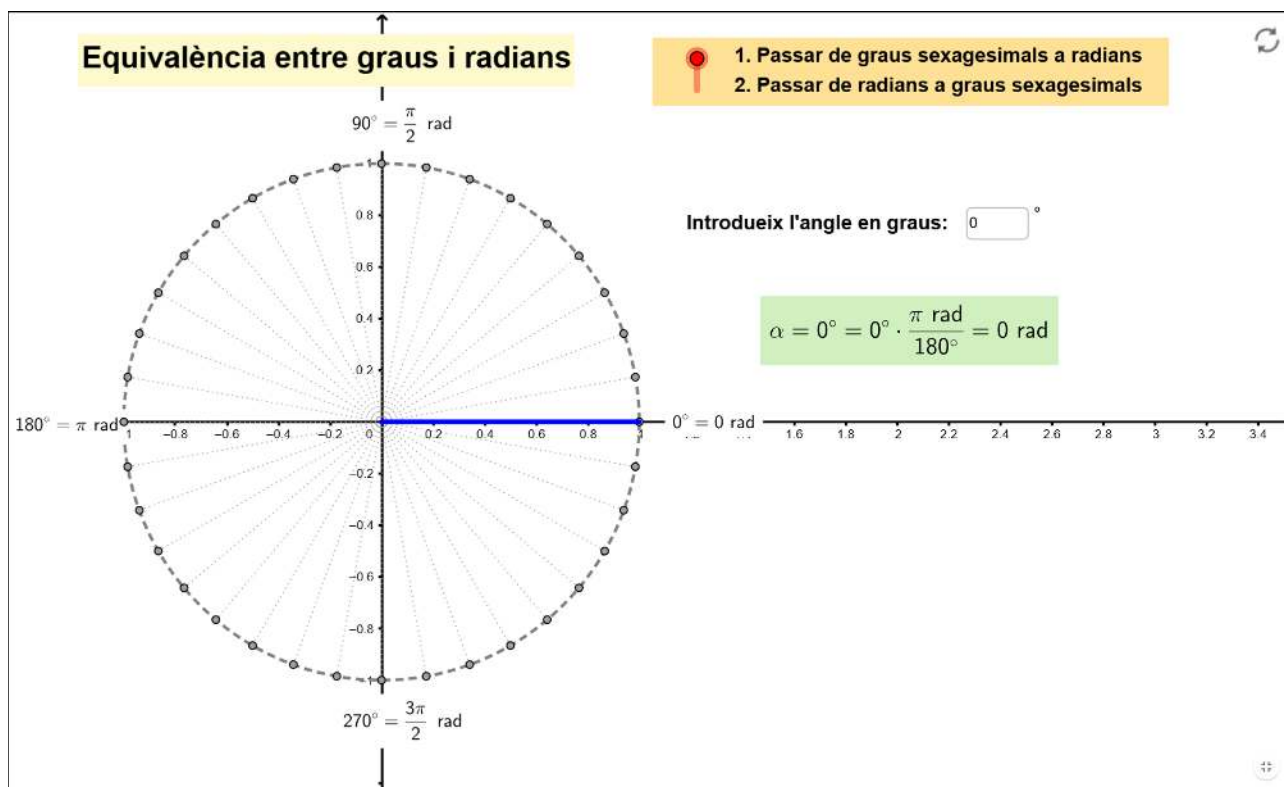
COMPARACIÓ DE MESURES ANGULARS

Qualsevol experimentació de mesurament d'angles o de trigonometria és una bona oportunitat per treballar les unitats. Els angles es poden donar tant a l'inici de l'activitat com en el seu desenvolupament, així com en els resultats. Els podem trobar en forma complexa (graus, minuts i segons) o incomplexa, si s'ha treballat en el sistema sexagesimal o en el centesimal. Així doncs, a partir de l'estudi de la precisió en les mesures o de la conveniència a l'hora de triar una unitat o una altra, sorgeix la possibilitat de passar d'aplicar els factors de conversió. És important que l'alumnat entengui i sàpiga resoldre aquestes conversions i operacions bàsiques amb angles, ja sigui de manera escrita o directament amb l'ús de la calculadora.

En situacions de girs, trobem dos sentits d'obertura dels angles, així com alguns que superen la volta sencera. Naturalment, en un mesurament hi ha una quantitat associada a una unitat. En aquest sentit, la conversió entre unitats també es pot treballar a partir de la imatge d'obertura que proporciona l'angle.

Per a això, pot ser útil el full de treball [Equivalència entre graus i radians](#), del professor Manel Martínez, que inclou una aplicació en la qual, a més de permetre introduir l'expressió d'un angle en una unitat o en una altra, es mostra la seva representació sobre la circumferència goniomètrica, s'especifica en quin quadrant es troba i es realitza la conversió.

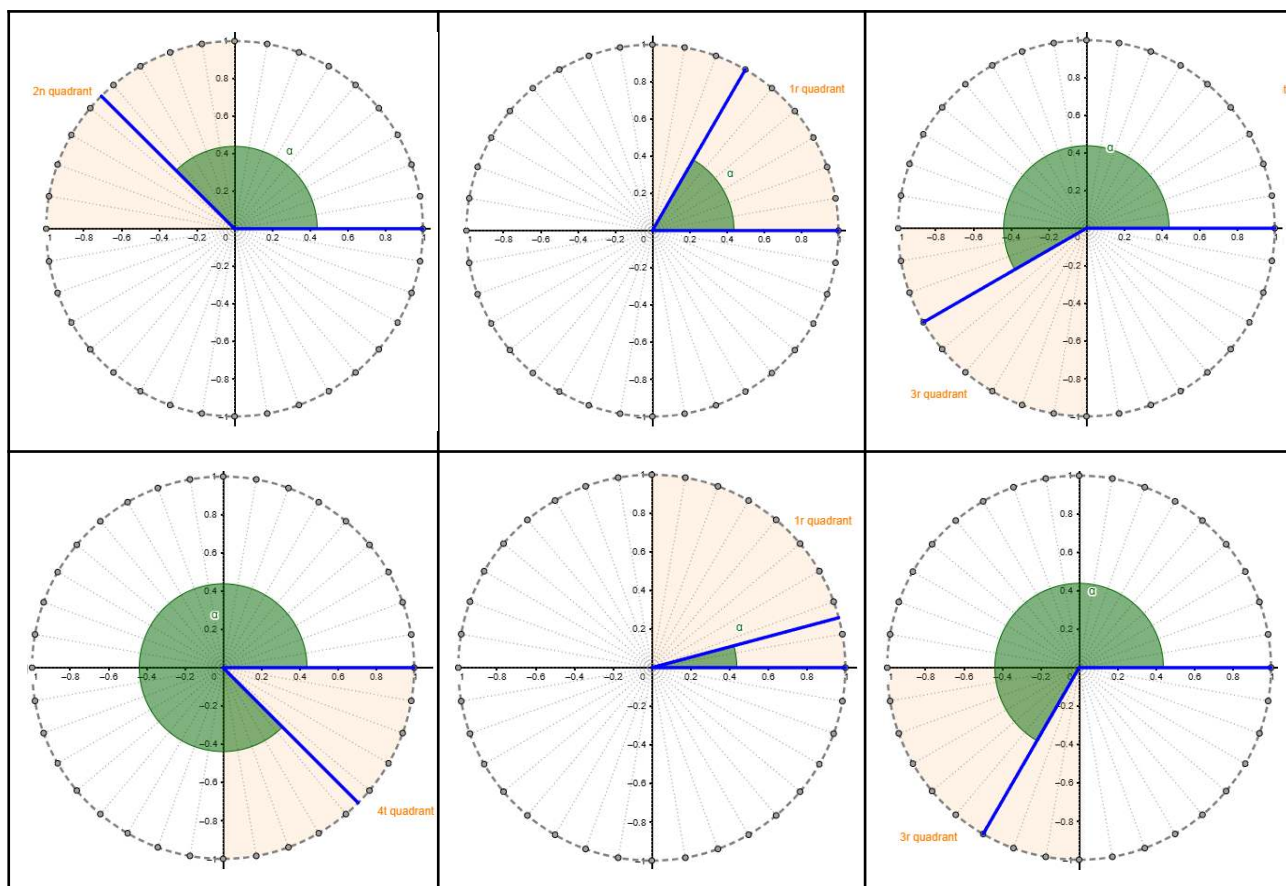
És previsible que, a aquestes edats, l'alumnat tingui clar quants graus representen un angle recte, un pla o un complet. A més, les aplicacions de GeoGebra, a banda de ser molt útils per a l'aprenentatge, són essencials per a la comprovació de resultats.



Font: [Equivalència entre graus sexagesimals i radians](#)

Autor: Manel Martínez

El treball de conversions entre graus i radians ajudarà a identificar la mesura d'algunes fraccions d'angle en radians. Per aquesta raó no hem de perdre l'oportunitat de fer alguna proposta del tipus: Quants radians mesuren els angles següents?



Font: [Equivalència entre graus sexagesimals i radians](#)

Autor: Manel Martínez

És important fomentar que sorgeixin diferents estratègies per resoldre-ho. Hi ha alumnes que decideixen passar per la mesura de l'angle en graus i després fan el canvi d'unitats a radians. Altres parteixen de l'equivalència entre un angle pla i π rad, i operen a partir de fraccions d'aquest angle. Aquestes situacions esdevenen bones oportunitats per compartir els raonaments que van sortint i incrementen els seus aprenentatges amb l'adquisició d'altres maneres de pensar.

Aprofitant l'ocasió, es pot proposar l'activitat inversa: donar l'amplitud de l'angle en radians i demanar a l'alumnat que el representi. Es recomana sempre donar mesures múltiples d'un dotzena part de π rad, és a dir, múltiples de 15° .

Mesurament

Sabers

- Descoberta del radian a través de la proporcionalitat geomètrica.
- Selecció i ús d'instruments (analògics o digitals) i unitats adequades per mesurar de manera directa angles i longituds o distàncies en situacions trigonomètriques.
- Observació de les raons invariants entre els costats de triangles rectangles semblants: les raons trigonomètriques.
- Utilització de les raons trigonomètriques i les seves relacions en la resolució de problemes que es poden representar amb triangles rectangles. **[ESS]**
- Investigació de l'origen i ús de la trigonometria al llarg de la història.

- F. Relació entre les freqüències relatives i les probabilitats d'esdeveniments en experiments aleatoris connectats amb la geometria. [#ALG.PC](#), [#EST.PI](#)
- G. Mesura de la probabilitat d'esdeveniments en experiments aleatoris, tenint en compte la seva independència o incompatibilitat. [#ESS](#) [#EST.PI](#)

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

Els sabers de mesurament constitueixen el bloc principal d'aquest sentit a 4t de secundària. Se centren, principalment, en l'aprenentatge de la trigonometria a partir dels sabers apresos en cursos anteriors corresponents a aquest mateix sentit que estem desenvolupant. Els teoremes de Tales i de Pitàgores, les magnituds angulars i lineals, així com els seus amidaments i les relacions entre aquests que sorgeixen en el triangle, formen la base del coneixement d'un sentit que segueix molt connectat amb l'espacial en aquest final de l'educació bàsica.

El treball de camp amb l'obtenció de mesures directes d'angles i distàncies, a partir d'instruments adients, i el tractament posterior de les dades recollides per tal de minimitzar l'error, juntament amb els teoremes esmentats i el context històric, aproparan l'alumnat al càlcul de mesures inaccessibles. Es recomana donar continuïtat a les activitats d'experimentació realitzades a tercer, fent que la trigonometria prengui protagonisme i sigui un instrument més per al raonament i argumentació en la resolució de problemes. Per exemple, en el càlcul d'altures mitjançant el [mètode de la doble observació](#).

La representació esdevé una eina fonamental per resoldre situacions de mesurament. Sorgeix en la traducció d'enunciats facilitant-ne la interpretació, en els possibles raonaments que formen part del desenvolupament dels problemes, i en la mateixa resolució quan es mostra la part mesurada. És per això que no hem de perdre l'oportunitat de treballar la representació de múltiples maneres: a partir d'aplicacions com el GeoGebra, amb esbossos o fent dibuixos a escala.

Continuant amb el treball sobre mesura de la incertesa proposat en els cursos anteriors, concretem un parell de sabers dins d'aquest bloc que fan referència a la probabilitat geomètrica i al mesurament de successos tenint en compte la seva compatibilitat o independència.

Es recomana afavorir el treball en grups heterogenis d'unes tres persones, amb l'objectiu de promoure la conversa matemàtica, compartir conjectures i prendre decisions consensuades i fonamentades en el raonament. És important aplicar instruments de gestió, com pot ser l'assignació aleatòria de rols, que afavoreixin la participació de tots els components del grup. Tanmateix, cal dedicar estones al treball individual i educar l'alumnat a enfrontar-se als problemes perquè aquests esdevinguin reptes personals i no limitadors d'aprenentatge.

Comentaris sobre les connexions

Tots els sabers especificats en aquest bloc tenen connexió o amb el sentit espacial o bé amb l'estocàstic. Un exemple el trobem en els sabers [#4.MES.ME.F](#) i [#4.MES.ME.G](#), que connecten amb el bloc de predictibilitat i incertesa. A més a més, el primer, referit a la probabilitat geomètrica, enllaça de manera directa amb el sentit algebraic, concretament amb el bloc de pensament computacional. Cal tenir present també que, tal com s'ha comentat en l'apartat de consideracions generals, Magnitud, Mesurament i Estimacions i relacions difícilment poden aparèixer de manera inconnexa si el tipus de propostes que es presenten a l'aula són activitats riques que comporten un treball per competències. En la mateixa línia, volem fer palès que els mateixos recursos indicats pel docent poden evidenciar altres connexions no previstes en aquesta concreció de sabers. I, alhora, sorgeixen relacions amb altres àrees de coneixement com la física i la tecnologia, que també fan ús de les mesures angulars i de la trigonometria en els seus camps.

Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

S'han triat com a essencials els **sabers #4.MES.ME.D** i **#4.MES.ME.G**. El primer, perquè recull la resta de sabers d'aquest bloc connectats amb el sentit espacial i els posa al servei de la resolució de problemes. El segon, perquè es vol evidenciar la necessitat de treballar la mesura de la probabilitat en tots i cadascun dels cursos que conformen la secundària obligatòria, i en aquest cas, dels dos sabers dins de Mesurament relacionats amb l'estocàstic, el **saber #4.MES.ME.G** és el més fonamental.

Observacions sobre alguns sabers específics

Amb el **saber #4.MES.ME.A** s'indica una intencionalitat didàctica: la necessitat que l'alumnat faci descobertes sobre les propietats i relacions que es produeixen entre objectes matemàtics. D'aquesta manera es vol aconseguir un aprenentatge significatiu i una comprensió de les idees i els conceptes, en contraposició a una mera reproducció. La descoberta del radian mitjançant la proporcionalitat geomètrica ajuda a veure la utilitat del procés per tal d'obtenir un resultat.

Aquesta idea també surt en el **saber #4.MES.ME.E**, que convida a fer que l'alumnat pugui desenvolupar les competències matemàtiques en activitats d'investigació. Precisament en aquest saber hem volgut significar la importància de la història com a suport de l'aprenentatge de les matemàtiques. Al llarg de la història la humanitat s'ha trobat amb reptes que ha hagut de superar. Conèixer aquells referits a la mesura i estudiar-los dona l'oportunitat que els nostres alumnes puguin fer un aprenentatge connectat amb el passat i la humanitat, a part de connectar amb altres idees.

És important oferir propostes variades en el format en què es proposen, ja sigui amb activitats de camp, d'aula, d'experimentació, de conversa matemàtica o de resolució de problemes, i també pel que fa al suport sobre el qual se sustenten. En uns quants sabers serà propici l'ús d'eines tecnològiques, en particular en el **saber #4.MES.ME.F**, en què les simulacions amb GeoGebra ajudaran a desenvolupar-lo.

Recursos i activitats

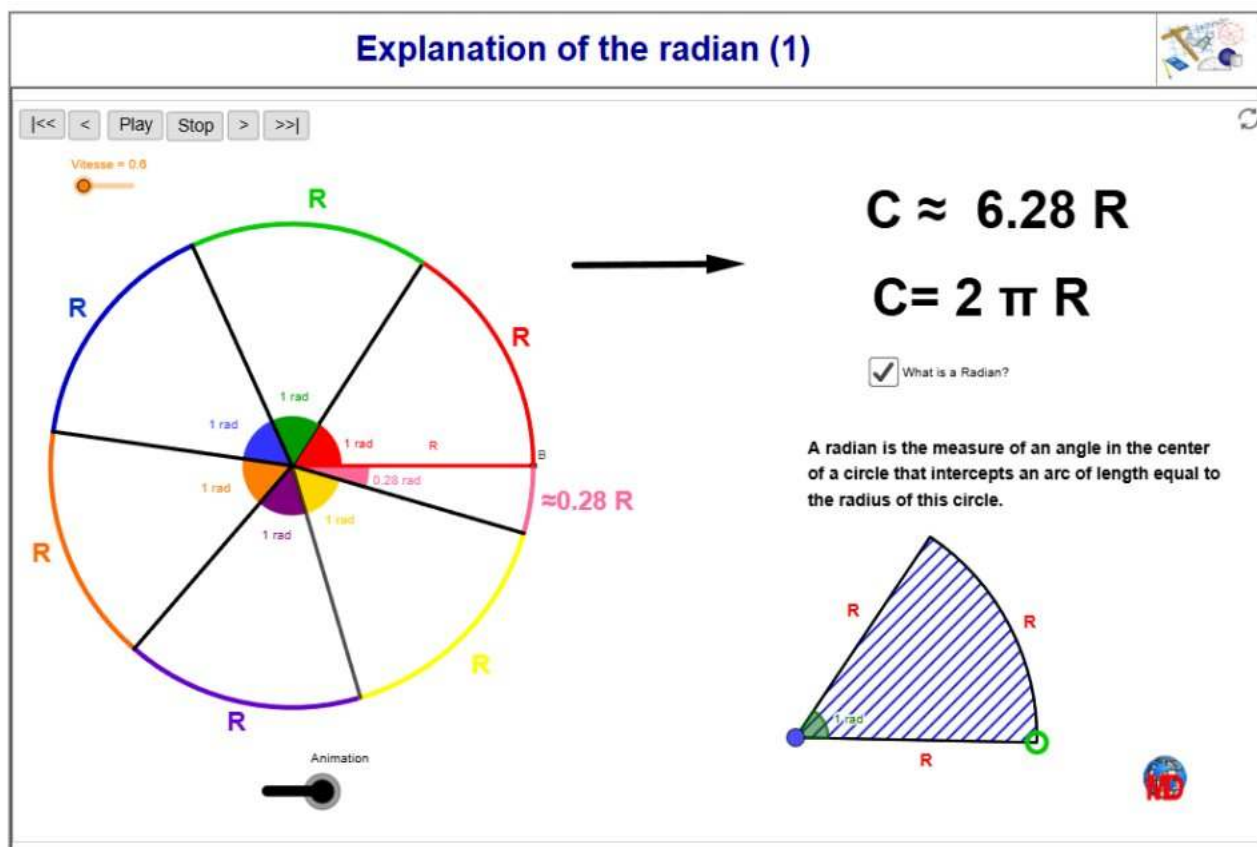
Recursos i activitats generals per al bloc de sabers

#4.MES.ME.A (Descoberta del radian a través de la proporcionalitat geomètrica.)

QUÈ ÉS UN RADIAN?

El professor Daniel Mentrard és un excel·lent creador de [recursos TIC](#) de matemàtiques per a totes les edats, especialment en GeoGebra. Les seves aplicacions tenen com a finalitat ajudar les explicacions del docent i facilitar que l'alumnat, alhora que manipula les creacions virtuals, pugui construir coneixement matemàtic. Referida al **saber #4.MES.ME.A** volem destacar l'aplicació [Explanation of de radian \(1\)](#). Per dur-la a l'aula pot ser convenient agrupar l'alumnat en parelles i, sense explicacions prèvies, deixar que observin i facin anar la construcció. A partir d'aquí, fer-los escriure tot allò que observen i el que es pregunten. Aquest tipus d'activitats recollides sota el nom de *What do you notice? What do you wonder?* són habituals per iniciar temes, explorar quins coneixements previs té l'alumnat i afavorir la conversa matemàtica entre iguals. Tot seguit, una posada en comú sobre les observacions fetes per grup i la gestió de les preguntes que es facin, permetrà captar tota la informació que aporta la construcció en GeoGebra, i aconseguir que l'alumnat descobreixi el radian com a unitat de mesura angular. En l'aplicació trobem un botó que permet visualitzar i amagar el concepte de radian. En el moment que està actiu es marquen dos punts en el sector circular, un de color blau, el vèrtex de l'angle, i un altre de color verd, que permeten la translació i el gir d'aquest sector amb l'objectiu que pugui ser situat sobre la circumferència, fent coincidir el punt blau en el centre, i comparar l'angle complet amb un radian. Amb els botons de la part superior esquerra es pot clicar el primer de tots per situar la construcció en el seu moment inicial, i amb un clic al

botó «Play» es pot anar seguint l'elaboració de l'aplicació. Des d'un punt de vista didàctic, és important que l'alumnat, agrupat en parelles, observi aquesta animació abans de respondre les preguntes esmentades anteriorment, ja que estem convençuts que la mateixa construcció els ajudarà en l'adquisició de coneixement i a fer-se preguntes.



Font: [Circumference of the circle and the radian](#)

Autor: Daniel Mentrard

No hem de perdre l'oportunitat també de fer un treball manipulatiu, i d'aquesta manera recollir alguns aprenentatges duts a terme a l'inici de la secundària. Cal que cada alumne pugui construir el radian en els seus apunts. Es pot fer amb regla i compàs, o amb un cordill, una planxa de suro, unes xinxetes i un full blanc. L'obtenció d'un sector circular que tingui la longitud de l'arc igual a la dels segments que el constitueixen, el radi de la circumferència, serà determinant. Alhora, la raó entre la longitud de qualsevol circumferència i el seu radi ajudaran a comparar l'angle complet amb el radian.

#4.MES.ME.B (Selecció i ús d'instruments (analògics o digitals) i unitats adequades per mesurar de manera directa angles i longituds o distàncies en situacions trigonomètriques.)

Recomanem l'adquisició d'aquest saber a partir del treball de mesurament en activitats de camp. És precisament en l'obtenció i manipulació de dades quan apareix la necessitat de seleccionar i fer un ús adequat dels instruments necessaris. En cursos anteriors ja s'ha fet referència a activitats que tenen per objectiu conèixer i emprar aparells de mesura com són el [goniòmetre](#), l'[hodòmetre](#), el [clinòmetre](#) i les cintes mètriques. És per això que, en cas de no haver-ho treballat fins ara, recomanem visitar aquestes propostes suggerides de 1r a 3r d'ESO.

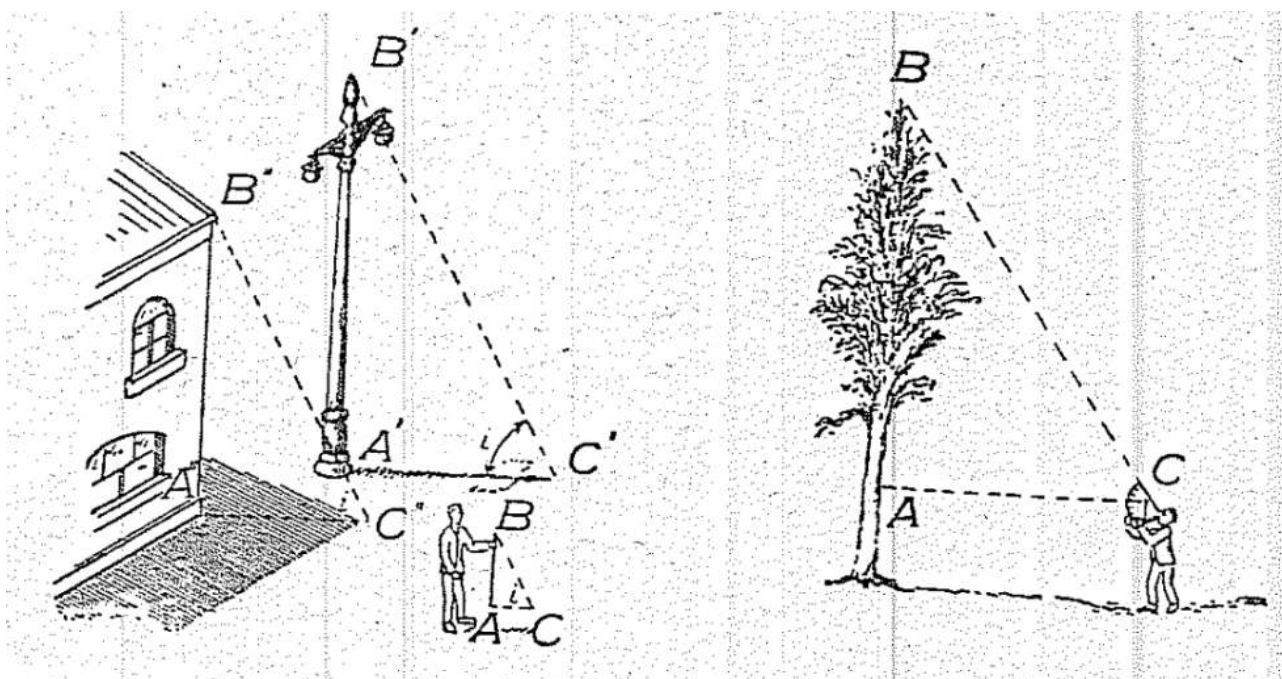
Les unitats adequades a l'hora de fer mesura directa d'angles i distàncies dependran de l'objecte que calgui mesurar i de la precisió de l'aparell de mesura. En l'àmbit de longituds i distàncies, és un aspecte que s'ha tractat a 1r d'ESO i que, naturalment, s'ha continuat treballant durant la resta de cursos. Pel que fa a les amplituds dels angles, caldrà tenir en compte l'aparició del radian i el seu ús en el sistema internacional de mesures.

#4.MES.ME.C (Observació de les raons invariants entre els costats de triangles rectangles semblants: les raons trigonomètriques.)

La trigonometria rectilínia, una de les branques fonamentals de les matemàtiques, té el seu origen en l'observació de relacions invariants entre les longituds dels costats dels triangles rectangles. Aquestes relacions, conegudes com a raons trigonomètriques, permeten descriure i estudiar les propietats mètriques d'aquests triangles i tenen nombroses aplicacions en contextos tan diversos com la topografia, l'astronomia i l'enginyeria.

Per iniciar l'estudi d'aquestes raons, és essencial partir de l'anàlisi de triangles rectangles semblants, en què el teorema de Tales resulta fonamental per justificar la proporcionalitat entre els costats. La semblança implica que els angles corresponents dels triangles són iguals i, per tant, les proporcions entre els seus costats són invariants. Aquest fet permet definir tres raons trigonomètriques bàsiques: el sinus, el cosinus i la tangent, que relacionen els costats oposat i adjacent respecte a l'angle considerat amb la hipotenusa, o bé entre ells.

Una manera efectiva de treballar aquestes idees és a través d'activitats pràctiques que connectin l'alumnat amb la realitat física. Per exemple, es pot proposar la construcció de taules de valors per a diferents inclinacions d'un triangle rectangle, establint una relació experimental entre els angles i les seves raons trigonomètriques. Tal com s'indica en la sessió 26 «Presentación heurística de la trigonometría rectilínea» del llibre *Didáctica matemática heurística* (Puig Adam, 1956):



Font: Imatge extreta del llibre *Didáctica matemática heurística*

Autor: Pere Puig Adam

«Al variar la inclinación de los rayos solares, varía la longitud de la sombra; luego, la razón r varía también. Si para cada inclinación i tuviéramos tabulada la razón r correspondiente, llamada tangente de i , no tendríamos necesidad de esperar a que hiciese sol para medir alturas, pues bastaría medir los ángulos de inclinación de visuales. Esto estimula el interés de construir una tal tabla, cuyos valores obtendrán los alumnos mediante construcciones de triángulos y mediciones de ángulos y catetos (actividad en clase)».

Angle $\hat{C}$	$\overline{AC}$	$\overline{AB}$	$\overline{BC}$	$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$	$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$	$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$
5°						
10°						
15°						
20°						
25°						
30°						
35°						
40°						
45°						
50°						
55°						
60°						
65°						
70°						
75°						
80°						
85°						

L'alumnat haurà de dibuixar els 17 triangles (si es volen fer angles de 5° en 5°) i mesurar les longituds dels costats restants. Seguidament, es poden recollir els resultats obtinguts en les darreres tres columnes (raons

entre les longituds dels costats) i fer un estudi estadístic dels resultats. Per fer aquest recull, l'ús de formularis pot facilitar la feina del docent a l'aula (tant per a la recollida de dades com per a l'estudi estadístic posterior). Aquest serà el pas previ per introduir, de manera natural, les definicions de les raons sinus, cosinus i tangent i, seguidament, comprovar que els resultats obtinguts són similars als que ens dona la calculadora.

Un cop completada la taula anterior, pot ser molt interessant observar quines relacions (algunes de les quals molt evidents) es donen. Aquestes primeres conclusions podran ser els primers passos per a l'estudi posterior del **saber #4.MES.ME.D.**

Aquesta manera d'enfocar l'estudi potencia no només la comprensió de les raons trigonomètriques, sinó també el seu caràcter aplicat. Cal insistir que, emprant aquesta metodologia, es reforça el fort vincle entre el teorema de Tales i les definicions de les raons trigonomètriques en triangles rectangles plans. A més, fomenta l'autonomia dels estudiants en la recerca de patrons matemàtics i la seva representació, cosa que contribueix al desenvolupament del pensament crític i analític.

TRIGONOMETRIA DEL TRIANGLE RECTANGLE AMB GEOGEBRA

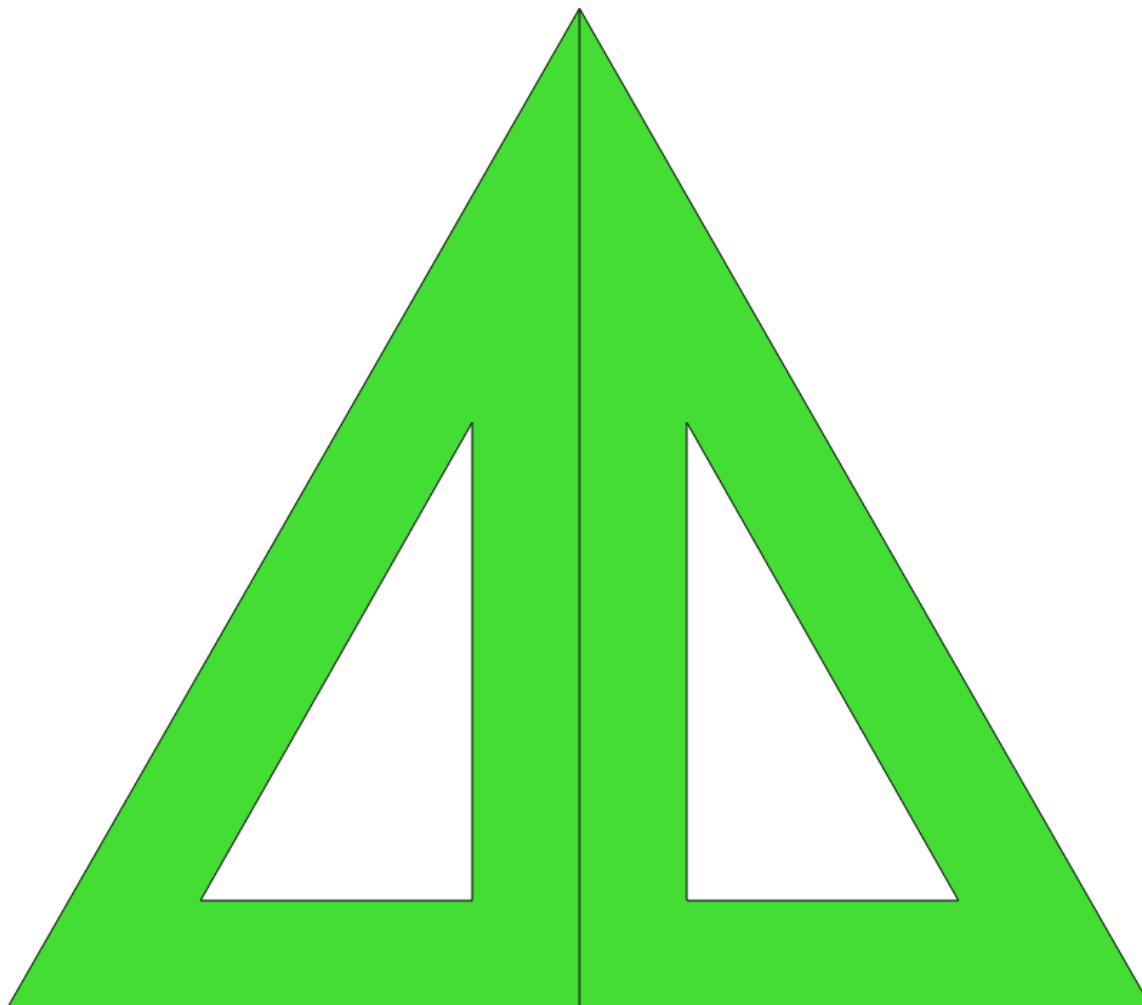
El recurs [Trigonometria del triangle rectangle](#), creat per Manel Martínez, segueix la mateixa línia d'enfocament pedagògic proposada per Puig Adam en el seu llibre *Didáctica matemática heurística* (vegeu el text inicial del **saber #4.MES.ME.C.**). Aquesta proposta fomenta l'experimentació de l'alumnat amb GeoGebra per tal d'explorar les relacions trigonomètriques en el context de triangles rectangles. A través d'aquest recurs, els estudiants poden manipular visualment els elements dels triangles (com els costats i els angles) i observar com varien les raons trigonomètriques (sinus, cosinus i tangent) a mesura que canvien les inclinacions.

Aquesta activitat es basa en el principi de la semblança de triangles i, com en la proposta de Puig Adam, en la relació estreta entre les raons trigonomètriques i el teorema de Tales. La manipulació dels triangles a GeoGebra permet als alumnes percebre de manera clara i visual aquesta relació proporcional, la qual cosa facilita la comprensió dels conceptes matemàtics. Aquest recurs és ideal per ser utilitzat després de la proposta de Puig Adam, ja que ofereix la possibilitat d'explorar i validar les conclusions obtingudes prèviament.

L'ESCAIRE I EL CARTABÓ

Aquest recurs proposa una activitat en què s'estudia el funcionament i les propietats de dos instruments de dibuix clàssics: l'escaire i el cartabó. Aquests instruments, utilitzats des de fa segles en la construcció i el dibuix geomètric, tenen una rellevància didàctica destacada per comprendre les raons trigonomètriques bàsiques en triangles rectangles.

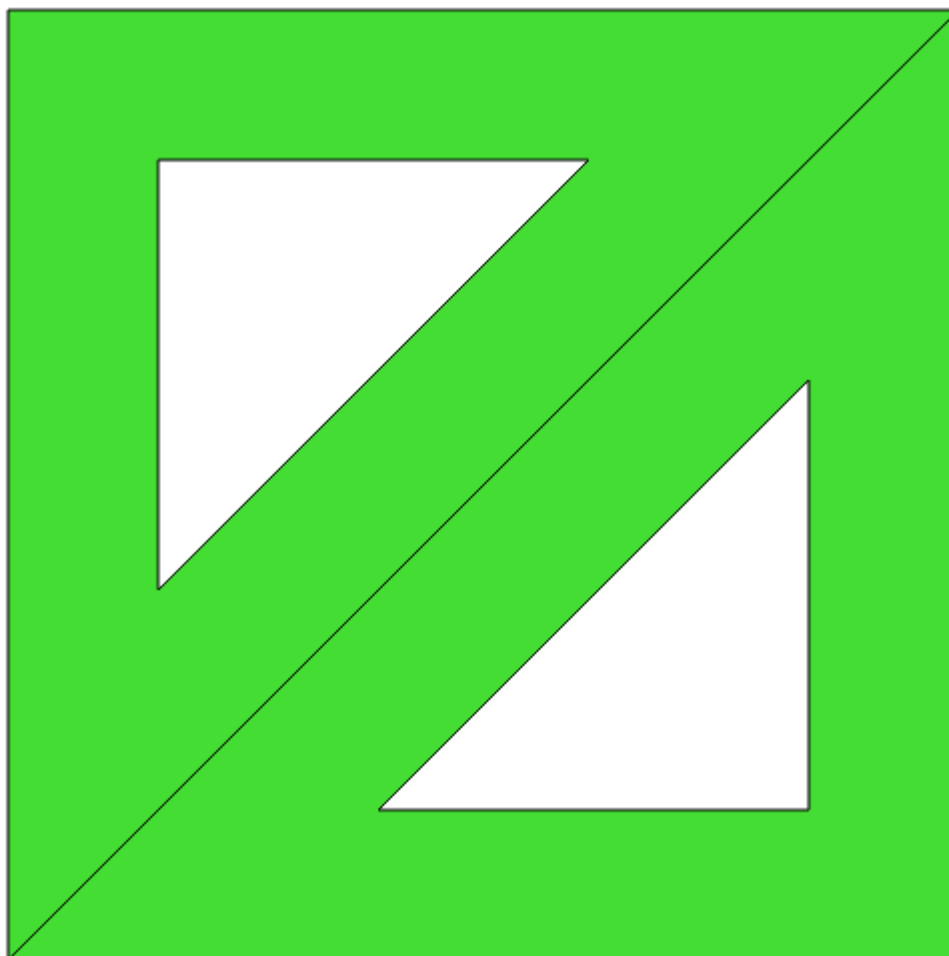
L'escaire és un triangle rectangle escalè generat a partir de l'eix de simetria d'un triangle equilàter. Aquest instrument té una propietat interessant que es pot explorar en l'àmbit trigonomètric: permet visualitzar les raons trigonomètriques dels angles de 30° i 60° . Quan es manipula l'escaire, els alumnes poden observar com les proporcions dels costats d'aquest triangle es relacionen directament amb el sinus, el cosinus i la tangent d'aquests angles.



Font: [Escaire](#)

Autoria: Wikimedia Commons

D'altra banda, el cartabó és un triangle rectangle isòsceles, creat a partir de la meitat d'un quadrat, tallant-lo per la seva diagonal. Aquest instrument és fonamental per comprendre les raons trigonomètriques associades a l'angle de 45° . Quan els alumnes treballen amb el cartabó, poden identificar fàcilment les relacions de proporcionalitat entre els costats i les raons trigonomètriques corresponents.



Font: [Cartabó](#)
Autoria: Wikimedia Commons

L'estudi d'aquests dos estris permet completar la taula clàssica de les raons trigonomètriques dels angles 0° , 30° , 45° , 60° i 90° . Estudiant la geometria de l'escaire i el cartabó, els estudiants poden deduir les raons trigonomètriques per a aquests angles a partir de la mesura dels costats dels triangles associats. Aquesta activitat proporciona una comprensió profunda del **saber #4.MES.ME.C** a través d'objectes de la vida quotidiana de l'alumnat.

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Si es vol ampliar l'activitat, es poden cercar les relacions que es donen entre els costats dels dos estris, tenint en compte que la hipotenusa del triangle associat al cartabó mesura (generalment) el mateix que el catet més llarg del triangle associat a l'escaire. A partir d'aquí, donada la longitud d'un dels costats (per exemple, la longitud del catet del cartabó), es poden calcular les mesures de la resta de costats.

#4.MES.ME.D (Utilització de les raons trigonomètriques i les seves relacions en la resolució de problemes que es poden representar amb triangles rectangles. [ESS])

El **saber #4.MES.ME.D** proposa anar més enllà de la comprensió inicial de les raons trigonomètriques treballada en el **saber #4.MES.ME.C**, per aplicar-les en contextos propers a l'alumnat i en la resolució de problemes. Un dels objectius inicials ha de ser sistematitzar l'ús de les raons trigonomètriques en la resolució de triangles rectangles. No obstant això, limitar-nos a un treball purament mecànic faria que l'aprenentatge quedés en un nivell molt superficial. Per aquest motiu, és essencial incloure situacions que connectin la trigonometria amb contextos propers a l'alumnat o amb reptes matemàtics més significatius.

N'és un bon exemple determinar l'àrea d'un polígon regular mitjançant triangulació des del seu centre, el nombre de costats i la seva longitud. L'ús de les raons trigonomètriques permet donar sentit a la fórmula clàssica de l'àrea $A = \frac{\text{perímetre} \cdot \text{apotema}}{2}$ i explorar altres perspectives més enllà del seu ús rutinari. Treballar aquests problemes no només enriqueix l'experiència matemàtica de l'alumnat, sinó que també els ajuda a comprendre la connexió entre la trigonometria i la geometria treballada en cursos anteriors.

Finalment, aquest saber es pot il·lustrar amb exemples significatius com els problemes Mallorca a la vista! i Una suma d'angles, on la trigonometria té un paper protagonista per resoldre reptes geomètrics o per modelitzar i resoldre situacions de contextos quotidians.

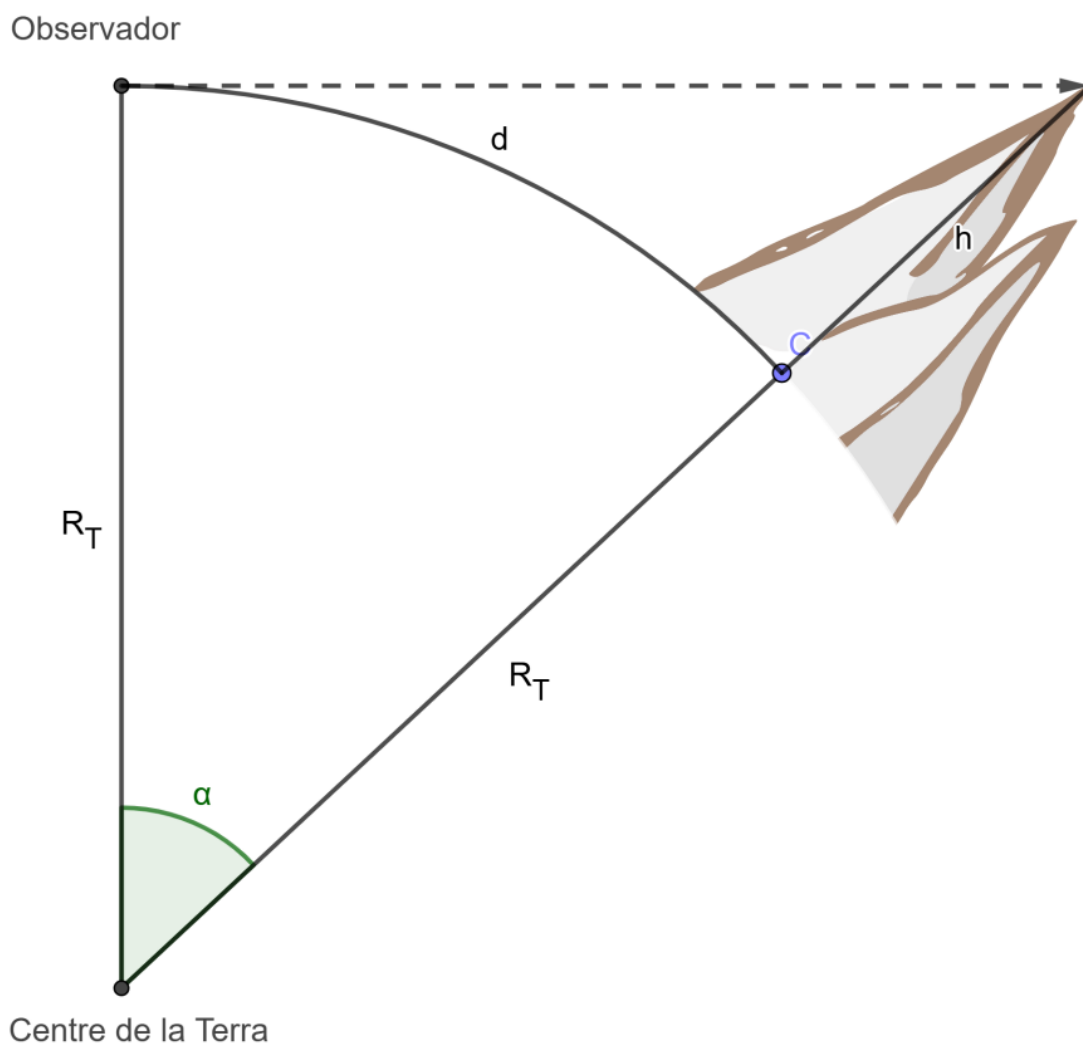
MALLORCA A LA VISTA!

Un dels camps en què la trigonometria ha tingut una gran aplicació és la cartografia. Les triangulacions fetes al segle XVIII per establir la longitud exacta d'un metre són un exemple històric del seu ús per mesurar distàncies en superfícies corbes. Inspirant-nos en aquest context, proposem una activitat que planteja una pregunta interessant: és possible veure Mallorca des de la costa catalana? Aquest problema permet

treballar el **saber #4.MES.ME.D**, atès que implica la utilització de les raons trigonomètriques i les seves relacions en la resolució de problemes representables amb triangles rectangles.

Per facilitar-ne l'anàlisi, podem simplificar el plantejament inicial considerant un observador situat a nivell del mar a la costa catalana. Això redueix el problema a l'estudi d'un triangle rectangle format per:

1. L'observador (situat a nivell del mar).
2. El punt més alt de la serra de Tramuntana, a Mallorca.
3. El centre de la Terra.



Font: Elaboració pròpia

Aquest triangle és rectangle a l'observador, ja que la línia de visió cap a Mallorca és tangent al perfil del planeta Terra. Per resoldre el problema, cal calcular l'angle entre l'observador, el centre de la Terra i el punt més alt de Mallorca. Mitjançant raons trigonomètriques i un raonament proporcional, es pot determinar si aquest angle permet una línia de visió directa o si la curvatura de la Terra ho impedeix.

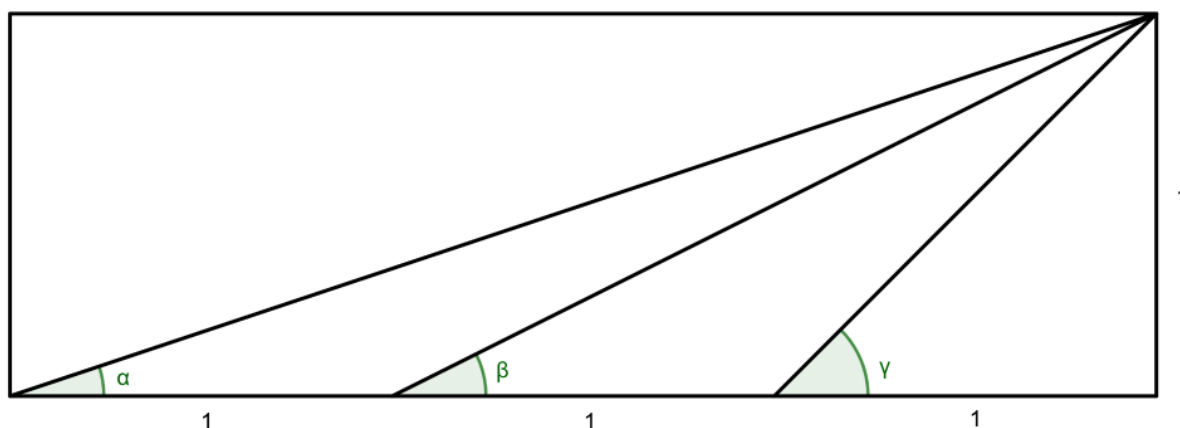
Si es vol aprofundir i considerar el problema en la totalitat, s'hauria d'estudiar la situació amb l'observador situat a una certa alçària (per exemple, en un punt elevat de la costa catalana). Això afegeix complexitat al

càlcul, ja que s'haurien de tenir en compte dos triangles rectangles i ajustar els càlculs en funció de les altures i distàncies relatives. Per a una anàlisi més detallada, es recomana la lectura de l'article [Mirando al horizonte](#), de Pablo Rodríguez.

Aquesta activitat fomenta la capacitat de modelar matemàticament situacions del món real mitjançant la trigonometria. A més, ofereix una oportunitat per connectar conceptes matemàtics amb aspectes físics, com la curvatura de la Terra, i treballar la resolució de problemes de forma sistemàtica.

UNA SUMA D'ANGLES

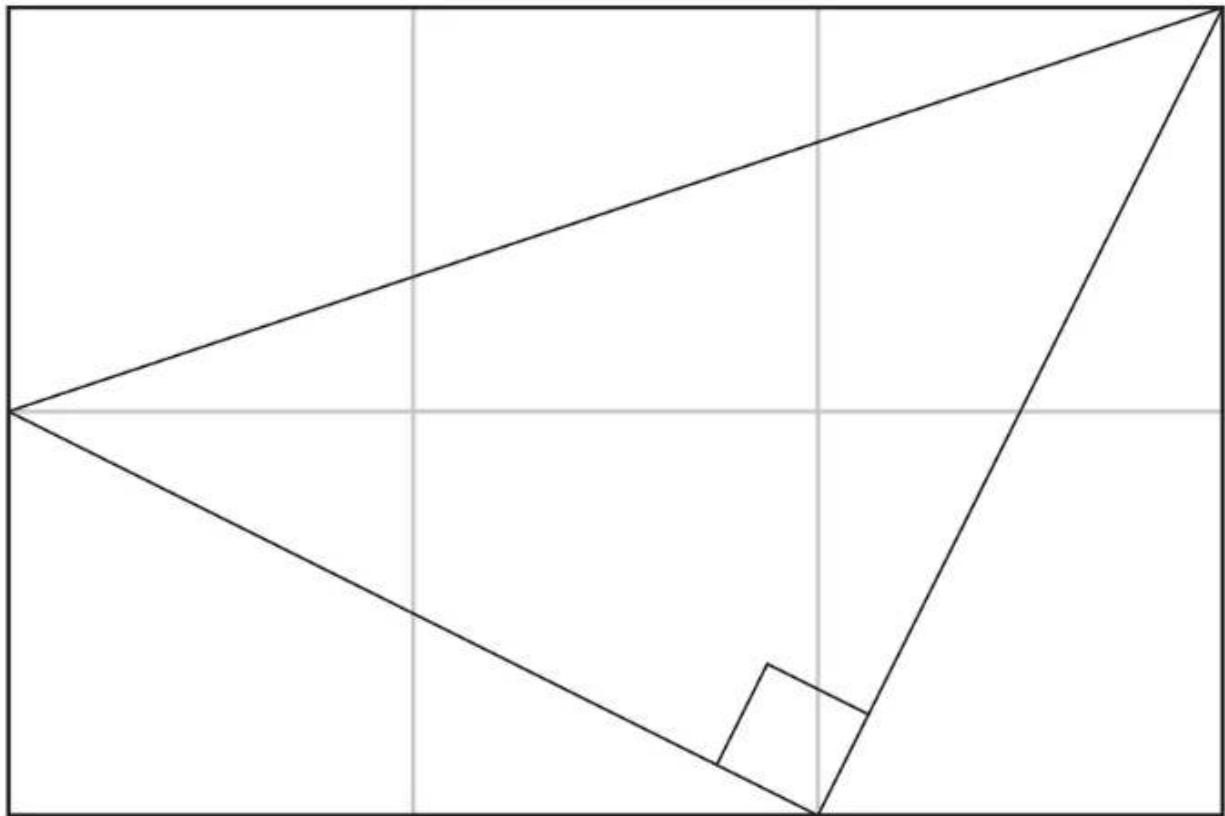
Es planteja als alumnes la següent pregunta: quina és la suma dels angles marcats en la figura adjunta?



Font: Elaboració pròpia

A partir de l'ús de les raons trigonomètriques, l'alumnat pot calcular aproximadament els valors dels angles α , β i γ . L'interès d'aquest exercici radica en el fet que, segons la precisió amb què es calculin els quocients entre els catets dels tres triangles rectangles, el resultat serà un valor proper a 90° . Però, com es pot demostrar que la suma dels tres angles és exactament 90° ?

La resposta a aquest repte es pot trobar en el magnífic llibre de Roger Nelsen, *Proofs Without Words III: Further Exercises in Visual Thinking* (Nelsen, 2015). En aquest llibre, l'autor presenta una elegant demostració visual que formalitza aquesta propietat de manera intuïtiva i rigorosa.



Font: Elaboració pròpia

A més, la figura que acompanya la demostració mostra altres relacions interessants entre els angles dels tres triangles inicials. De la demostració visual de Nelsen, en destaca especialment la invariància de les raons trigonomètriques en triangles semblants. En concret, el triangle central utilitzat en la demostració visual és semblant al triangle rectangle de catets de longitud 1 proposat en l'enunciat, fet que permet establir les relacions necessàries per validar el càlcul de manera inequívoca.

#4.MES.ME.E (Investigació de l'origen i ús de la trigonometria al llarg de la història.)

La trigonometria, tal com la coneixem avui, té arrels que s'estenen al llarg de diverses civilitzacions i èpoques històriques. El seu origen es remunta a les necessitats pràctiques de l'astronomia, la navegació i la cartografia, disciplines que van requerir una comprensió precisa de les relacions entre angles i longituds en triangles. El terme «trigonometria» prové del grec i significa 'mesura de triangles', però els seus conceptes fonamentals es van desenvolupar molt abans que la paraula fos encunyada.

Els primers estudis coneguts sobre les relacions angulars es troben a l'Índia, amb obres com el *Surya Siddhanta* i l'*Aryabhatiya*, on es van calcular taules de sinus i es van establir conceptes que serien essencials per al desenvolupament posterior de la disciplina. Aryabhata, un matemàtic i astrònom del segle V, va ser pioner en l'ús de les mitjanes-cordes, un precursor del sinus modern. A través de la traducció de textos indis a l'àrab, els estudis trigonomètrics es van expandir a la cultura islàmica medieval, on van ser perfeccionats per matemàtics com al-Khwarizmi i al-Tusi.

El terme «sinus» té una història curiosa. Els àrabs van traduir la paraula sànscrita *jiva* (mitjana-corda) com a *jiba*, escrita simplement com a «jb» en àrab clàssic. Els traductors llatins, confonent aquest terme amb *jaib* (que significa 'cavitat' o 'pit'), van traduir-lo com a *sinus*. Així, un error de traducció accidental va donar lloc al terme que avui és universal.

A Europa, la trigonometria es va consolidar com una disciplina independent gràcies a treballs com els de Bartholomaeus Pitiscus, que va publicar el llibre *Blatnometria sive de dimensione triangulorum* el 1595. Aquest llibre no només va donar nom a la trigonometria, sinó que també va ajudar a establir-la com una eina matemàtica fonamental.

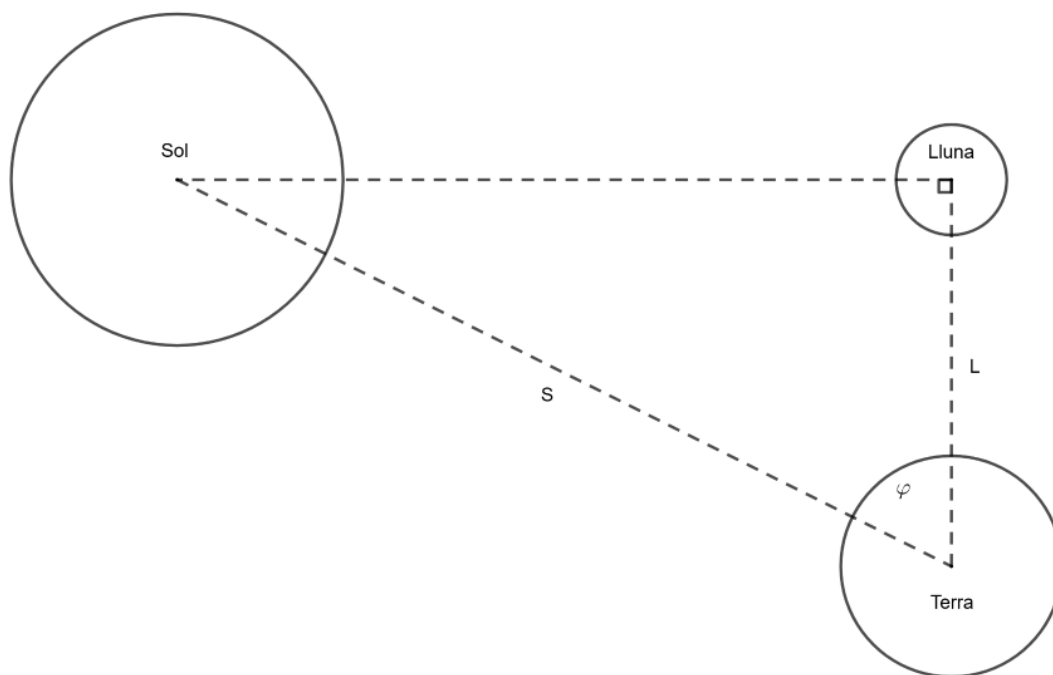
Amb el temps, la trigonometria va transcendir els seus usos inicials en astronomia i navegació per convertir-se en una disciplina central en camps com l'enginyeria, la física i les matemàtiques. Així, el seu naixement i evolució exemplifiquen com les necessitats pràctiques poden inspirar avenços teòrics amb un impacte profund i perdurable.

Conèixer el naixement i l'evolució de la trigonometria a l'aula no només permet entendre l'origen d'una part fonamental de les matemàtiques, sinó que també ajuda a valorar com la ciència és el resultat d'un esforç col·lectiu i cultural al llarg de la història. Aquesta perspectiva humanitza les matemàtiques, mostrant que conceptes abstractes com el sinus o la tangent tenen una història plena de contextos pràctics i errors fascinants que han conduït al progrés. Una activitat interessant podria ser la creació d'una línia del temps col·laborativa en què l'alumnat reculli els aspectes més rellevants de l'origen i evolució de la trigonometria. Podrien destacar figures com Aryabhata i els seus càlculs amb mitjanes-cordes o Edmund Gunter, que va introduir termes com *co.sinus*. Aquesta línia del temps podria complementar-se amb exemples dels contextos històrics en què es van utilitzar aquests avenços, com l'astronomia a l'Índia o la navegació a Europa, i amb reflexions sobre com aquests conceptes s'apliquen avui en dia.

A tall d'ampliació, es recomana la lectura de dues publicacions del grup de treball d'història de l'ABEAM, format, entre d'altres, per M. Rosa Massa i Fàtima Romero Vallhonestà. Els articles en qüestió són [De la geometria a la trigonometria: el teorema de Ptolemeu](#) i [L'ensenyament de la trigonometria: Aristarc de Samos \(310-230 aC\)](#). Ambdós textos ofereixen una perspectiva històrica i didàctica sobre el desenvolupament de la trigonometria, en què destaquen figures clau i els seus mètodes, i són una excel·lent font per aprofundir en els orígens i aplicacions d'aquesta disciplina matemàtica.

LA DISTÀNCIA ENTRE LA TERRA I EL SOL

Al segle III aC, Aristarc de Samos va ser un dels primers científics a intentar mesurar la distància entre la Terra i el Sol. Va basar el seu càlcul en l'observació de la Lluna durant la fase de quart creixent o quart minvant, quan està il·luminada al 50 %. En aquest moment, el triangle format per la Terra, la Lluna i el Sol és un triangle rectangle, ja que la línia que uneix la Terra amb la Lluna és perpendicular a la direcció de la llum solar. Aristarc va mesurar l'angle Lluna-Terra-Sol en aquesta configuració i, combinant-lo amb la distància estimada entre la Terra i la Lluna, va calcular la distància al Sol. Tot i que el mètode era enginyós, la tecnologia limitada de l'època va introduir errors significatius en la mesura de l'angle, la qual cosa va fer que subestimés la distància real.



Font: Elaboració pròpia

En aquesta activitat, l'alumnat revisarà el mètode d'Aristarc utilitzant dades modernes per calcular la distància entre la Terra i el Sol. Mitjançant l'aplicació de raons trigonomètriques, es deduirà aquesta magnitud a partir de la mesura de l'angle Lluna-Terra-Sol i de la distància Terra-Lluna. Posteriorment, es reflexionarà sobre com un petit error en la mesura d'un angle pot amplificar-se de manera significativa en càlculs que impliquen grans escales, com en aquest cas. Aquesta reflexió posarà en evidència la propagació de l'error en el càlcul de magnituds espacials, un repte que Aristarc ja va afrontar i que encara és rellevant en l'astronomia moderna.

Finalment, es debatrà com els avenços tecnològics han permès superar les limitacions del passat, millorant la precisió de les observacions astronòmiques i refinant les nostres estimacions de les distàncies còsmiques. Aquesta activitat no només permet entendre la importància històrica del treball d'Aristarc, sinó que també destaca la rellevància de la precisió en la presa de mesures per obtenir resultats fiables.

Per a més informació, es pot consultar la publicació [Distancia de la Tierra al Sol](#) del Museu Virtual de la Ciència.

#4.MES.ME.F (Relació entre les freqüències relatives i les probabilitats d'esdeveniments en experiments aleatoris connectats amb la geometria. #ALG.PC, #EST.PI)

L'estudi de la [probabilitat geomètrica](#) a 4t d'ESO desperta un gran interès pedagògic gràcies a la seva rica interconnexió amb diversos sentits matemàtics: el sentit espacial, el sentit de la mesura i el sentit estocàstic. Aquest camp, relativament modern dins de la història de les matemàtiques, va sorgir al segle XVIII amb el problema de l'agulla de Buffon, i ha estat desenvolupat per figures destacades com Lluís Antoni Santaló i Sors, matemàtic gironí i referent mundial en aquest àmbit. Aquest enfocament interdisciplinari facilita el desenvolupament de la competència matemàtica 7 (comunicació i representació), essencial per abordar problemes que requereixen representar i interpretar relacions geomètriques en contextos de probabilitat

geomètrica. Tal com destaca Anton Aubanell en el document «Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria» (Aubanell, 2015), activitats basades en l'experimentació –ja sigui física o virtual amb simuladors creats pels mateixos alumnes–, la descoberta, la conceptualització i la formalització o demostració permeten als estudiants viure, en primera persona, l'experiència de construir coneixement geomètric, fomentant un aprenentatge més significatiu i actiu.

LES CORDES QUE ES TALLEN

L'activitat que es proposa es basa en un problema fascinant extret del llibre [Matemática para todos](#) (Paenza, 2017). Aquest autor, conegut pels seus llibres de divulgació matemàtica (premi ICM Leelavati pel seu treball en la divulgació de les matemàtiques), combina problemes aparentment senzills amb reflexions profundes que ens ajuden a veure les matemàtiques des d'una perspectiva diferent.

Paenza presenta el problema amb aquestes paraules:

«Le propongo que piense en este problema que, en principio, pareciera tener una respuesta muy complicada y, sin embargo, no es así. Justamente, es el tipo de situaciones que más me gusta enfrentar, porque uno decididamente aprende el tener que 'mirar' las cosas con una perspectiva diferente.

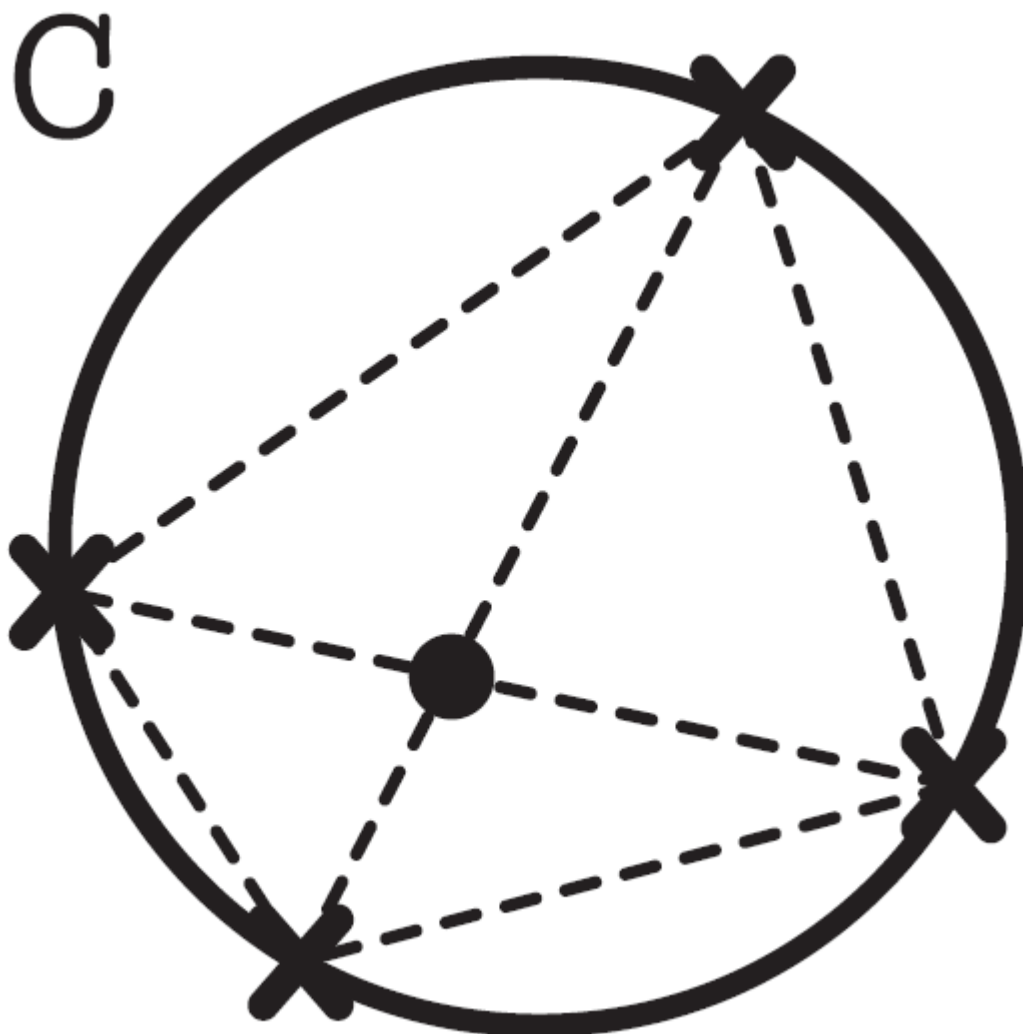
Suponga que tiene dibujado un círculo C. Elija dos puntos cualesquiera en la circunferencia. Trace un segmento que los una (lo que se llama una 'cuerda').

Ahora, elija otro par de puntos cualesquiera en la misma circunferencia. Una vez más, trace la cuerda que los une.

La pregunta es: ¿cuál es la probabilidad de que los dos segmentos se corten 'dentro' del círculo C?

Así como está planteado, parecería como que es imposible de responder, ¿no le parece? Sin embargo, dedíquele un rato y verá que se puede encontrar una forma de pensar o modelar el problema de manera tal de poder encontrar una respuesta».

Aquest problema, aparentment complicat, és una excel·lent oportunitat perquè els alumnes desenvolupin habilitats d'experimentació i modelització matemàtica. Una manera senzilla d'abordar-lo és utilitzar un [simulador](#) creat amb GeoGebra, en què els alumnes puguin generar múltiples exemples de cordes dins d'un cercle i calcular la freqüència relativa dels casos que es tallen ambdues cordes. A través d'aquesta experimentació, es poden establir conjectures i aproximar la resposta.



Font: [Cuerdas que se cruzan](#)

Autor: Augusto Costhanzo

Tal com explica Paenza, la probabilitat que les cordes es tallin dins del cercle és sorprenentment senzilla: $1/3$. Ell mateix ho descriu amb aquestes paraules: «*Moraleja: la probabilidad de que se corten es $1/3$. ¿Bonito, no? E inesperado también, al menos para mí*». La demostració es pot trobar en el mateix llibre a les pàgines 205-206.

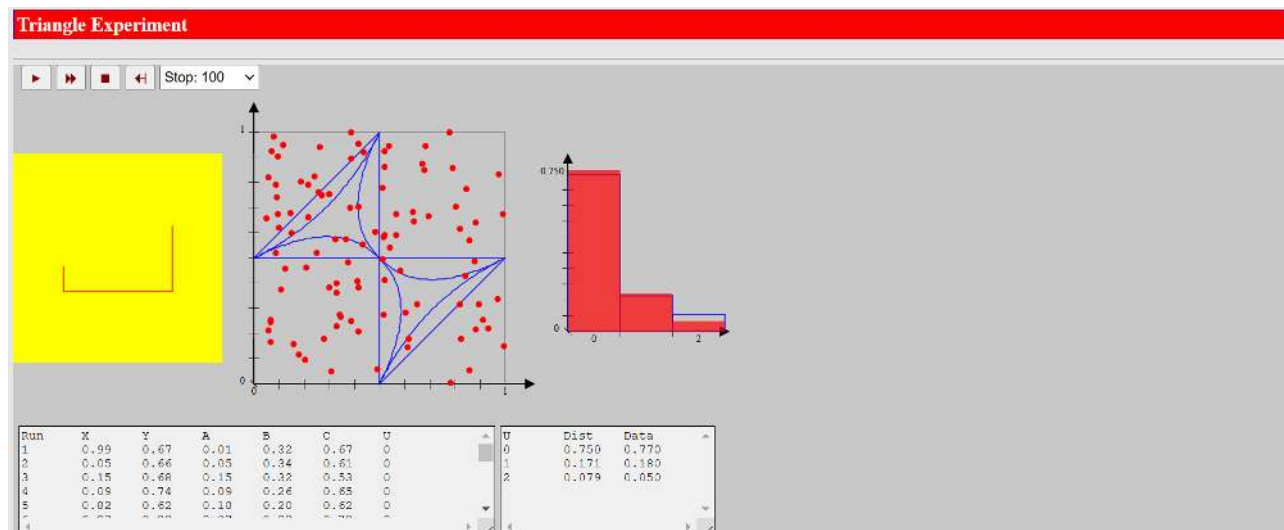
Per als docents i alumnes interessats a aprofundir en aquest i altres problemes, és recomanable consultar els llibres de divulgació d'Adrián Paenza, disponibles en accés obert a través l'espai [Libros de Adrián Paenza](#) de la Universitat de Buenos Aires. Aquests materials constitueixen una base excel·lent per portar problemes interessants i motivadors a l'aula.

TRES TROSSOS D'UN SEGMENT

Aquest problema, d'enunciat aparentment senzill, planteja una qüestió que combina la reflexió matemàtica i la intuïció geomètrica. Imaginem un segment de longitud 1. Si escollim dos punts aleatoris al llarg d'aquest segment i el trenquem en tres parts, quina és la probabilitat que aquests tres trossos formin un triangle? La resolució d'aquesta pregunta, tot i que sembla directa, requereix considerar un concepte clau: la desigualtat triangular. Aquesta estableix que, per formar un triangle, la suma de les longituds de qualsevol parell de costats ha de ser més gran que la del tercer costat.

L'activitat s'inicia amb el plantejament del problema, convidant els alumnes a fer conjetures sobre les condicions necessàries per formar un triangle. Aquesta primera reflexió, feta en petit grup o de manera individual, pot estimular idees inicials que després es validaran o refutaran mitjançant l'experimentació. Per explorar el problema de manera pràctica, es pot guiar els alumnes a crear simulacions utilitzant eines com GeoGebra o llenguatges de programació accessibles com Snap!. Aquest procés els permetrà generar segments aleatoris, comprovar si compleixen la desigualtat triangular i observar patrons en els resultats.

En cas que no sigui viable desenvolupar un simulador propi, es pot utilitzar el recurs en línia titulat [Triangle Experiment](#), que facilita una visualització clara del problema i, a més, permet plantejar qüestions addicionals, com ara la probabilitat que els triangles formats siguin obtusangles o acutangles. Fer el recompte de casos favorables i estudiar-ne les respectives freqüències relatives ha de permetre als alumnes conjeturar sobre els valors de la probabilitat dels esdeveniments estudiats.



Font: [Triangle experiment](#)

Autor: Kyle Siegrist

L'activitat no s'ha de limitar a la resolució inicial del problema. Un cop interioritzats els principis bàsics, es pot ampliar la investigació amb variacions, com ara trencar el segment en quatre parts i explorar les condicions per formar un quadrilàter, o analitzar, en cas que es formi un triangle, la probabilitat que sigui obtusangle o acutangle. Aquestes ampliacions ofereixen noves oportunitats d'experimentació i fomenten «fer matemàtiques».

Aquest problema, tot i la seva aparent senzillesa, és un exemple magnífic per introduir conceptes fonamentals de probabilitat i geometria de manera intuïtiva i pràctica. A més, el simulador descrit abans

forma part d'una [bateria de recursos](#) de la Universitat d'Alabama, que permet proposar altres problemes similars per enriquir l'experiència a l'aula.

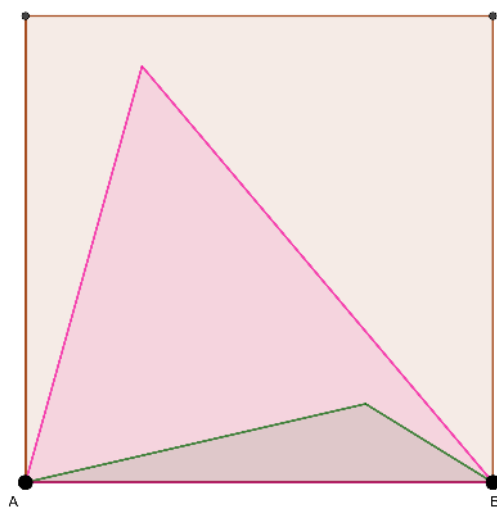
TRIANGLES ACUTANGLES

El recurs proposat explora un problema fascinant i d'enorme potencial didàctic sorgit el 1982, ideat per Glen Hall sota el títol «Acute Triangles in the n-Ball». Aquesta problemàtica, a més de ser destacada en investigacions matemàtiques, és presentada al llibre *El libro de las matemáticas* de Clifford A. Pickover (Pickover, 2011), en què el capítol «Selección de triángulos en una esfera» sintetitza l'essència del problema. Pickover planteja:

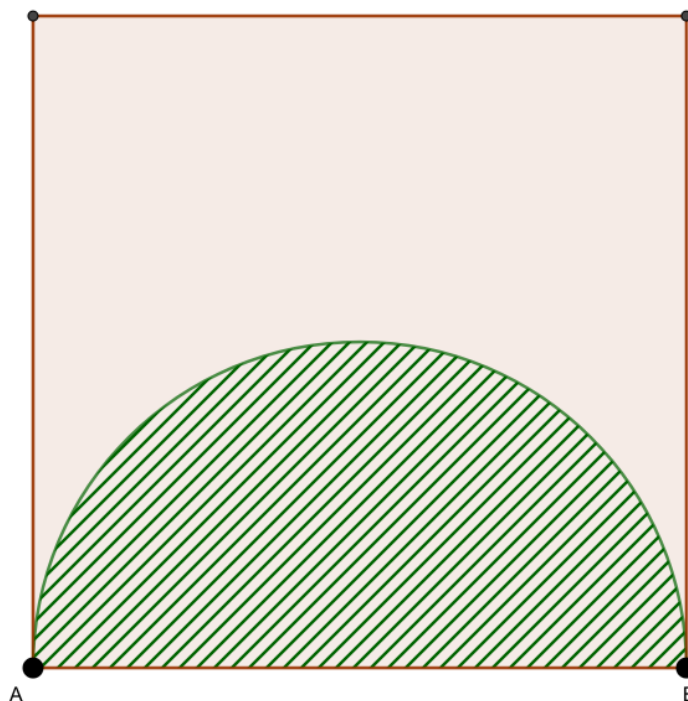
«Imagínes que elige tres puntos de un círculo de forma aleatoria para crear un triángulo. Hall se preguntó cuál sería la probabilidad de obtener un “triángulo agudo”, no solo para triángulos en el interior de un círculo, sino también en dimensiones superiores, como dentro de esferas o hiperesferas».

El problema original, que implica càlculs integrals avançats, pot resultar complex per al nivell de 4t d'ESO, però ofereix un punt de partida ideal per a l'experimentació i la descoberta a través de simuladors creats pels mateixos alumnes. A partir d'aquestes simulacions, l'alumnat pot explorar la distribució de triangles obtusangles i acutangles, fins a arribar a aproximacions de probabilitats sense necessitat de dominar eines matemàtiques avançades. Si es vol aprofundir en el problema original, es pot consultar l'entrada de Wolfram MathWorld titulada [Ball Triangle Picking](#), en la qual es detallen els valors de les probabilitats fins a la dimensió 9.

Però, es pot adaptar aquest problema perquè sigui accessible per a l'alumnat de 4t d'ESO? Una proposta consisteix a substituir la circumferència per un quadrat i fixar dos dels vèrtexs del triangle en dos vèrtexs consecutius del quadrat. L'objectiu seria calcular la probabilitat que, escollint aleatòriament el tercer vèrtex dins del quadrat, el triangle obtingut sigui acutangle. Aquesta versió adaptada permet als alumnes seguir una seqüència d'experimentació, descoberta, conceptualització i, finalment, formalització i demostració mitjançant càlculs assequibles.



Font: Elaboració pròpia



Font: Elaboració pròpia

La representació gràfica de la regió factible (la zona del quadrat on el tercer vèrtex genera un triangle acutangle) resulta especialment reveladora. Aquesta regió està vinculada al concepte d'arc capaç d'una circumferència, establint connexions amb altres sabers geomètrics rellevants i oferint oportunitats per a l'anàlisi i la visualització. El càlcul final de la probabilitat s'obté a partir del quocient entre les àrees de les dues regions (la del quadrat i la regió complementària del semicercle). L'observació de com les freqüències relatives es van ajustant a la probabilitat calculada és clau per treballar el **saber #4.MES.ME.F.**

#4.MES.ME.G (Mesura de la probabilitat d'esdeveniments en experiments aleatoris, tenint en compte la seva independència o incompatibilitat. [ESS] #EST.PI)

En l'estudi de la probabilitat, dos conceptes fonamentals són la independència i la incompatibilitat dels esdeveniments. Dos esdeveniments són independents quan la probabilitat que un esdeveniment ocorri no es veu afectada per l'ocurrència de l'altre, com podria ser el resultat de dues tirades consecutives d'una moneda. D'altra banda, dos esdeveniments són incompatibles quan no poden ocórrer simultàniament, com el fet que una mateixa carta sigui alhora un cor i un trèvol. Entendre aquestes nocions és essencial per abordar càlculs més avançats, com els que impliquen probabilitat condicionada i l'aplicació de la fórmula de Bayes.

Però abans d'endinsar-se en la formalització d'aquests conceptes, és clau posar l'alumnat en contacte amb

situacions reals o simulades que els permetin experimentar i observar patrons. Aquest procés d'experimentació no només facilita la comprensió dels conceptes sinó que també fomenta el raonament crític i la capacitat de fer conjectures. A 4t d'ESO, l'alumnat disposa ja d'una base per entendre les relacions entre esdeveniments, que podrà ampliar en cursos posteriors amb eines més sofisticades per calcular probabilitats en situacions complexes.

NAIXEMENTS

Aquest problema captivador, extret del llibre [Matemagia: problemas y enigmas](#) (Paenza, 2015, pàg. 297-302), explora com la informació prèvia pot influir en la percepció de la probabilitat d'un esdeveniment. Ens situa en un context aparentment senzill, però que genera controvèrsia i desafia la intuïció matemàtica. El plantejament inicial, proposat per Gary Foshee durant una conferència en memòria de Martin Gardner el 4 de juny de 2010, diu:

«Gary Foshee es uno de los más activos generadores de contenidos de matemática recreativa en el mundo. El 4 de junio del año 2010, en una conferencia que se hace cada dos años en Atlanta, Georgia, Estados Unidos, en recuerdo del mítico Martin Gardner, Foshee subió al escenario y propuso pensar el siguiente problema:

Yo tengo dos hijos. Uno de ellos es un varón. Nació un día martes. ¿Cuál es la probabilidad de que yo tenga dos varones?».

Abans d'abordar aquest problema, Paenza suggereix un enunciat més senzill:

«Hablando de controversias, antes de analizar qué respuesta tiene el problema, quiero plantear otro, supuestamente más sencillo y después vuelvo con el anterior.

Alicia tiene dos hijos. Al menos uno de ellos es un varón. ¿Cuál es la probabilidad de que Alicia tenga dos varones?».

En ambdós casos, el repte és comprendre com la informació proporcionada afecta el càlcul de probabilitats. La intuïció sovint ens condueix a errors: al segon enunciat, és fàcil pensar que la probabilitat és $1/2$, mentre que la resposta correcta és $1/3$. En el primer cas, en què es dona la informació addicional que el mascle ha nascut un dimarts, la probabilitat es modifica a $13/27$. Aquesta diferència posa de manifest com petites variacions en les condicions de l'enunciat poden alterar significativament la independència o compatibilitat dels esdeveniments.

Aquest tipus de problemes són ideals per fomentar l'anàlisi crítica i el raonament matemàtic. A l'aula, es pot començar plantejant als alumnes el problema més senzill per explorar les seves intuïcions inicials i, després, guiar-los en la creació de simuladors. Per exemple, amb llenguatges com Python o Snap!, es poden generar famílies aleatòries de dos fills, assignant el sexe de cadascun i dies de naixement. Aquesta simulació permet comptabilitzar les freqüències relatives dels casos en què es compleixen les condicions inicials, ajudant els estudiants a conjecturar i verificar les solucions.

És crucial assegurar que els simuladors siguin rigorosos en la definició de les condicions inicials, especialment en el segon problema. Aquí, l'associació del dia de la setmana amb el sexe dels fills introdueix una nova dimensió que cal gestionar amb cura. Aquesta reflexió ajuda a consolidar la comprensió de la probabilitat condicionada i l'efecte de la informació prèvia sobre la independència dels resultats.

Per als docents i alumnes interessats a aprofundir en aquest i altres problemes, és recomanable consultar els llibres de divulgació d'Adrián Paenza, disponibles en accés obert a través de l'espai [Libros de Adrián Paenza](#) de la Universitat de Buenos Aires. Aquests materials constitueixen una base excel·lent per portar problemes interessants i motivadors a l'aula.

EL JOC DE PENNEY

El joc de Penney, concebut per Walter Penney el 1974, és un captivador joc de probabilitats basat en les cares i creus d'una moneda. En aquest joc, dos jugadors trien seqüències de tres resultats possibles (com ara C-C-X o X-C-C). Posteriorment, es llença una moneda repetidament i es registren els resultats, fins que apareix una de les seqüències triades. Sorprenentment, la probabilitat de guanyar no és simètrica: algunes seqüències són més probables que altres, encara que aparentment totes semblin tenir la mateixa oportunitat.



Font: [El joc de Penney](#)

Autor: Joan Jareño

Per entendre millor el fenomen, és imprescindible partir de l'experimentació. Es pot iniciar amb una versió física del joc, llançant monedes repetidament i registrant els resultats per determinar quines seqüències apareixen primer. A mesura que s'acumulen dades, es pot introduir un simulador (com el suggerit en l'entrada del bloc [Calaix +ie](#) d'en Joan Jareño), que permetrà realitzar partides contra la màquina i observar els patrons de victòries. Encara més enriquidor és que els alumnes creïn els seus propis simuladors, utilitzant eines de programació com Snap!, un entorn de programació per blocs especialment adequat per a l'alumnat de 4t d'ESO. Aquesta activitat els ajudarà a analitzar les freqüències relatives dels esdeveniments i a formular conjectures sobre el comportament del joc.

Per a una visió detallada de com portar aquesta proposta a l'aula, recomanem consultar la contribució de Joan Jareño a l'entrada esmentada. La seva proposta pedagògica ofereix orientacions clares i concretes per treure el màxim partit d'aquest recurs, apropant l'alumnat als conceptes de probabilitat i independència d'una manera motivadora i pràctica.

El joc de Penney és un recurs excel·lent per treballar el **saber #4.MES.ME.G**, que tracta de la mesura de probabilitats en experiments aleatoris, tenint en compte la seva independència. En explorar com les seqüències triades interactuen i com aquesta dependència afecta les probabilitats, els alumnes poden comprendre millor com les condicions prèvies modifiquen els resultats. Això no només amplia els seus coneixements matemàtics, sinó que també enforteix la seva capacitat d'analitzar situacions complexes amb rigor i creativitat.

Estimació i relacions

Sabers

- Estimació de longituds i angles a partir de l'experiència o dels atributs d'altres objectes. **[ESS]**
- Coneixement i ús de l'error absolut i relatiu per convenir i adequar la precisió dels resultats en situacions de mesura. **[ESS]** **#NUM.QU**
- Formulació de conjectures sobre l'anàlisi de la incertesa associada a un fenomen aleatori, basant-nos en l'estimació i l'experimentació. **#EST.PI**

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

L'estimació i les relacions constitueixen un pilar fonamental en el desenvolupament de les competències matemàtiques a 4t d'ESO. En aquest darrer curs de secundària, el treball amb aquests sabers esdevé més profund i específic, tot promovent la capacitat d'analitzar situacions complexes en què la incertesa, l'error i la precisió tenen un paper decisiu. Aquest bloc convida l'alumnat a reflexionar sobre la naturalesa de les mesures, les seves limitacions i la rellevància de comprendre i gestionar els errors associats. Això no només reforça la seva competència matemàtica, sinó també el prepara per prendre decisions basades en dades aproximades, un aspecte crucial en contextos acadèmics i professionals futurs.

El treball d'estimació i relacions permet connectar el raonament matemàtic amb experiències quotidianes, destacant la utilitat pràctica de les matemàtiques en la presa de decisions informades. A més, en aquest bloc es fomenta una actitud crítica i reflexiva envers les dades i convida els estudiants a validar els resultats obtinguts i a considerar les implicacions dels errors, ja sigui en experiments físics, en situacions aleatòries o en l'àmbit de les mesures geomètriques. Aquest enfocament holístic ajuda a desenvolupar una visió matemàtica integrada i significativa.

Comentaris sobre les connexions

Les connexions internes a les matemàtiques en aquest bloc són especialment riques i transversals. Amb el sentit numèric, s'estableix un vincle estret a través del coneixement i ús de l'error absolut i relatiu (**saber #4.MES.ER.B**), aspecte clau per analitzar la precisió dels resultats. El sentit estocàstic hi contribueix mitjançant l'anàlisi d'incertesa i la formulació de conjectures (**saber #4.MES.ER.C**), fet que proporciona una comprensió profunda dels fenòmens aleatoris. Finalment, el sentit espacial apareix de forma repetida entorn a tots els sabers del bloc.

Quant a les connexions externes, destaca l'aplicació d'aquests sabers en disciplines com la física, en què és essencial comprendre la precisió i la incertesa en mesuraments experimentals, i la química, en la qual el càlcul d'aproximacions i errors resulta determinant. A més, la tecnologia aporta eines digitals que faciliten l'estimació i l'anàlisi de dades, situant l'aprenentatge matemàtic en un context interdisciplinari i proper a la realitat de l'alumnat.

Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

En primer lloc, l'estimació de longituds i angles a partir de l'experiència o dels atributs d'altres objectes és un saber clau perquè desenvolupa en l'alumnat una intuïció matemàtica. Aquesta habilitat és fonamental en situacions reals, on sovint no es disposa d'eines de mesura precises i cal prendre decisions basades en aproximacions raonades.

En segon lloc, el coneixement i ús de l'error absolut i relatiu per convenir i adequar la precisió dels resultats en situacions de mesura és essencial per promoure una comprensió crítica dels resultats matemàtics. Aquest saber permet a l'alumnat analitzar la qualitat i la fiabilitat de les dades, així com ajustar el nivell de precisió en funció de les necessitats específiques de cada situació.

Recursos i activitats

Recursos i activitats per treballar sabers concrets

#4.MES.ER.A (Estimació de longituds i angles a partir de l'experiència o dels atributs d'altres objectes. [ESS])

El treball del **saber #4.MES.ER.A** s'ha d'entendre com una continuïtat del que s'ha anat fent durant els cursos anteriors de l'ESO. Aquest procés sorgeix de l'experiència quotidiana i de la comparació amb atributs d'objectes coneguts, fet que genera un bagatge visual i intuïtiu que facilita el treball més formal en geometria. Al llarg dels primers cursos de l'ESO, l'alumnat ha dut a terme activitats per reconèixer magnituds de manera visual i contextual, construint una base sòlida que ara es projecta cap a l'anàlisi més rigorosa i les relacions trigonomètriques.

El treball d'aquest saber a 4t d'ESO ha de vincular-se amb dos sabers clau que amplien les seves aplicacions pràctiques i conceptuals. D'una banda, el **saber #4.MES.ME.A** introdueix una unitat angular més directa i intuïtiva, que facilita la comprensió de la relació entre les amplituds angulars i les longituds d'arcs de circumferència. És especialment rellevant que el radian sigui una unitat derivada del sistema internacional, i l'única adimensional. Aquest fet reforça la seva importància com a unitat angular universal i facilita connexions amb altres disciplines científiques com la física i la tecnologia.

D'altra banda, la selecció i ús d'instruments i unitats adequades per mesurar angles, longituds o distàncies proporciona una base imprescindible per validar les estimacions inicials fetes de manera visual o intuïtiva. Aquest procés connecta directament amb l'estimació, ja que l'ús d'instruments, com transportadors, regles o eines digitals, permet contrastar i millorar la precisió de les estimacions. Això facilita una progressió natural des de l'observació qualitativa fins a la quantificació precisa, incorporant el rigor matemàtic i desenvolupant l'autonomia de l'alumnat per aplicar aquestes tècniques en situacions pràctiques i contextuals.

Aquest saber pren una importància especial a 4t d'ESO, ja que s'enllaça amb l'eix central del treball en el sentit de la mesura: la comprensió de les relacions entre les amplituds d'angles i les longituds dels costats en triangles rectangles. Aquesta relació, que culmina amb l'aplicació de les funcions trigonomètriques, requereix una estimació inicial precisa per validar els resultats obtinguts en càlculs posteriors. L'estimació, per tant, no només és una habilitat pràctica, sinó també un element clau per interpretar i contrastar situacions reals.

#4.MES.ER.B (Coneixement i ús de l'error absolut i relatiu per convenir i adequar la precisió dels resultats en situacions de mesura. [ESS] #NUM.QU)

El treball del **saber #4.MES.ER.B** és especialment rellevant quan es tracta conjuntament amb altres sabers del bloc de Mesurament (**#4.MES.ME**). La necessitat d'entendre i aplicar l'error absolut i relatiu no només millora la precisió en els resultats, sinó que també ajuda l'alumnat a comprendre la importància de la mesura i els seus límits en diversos contextos matemàtics i pràctics.

Aquest saber es connecta clarament amb altres sabers del bloc:

- Amb **#4.MES.ME.B**, ja que la selecció i l'ús adequat d'instruments de mesura, tant analògics com digitals, està directament relacionada amb la precisió de les dades obtingudes. Treballs de camp o experiments requereixen comprendre les limitacions dels instruments utilitzats i considerar la precisió en funció del context.
- Amb **#4.MES.ME.C**, en què les raons invariants entre els costats dels triangles rectangles semblants prenen protagonisme. A través de la proposta de treball associada al llibre de Puig Adam, es posa de manifest que l'exactitud de les mesures inicials i dels càlculs posteriors és essencial per garantir resultats coherents.

- Amb **#4.MES.ME.D**, que implica la resolució de problemes utilitzant les raons trigonomètriques. Activitats com Mallorca a la vista! i Una suma d'angles mostren clarament la importància de tenir en compte la precisió de les dades inicials i com l'error es pot propagar en els càlculs posteriors.
- Amb **#4.MES.ME.E**, a través de l'estudi històric de l'origen i l'ús de la trigonometria. Un recurs com La distància entre la Terra i el Sol permet entendre com la gestió de l'error en els càlculs ha estat crucial des de les primeres estimacions de distàncies astronòmiques. L'error en les mesures inicials i les simplificacions aplicades han influït directament en la propagació d'errors en els resultats finals, mostrant la rellevància d'aquest concepte en el desenvolupament de les matemàtiques.

Per concloure, aquest saber es vincula directament amb la competència específica CE 8, que destaca la importància d'identificar i gestionar les emocions associades a l'error, afrontant-lo no com un obstacle, sinó com una oportunitat per aprendre i créixer.

#4.MES.ES.C (Formulació de conjectures sobre l'anàlisi de la incertesa associada a un fenomen aleatori, basant-nos en l'estimació i l'experimentació. #EST.PI)

El **saber #4.MES.ES.C**, tot i formar part del sentit de la mesura, estableix una connexió molt evident amb el sentit estocàstic, ja que treballa conceptes clau relacionats amb la incertesa. Aquesta relació fa que el saber sigui especialment rellevant per abordar situacions en què l'experimentació i l'anàlisi de dades aleatòries són essencials per superar les limitacions de la intuïció i arribar a conclusions rigoroses.

És especialment enriquidor abordar aquest saber seguint les quatre fases metodològiques proposades en les «Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria» (Aubanell, 2015): Experimentació, Descoberta, Conceptuació i Formalització o Demostració, si s'escau. Aquest enfocament permet guiar l'alumnat en un procés estructurat i reflexiu, afavorint l'aprenentatge significatiu i el desenvolupament de competències matemàtiques clau. La fase d'experimentació és fonamental per explorar la naturalesa de la incertesa, ja sigui a través de simulacions digitals, experiments físics o combinant ambdues tècniques. Aquesta primera etapa ajuda a contrarestar idees preconcebudes o intuïcions errònies i posa les bases per a una comprensió més rigorosa.

El saber es beneficia d'una integració amb altres sabers del bloc de Mesurament, especialment aquells relacionats amb la probabilitat. Dos exemples que mostren aquesta connexió són:

- El **saber #4.MES.ME.F** explora la relació entre les freqüències relatives i les probabilitats d'esdeveniments en experiments aleatoris amb connexió geomètrica. Aquesta relació fomenta una comprensió més profunda de com es vinculen els resultats experimentals amb les prediccions teòriques.
- El **saber #4.MES.ME.G** aborda la mesura de la probabilitat d'esdeveniments, tenint en compte la seva independència o incompatibilitat. Treballar aquests sabers conjuntament permet a l'alumnat aprofundir en els conceptes fonamentals de la probabilitat i alhora desenvolupar eines pràctiques per analitzar situacions reals o abstractes amb més precisió.

En ambdós casos, l'experimentació física i l'ús de simuladors són eines poderoses per consolidar aprenentatges. A través de programes creats per l'alumnat o disponibles en línia, es poden dissenyar activitats interactives que permetin observar patrons, validar conjectures i millorar la comprensió dels fenòmens aleatoris.

Blocs de competències: processos matemàtics i gestió socioemocional

El conjunt de sabers que constitueixen el sentit de la mesura, com tots els altres sentits, s'han de relacionar amb el conjunt de competències del currículum. Sense un coneixement dels sabers difícilment es poden desenvolupar els processos per avançar en l'assoliment de les competències i, d'altra banda, la manera com

s'introdueixen, es construeixen i s'utilitzen els sabers és clau per elaborar un treball competencial.

Així doncs, tots els sabers poden contribuir a desenvolupar qualsevol competència si es treballen en activitats adequades. Igualment, un saber pot contribuir a desenvolupar diverses competències.

Es presenta la relació entre els sentits i les competències específiques a través dels processos: Resolució de problemes (competències específiques CE 1 i CE 2), Raonament i prova (competències específiques CE 3 i CE 4), Connexions, on distingim les internes (competència específica CE 5) i les externes (competència específica CE 6), Comunicació i representació (competència específica CE 7) i Gestió socioemocional (competències específiques CE 8 i CE 9).

Aquesta relació, pel que fa al sentit de la mesura, es concreta, en el marc d'aquest exemple, de la manera que es descriu en els apartats següents, tot i que poden existir altres anàlisis igualment vàlides.

Resolució de problemes (CE 1 i CE 2)

Treballar el sentit de la mesura a 4t d'ESO implica abordar reptes que afavoreixin una connexió més profunda entre els continguts matemàtics i situacions de la vida real. En aquest nivell, el bloc de Resolució de problemes posa un èmfasi especial en l'ús d'eines matemàtiques com les raons trigonomètriques, que permeten resoldre situacions complexes relacionades amb triangles rectangles i figures geomètriques. A través d'aquest enfocament, l'alumnat pot explorar aplicacions pràctiques de la trigonometria per consolidar-ne la comprensió i ampliar-ne l'ús més enllà de la teoria.

A més, investigar l'origen i l'evolució de la trigonometria aporta una perspectiva històrica que enriqueix l'aprenentatge. Aquest enfocament interdisciplinari permet als estudiants apreciar com aquestes eines matemàtiques han sorgit i evolucionat per resoldre problemes pràctics al llarg del temps, destacant-ne la rellevància cultural i científica.

Finalment, situacions en què cal justificar resultats i analitzar errors promouen la reflexió crítica i el debat entre iguals, oferint espais per explorar diferents estratègies i prendre consciència de la precisió i les limitacions dels càlculs. Aquesta manera de treballar fomenta no només la comprensió matemàtica, sinó també una actitud proactiva i rigorosa en la resolució de problemes, clau per a futurs desafiaments acadèmics i professionals.

Sabers

Alguns sabers d'aquest sentit fan referència directa al procés de resolució de problemes. Per exemple:

- El **saber #4.MES.ME.D** no només consolida la comprensió de les relacions geomètriques, sinó que també facilita l'aplicació de la trigonometria a situacions pràctiques, com la determinació d'alçades, distàncies i inclinacions. Això permet a l'alumnat desenvolupar estratègies rigoroses per abordar problemes complexos, connectant conceptes teòrics amb solucions adaptades als contextos proposats.
- El **saber #4.MES.ME.E** ofereix a l'alumnat l'oportunitat d'investigar l'origen i la història de la trigonometria, destacant-ne el paper fonamental en l'evolució del pensament matemàtic i científic. Aquesta perspectiva històrica permet comprendre com les eines trigonomètriques han estat desenvolupades per resoldre problemes pràctics en contextos com la navegació, l'astronomia i l'arquitectura. A més, aquesta investigació contribueix a valorar les matemàtiques com una disciplina dinàmica i interdisciplinària, fomentant l'interès de l'alumnat per explorar-ne les aplicacions i implicacions en diferents àmbits.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers fan referència directa al procés de resolució de problemes. Per exemple:

- A l'activitat Mallorca a la vista!, vinculada al saber **#4.MES.ME.D**, es planteja un repte basat en un context real: esbrinar si és visible l'illa de Mallorca des d'un punt determinat de la costa catalana. Mitjançant l'ús de les raons trigonomètriques, els alumnes han de determinar aquesta distància tenint en compte la curvatura terrestre i altres variables.
- L'activitat Una suma d'angles, vinculada al saber **#4.MES.ME.D**, planteja un exercici d'exploració matemàtica sobre la suma dels angles α , β i γ , que es calcula aproximadament utilitzant les raons trigonomètriques en tres triangles rectangles. Aquesta activitat permet treballar conceptes com la semblança de triangles i la invariància de les raons trigonomètriques, connectant el càlcul pràctic amb una fonamentació matemàtica elegant.

Raonament i prova (CE 3 i CE 4)

El bloc de competències de raonament i prova en el nivell de 4t d'ESO posa l'accent en la deducció de relacions matemàtiques a partir de l'anàlisi i l'argumentació rigorosa. Aquest enfocament no només permet consolidar coneixements adquirits en cursos anteriors, sinó que també obre la porta a una comprensió més abstracta i profunda de conceptes com la proporcionalitat geomètrica, les unitats de mesura d'angles i les relacions trigonomètriques. A través de l'ús d'eines tecnològiques, materials manipulatius i situacions contextualitzades, l'alumnat desenvolupa la capacitat de formular conjectures, validar-les mitjançant demostracions i connectar-les amb aplicacions pràctiques en àmbits com la física o la tecnologia.

En aquest nivell, es dona una especial importància al procés d'exploració i descobriment, promovent l'autonomia en el raonament i la creativitat en la resolució de problemes. Aquest procés es veu reforçat per l'anàlisi de situacions complexes que impliquen la mesura directa i indirecta, la comparació entre diferents unitats, i l'ús d'eines trigonomètriques per obtenir solucions precises i raonades. A més, el treball interdisciplinari esdevé un pilar fonamental, destacant com els conceptes matemàtics contribueixen a interpretar i resoldre situacions en contextos quotidians.

Sabers

Alguns sabers d'aquest sentit fan referència directa al procés de raonament i prova. Per exemple:

- El **saber #4.MES.MA.A** facilita que l'alumnat compregui i utilitzi factors de conversió entre diferents unitats angulars, destacant la introducció del radian com a unitat internacional de mesura. Aquest treball permet desenvolupar raonaments lògics i rigorosos, alhora que potencia la capacitat d'establir equivalències entre graus i radians.
- El **saber #4.MES.ME.A** permet que l'alumnat descobreixi el radian com a unitat de mesura angular a través de l'exploració de la proporcionalitat geomètrica. Aquest procés facilita que els estudiants compreguin les relacions entre la longitud d'un arc i el radi de la circumferència, afavorint el desenvolupament de raonaments inductius.
- El **saber #4.MES.ME.D** ofereix a l'alumnat l'oportunitat d'aplicar les raons trigonomètriques en la resolució de problemes contextualitzats. Aquesta aplicació facilita la connexió entre conceptes teòrics i situacions pràctiques, com el càlcul de longituds, alçades o àrees en triangles i polígons. A més, potencia el desenvolupament del raonament deductiu, ja que requereix la justificació de les estratègies utilitzades i la validació dels resultats obtinguts.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers fan referència directa al procés de raonament i prova. Per exemple:

- El recurs Comparació de mesures angulars ubicat en el saber **#4.MES.MA.A** permet que l'alumnat analitzi i interpreti les relacions entre graus i radians. Aquest fet els ajuda a construir arguments matemàtics sòlids per justificar conversions entre unitats angulars. Mitjançant l'ús d'eines com GeoGebra i altres materials manipulatius, s'estimula la capacitat de validar conjectures i estructurar raonaments rigorosos i comprensibles.
- L'activitat Una suma d'angles del **saber #4.MES.ME.D** potencia el raonament deductiu i la prova, plantejant un repte que exigeix calcular la suma exacta d'angles a partir de propietats geomètriques. En abordar aquest càlcul mitjançant raons trigonomètriques, és probable que l'alumnat obtingui un valor aproximat, fet que obre la porta a parlar de la precisió dels resultats. Les demostracions visuals, com les proposades per Roger Nelsen, promouen una comprensió intuïtiva i rigorosa de les relacions trigonomètriques en triangles semblants i faciliten l'elaboració d'explicacions coherents i la connexió entre conceptes teòrics i aplicacions pràctiques.

Connexions amb altres parts de la matemàtica (CE 5)

Les connexions entre el sentit de la mesura i altres àmbits de les matemàtiques continuen sent essencials a 4t d'ESO, especialment en activitats que combinen el sentit estocàstic amb eines de mesura i geometria. En aquest nivell, cal posar l'accent en la relació entre freqüències relatives, probabilitats i independència d'esdeveniments, la qual cosa genera un pont directe amb conceptes de probabilitat i estadística. Això es manifesta, per exemple, en experiments aleatoris on l'espai de successos està vinculat a la geometria, com en la probabilitat geomètrica o en el càlcul de probabilitats en regions espacials.

D'altra banda, el desenvolupament de simulacions mitjançant eines digitals, vinculades al pensament computacional (**#ALG.PC**), és fonamental per aprofundir en aquests sabers. L'ús de simuladors permet recrear i analitzar un gran nombre d'experiments aleatoris de manera sistemàtica, fet que afavoreix l'exploració de patrons i l'obtenció de resultats estadísticament significatius.

Aquest tipus d'activitats contribueixen a la construcció d'una visió integrada de les matemàtiques i ajuda l'alumnat a comprendre com sabers diferents convergeixen per donar resposta a situacions complexes. A través de les connexions entre la mesura, la probabilitat i el pensament computacional, es potencia el desenvolupament d'una comprensió profunda i global de les matemàtiques i fomenta la creació d'estratègies diverses i efectives per a la resolució de problemes.

Sabers

Alguns sabers treballats en el sentit de la mesura estan molt presents en tota la matemàtica, esdevenen eixos de connexió interna i, per tant, són peces fonamentals en el desenvolupament de la competència CE 5:

- El **saber #4.MES.ME.F** permet establir vincles significatius entre el sentit de la mesura i el sentit estocàstic. Aquesta connexió és especialment rellevant en situacions en què la probabilitat geomètrica té un paper central, com en l'estudi de regions espacials que defineixen successos. L'ús de simuladors, amb el suport del pensament computacional, facilita l'exploració de nombrosos experiments i l'anàlisi d'esdeveniments aleatoris, reforçant les connexions entre la geometria i la probabilitat.
- El **saber #4.MES.ME.G** enriqueix les connexions entre el sentit de la mesura i el sentit estocàstic, promovent una comprensió més profunda d'aquests conceptes. Aquest saber impulsa l'aplicació de

conceptes estadístics per calcular la freqüència relativa associada a un succés i analitzar la interacció entre esdeveniments independents o incompatibles, fet que reforça la capacitat de vincular els fonaments de la probabilitat amb problemes pràctics i situacions quotidianes.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers aporten o utilitzen connexions internes. Per exemple:

- L'activitat Les cordes que es tallen enllaça el **saber #4.MES.ME.F** amb el desenvolupament del sentit estocàstic a través de la modelització i l'experimentació. Utilitzant simulacions amb GeoGebra, l'alumnat pot explorar la freqüència relativa de successos geomètrics, com la intersecció de cordes dins d'un cercle, i establir vincles entre les dades experimentals i els principis de probabilitat.
- L'activitat Tres trossos d'un segment connecta el **saber #4.MES.ME.F** amb l'anàlisi de probabilitats en contextos geomètrics i fomenta la comprensió de conceptes com la desigualtat triangular a través de l'experimentació. Mitjançant simulacions amb GeoGebra o eines com Snap!, els alumnes poden calcular la freqüència relativa d'esdeveniments favorables i explorar patrons en els resultats, establint relacions entre mesures geomètriques i probabilitat.
- El recurs Triangles acutangles connecta el **saber #4.MES.ME.F** amb l'experimentació geomètrica i l'anàlisi de freqüències relatives. Mitjançant la representació gràfica de regions factibles i l'ús de simulacions, l'alumnat desenvolupa la capacitat d'investigar la probabilitat associada a esdeveniments geomètrics i d'establir connexions amb altres sabers com l'arc capaç.

Connexions amb altres matèries i amb l'entorn (CE 6)

El sentit de la mesura transcendeix el camp de les matemàtiques i es desplega en disciplines diverses, la qual cosa genera connexions valuoses que enriqueixen l'aprenentatge. Comprendre com se seleccionen i utilitzen els instruments de mesura en diferents contextos, així com el paper que aquests han tingut al llarg de la història, permet establir ponts amb matèries com la física, la tecnologia o la història de la ciència. Aquest enfocament integrador contribueix a donar un significat més ampli i profund als conceptes matemàtics, apropant-los a situacions reals i als interessos de l'alumnat.

L'ús d'instruments de mesura, ja siguin analògics o digitals, per calcular angles, longituds i distàncies, obre la porta a un aprenentatge aplicat en múltiples camps. Per exemple, en la física, la mesura precisa d'angles i longituds és essencial en l'estudi del moviment i les forces. En la tecnologia, la precisió en la mesura de distàncies té un paper fonamental en la fabricació i el disseny d'objectes. Aquest procés d'aplicació pràctica del saber matemàtic en reforça la rellevància i fa visible com la trigonometria, més enllà de ser una eina matemàtica, és una part integrant de la construcció del coneixement científic i tècnic.

A més, la investigació de l'origen i l'ús de la trigonometria al llarg de la història ens revela com les necessitats pràctiques –com la navegació, l'astronomia, la cartografia o l'arquitectura– han impulsat el desenvolupament d'aquesta branca de les matemàtiques. Estudiar aquestes connexions històriques no només situa la trigonometria en el context del seu temps, sinó que també ajuda a establir relacions entre la seva evolució i els avenços tecnològics que han influït en el progrés de la societat.

Sabers

A continuació s'indiquen, a tall d'exemple, alguns d'aquests sabers:

- El treball del **saber #4.MES.ME.B** afavoreix el desenvolupament de la competència vinculada a les connexions amb altres matèries i amb l'entorn mitjançant l'ús d'instruments i unitats adequades en situacions trigonomètriques reals. Aquesta pràctica consolida habilitats transversals, com la presa i

l'anàlisi de dades, essencials en disciplines com la física i la tecnologia.

- El treball del **saber #4.MES.ME.E** potencia la competència en connexions amb altres matèries i amb l'entorn mitjançant l'exploració històrica i cultural de la trigonometria. Aquesta perspectiva enllaça les matemàtiques amb disciplines com l'astronomia i la navegació, alhora que fomenta la comprensió de la ciència com un procés col·lectiu, històric i interdisciplinari.

Recursos

Molts dels recursos descrits per treballar diferents sabers del sentit de la mesura ofereixen oportunitats per fer connexions externes. Per exemple:

- L'activitat L'escaire i el cartabó, que exemplifica el **saber #4.MES.ME.C**, contribueix a la millora de la competència en connexions matemàtiques i amb l'entorn en integrar conceptes geomètrics i trigonomètrics amb instruments quotidians de mesura i dibuix. A través de l'estudi de les relacions entre les longituds dels costats d'aquests estris, l'alumnat comprèn les raons trigonomètriques bàsiques de manera visual i pràctica, alhora que estableix vincles entre la geometria clàssica i la trigonometria aplicada, fet que afavoreix una comprensió més profunda i significativa dels conceptes matemàtics.
- L'activitat Mallorca a la vista!, vinculada al **saber #4.MES.ME.D**, contribueix a la competència de connectar les matemàtiques amb altres matèries i amb l'entorn, ja que integra conceptes trigonomètrics amb coneixements físics, com la curvatura de la Terra, i amb aplicacions reals en la cartografia. En abordar un problema pràctic sobre la visibilitat de Mallorca des de la costa catalana, els alumnes treballen el modelatge matemàtic vinculat al món natural, alhora que comprenen com la trigonometria ha estat històricament fonamental en disciplines com la geografia, l'astronomia i la navegació.
- L'activitat La distància entre la Terra i el Sol, associada al **saber #4.MES.ME.E**, millora l'adquisició de la competència de «Connexions amb altres matèries i amb l'entorn» en diversos aspectes. En primer lloc, vincula conceptes trigonomètrics amb la història de l'astronomia, destacant la rellevància del mètode científic en l'antiguitat. En segon lloc, permet explorar la interrelació entre les matemàtiques i l'astronomia moderna, evidenciant com els avenços tecnològics han refinat els càlculs d'Aristarc per a l'estimació de grans distàncies còsmiques.

Totes aquestes activitats contribueixen al desenvolupament de la competència CE 6.

Comunicació i representació (CE 7)

La comunicació i la representació són eines fonamentals per estructurar i transmetre el pensament matemàtic, especialment en el context del mesurament. Aquestes habilitats permeten que l'alumnat interpreti i expressi conceptes matemàtics amb claredat, tant de forma individual com col·lectiva. La capacitat per comunicar amb precisió dades, càlculs i conclusions, ja sigui mitjançant llenguatge escrit, esquemes visuals o eines digitals, facilita l'intercanvi d'idees i la resolució de problemes amb un enfocament col·laboratiu. Les representacions gràfiques, com esbossos, taules o diagrames, són essencials per donar suport al procés de resolució, mentre que l'ús de programes de simulació i instruments avançats de mesura amplia les possibilitats d'anàlisi i reflexió.

La representació precisa de les dades no només ajuda a evitar errors de càlcul, sinó que també fomenta una comprensió més profunda de les relacions entre les mesures. A més, l'ús correcte de la notació, els símbols i les unitats adequades és un requisit imprescindible per interpretar correctament els resultats i comunicar-los amb rigor científic. És a través d'aquests processos de comunicació i representació que l'alumnat pot construir significat, establir connexions amb altres disciplines i participar activament en la resolució de problemes.

Sabers

Alguns sabers del sentit de la mesura poden contribuir de manera especial al desenvolupament de la competència CE 7. Per exemple:

- El saber **#4.MES.ME.B** promou l'ús adequat d'instruments de mesura, com el goniòmetre o el clinòmetre, i la selecció d'unitats adequades per mesurar angles i distàncies en situacions trigonomètriques, la qual cosa contribueix directament a la competència de comunicació i representació. La manipulació d'aquests instruments exigeix registrar i interpretar dades amb precisió, utilitzant un llenguatge tècnic rigorós i representacions gràfiques clares, com taules o esquemes. Aquest procés no només facilita la comprensió i la transmissió de la informació, sinó que també fomenta una comunicació matemàtica precisa i l'habilitat per representar de manera efectiva els resultats obtinguts, aspectes fonamentals per treballar de forma col·laborativa i interdisciplinària.
- El saber **#4.MES.ME.C** permet desenvolupar la competència de comunicació i representació a través de l'observació i anàlisi de les raons invariants entre els costats dels triangles rectangles semblants, també conegudes com a raons trigonomètriques. Treballar aquestes proporcions implica justificar-les mitjançant el teorema de Tales i representar les relacions entre angles i longituds de manera gràfica i numèrica. Aquesta tasca requereix registrar resultats amb precisió, interpretar taules i patrons, i comunicar conclusions utilitzant un llenguatge matemàtic rigorós. Així, l'alumnat no només comprèn millor el sentit de les raons trigonomètriques, sinó que també millora les seves habilitats per expressar i transmetre coneixements matemàtics, aspecte clau per resoldre problemes reals i col·laborar en contextos interdisciplinaris.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers del sentit de la mesura fan referència al procés de comunicació i representació. Per exemple:

- El recurs [Equivalència entre graus i radians](#), vinculat al saber **#4.MES.MA.A**, constitueix un excel·lent vehicle per potenciar la competència de comunicació i representació en l'àmbit matemàtic, ja que afavoreix tant la comprensió conceptual com l'expressió precisa de les unitats angulars. Mitjançant activitats que impliquen la conversió entre graus, minuts i segons, així com entre graus i radians, l'alumnat desenvolupa habilitats per representar les mesures angulars en diferents formats i comunicar els seus raonaments de manera rigorosa i efectiva. A més, recursos com el full de treball creat en l'entorn de GeoGebra per Manel Martínez no només faciliten la comprensió visual dels angles i la seva ubicació a la circumferència goniomètrica, sinó que també enforteixen l'ús combinat del llenguatge gràfic i numèric en la resolució de problemes.
- L'activitat Què és un radian?, vinculada al saber **#4.MES.ME.A**, és un excel·lent recurs per potenciar la competència de comunicació i representació, ja que facilita la comprensió visual i conceptual del radian com a unitat de mesura angular i promou l'expressió rigorosa de les idees matemàtiques. L'exploració interactiva a través de GeoGebra permet a l'alumnat identificar les relacions entre la longitud de l'arc i el radi de la circumferència, així com comunicar aquestes relacions mitjançant el llenguatge gràfic, numèric i verbal. A més, l'ús d'estratègies com l'observació i la formulació de preguntes (*What do you notice? What do you wonder?*) fomenta la discussió matemàtica i l'intercanvi de raonaments i contribueix al desenvolupament d'una comunicació precisa i d'una representació clara en la resolució de problemes.
- El recurs Naixements, extret del llibre *Matemagia: problemas y enigmas* (Paenza, 2015), és un instrument excel·lent per potenciar la competència de comunicació i representació en l'àmbit matemàtic. Aquest problema no només desafia la intuïció matemàtica de l'alumnat, sinó que també el convida a justificar els seus raonaments i a expressar-los de manera clara i estructurada. Mitjançant l'ús de simuladors, com ara Python o Snap!, els estudiants poden representar les

condicions inicials del problema i analitzar com es comporten les freqüències relatives dels casos. Pren especial rellevància la representació precisa i exhaustiva dels casos possibles, ja que aquesta és clau per estudiar i interpretar la probabilitat dels esdeveniments plantejats.

Gestió socioemocional (CE 8 i CE 9)

La relació de l'alumnat amb les matemàtiques a 4t d'ESO es pot plantejar des d'una doble perspectiva: la personal i la col·lectiva. En l'àmbit personal, és essencial crear activitats que promoguin l'autonomia i l'autoregulació en l'aprenentatge. Exercicis que requereixin analitzar problemes des de diferents enfocaments o aplicar coneixements en contextos pràctics permeten que l'alumnat desenvolupi confiança en les seves capacitats, superi possibles bloquejos emocionals i esdevingui més resilient davant de dificultats. La reflexió sobre els errors i la cerca de solucions alternatives contribueixen a reforçar la persistència i l'autoestima acadèmica.

En l'àmbit col·lectiu, les experiències col·laboratives guanyen rellevància, especialment aquelles que impliquen la resolució de problemes complexos o la creació conjunta de models matemàtics per abordar situacions reals. El treball en equip no només fomenta habilitats com la comunicació assertiva o la negociació, sinó que també potencia l'empatia i el respecte envers les perspectives dels altres. Això resulta especialment valuós en aquesta etapa educativa, en què les interaccions socials adquireixen una gran importància per al desenvolupament emocional.

La tasca del docent és clau per equilibrar les necessitats individuals i col·lectives. Mitjançant un acompanyament respectuós i estratègies que promoguin un entorn segur, l'alumnat pot aprendre a gestionar l'estrès, assumir responsabilitats en el seu aprenentatge i treballar de manera eficaç amb els companys i companyes, desenvolupant així una relació més positiva i equilibrada amb les matemàtiques.

La gestió socioemocional està vinculada a dues competències específiques:

- CE 8, relacionada amb el desenvolupament d'habilitats personals com les creences, les actituds i les emocions envers les matemàtiques.
- CE 9, centrada en el desenvolupament d'habilitats socials com el treball en equip i la presa de decisions.

A continuació s'indiquen alguns aspectes que, treballats des del sentit de la mesura, poden contribuir al desenvolupament de les competències CE 8 i CE 9.

Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 8:

- El treball del **saber #4.MES.ER.A** contribueix al desenvolupament de la competència relacionada amb el desenvolupament d'habilitats personals i fomenta l'autonomia de l'alumnat en la presa de decisions matemàtiques basades en observacions visuals i intuïtives. La connexió entre experiència prèvia i estimacions raonades permet construir confiança en les pròpies capacitats, alhora que es desenvolupa un sentit crític per validar i ajustar aquestes estimacions amb eines formals. Aquest procés reforça la capacitat d'analitzar situacions reals i aplicar-hi estratègies matemàtiques de manera precisa i autònoma.
- El treball del **saber #4.MES.ER.B** ajuda l'alumnat a valorar la precisió i la fiabilitat dels resultats en mesurament. L'anàlisi de l'error absolut i relatiu fomenta una actitud crítica, que permet ajustar càlculs i prendre decisions informades. A més, aquest enfocament promou veure l'error com una oportunitat d'aprenentatge i millora contínua.
- L'activitat La distància entre la Terra i el Sol, presentada en el **saber #4.MES.ME.E**, permet desenvolupar la competència específica CE 8, destacant la importància dels errors en les mesures inicials i la seva propagació en els càlculs. L'alumnat aplica raons trigonomètriques per revisar el

mètode d'Aristarc i reflexiona sobre la influència dels errors en el càlcul de magnituds espacials.

Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 9:

El desenvolupament d'habilitats socials és essencial per promoure un aprenentatge significatiu de les matemàtiques i fomentar una convivència positiva dins l'aula. A 4t d'ESO, treballar col·laborativament enriqueix el procés d'aprenentatge, ja que permet als estudiants abordar conceptes i problemes des de perspectives variades, alhora que potencia la comprensió de continguts més abstractes, com la probabilitat geomètrica (**saber #4.MES.ME.F**) o l'anàlisi de la dependència d'esdeveniments aleatoris (**saber #4.MES.ME.G**). Aquest tipus de treball en grup promou el diàleg constructiu, l'intercanvi d'idees i la presa de decisions compartides, habilitats imprescindibles per afrontar situacions complexes.

Treballar de manera cooperativa ajuda l'alumnat a contrastar els seus raonaments amb els dels altres, posant en valor les diverses aproximacions als problemes matemàtics. Aquesta dinàmica fomenta l'empatia i el respecte per les aportacions alienes, alhora que els permet millorar les seves pròpies estratègies i argumentacions. A més, proporciona un marc idoni per desenvolupar competències com la comunicació matemàtica i la capacitat de justificar decisions en grup.

Aquest enfocament col·laboratiu contribueix al desenvolupament d'un entorn d'aprenentatge inclusiu, en què cada alumne pot superar idees preconcebudes sobre les seves habilitats o les dels altres. Aquest procés afavoreix l'adquisició de competències com l'esperit crític i la resolució conjunta de problemes, mentre es consolida la importància de la comunicació clara i el respecte per la diversitat d'idees.

Aquesta perspectiva obre la porta a oportunitats per treballar en equip, promovent actituds positives, implicació en la presa de decisions i respecte per les aportacions dels altres, superant qualsevol idea limitant sobre les habilitats pròpies o alienes en matemàtiques. A continuació, es destaquen dues activitats concretes en aquest àmbit:

- La proposta inicial del **saber #4.MES.ME.C** sorgeix del llibre *Didáctica matemática heurística* (Puig Adam, 1956). En aquesta proposta, d'una banda, és fonamental recollir el treball de cada grup d'alumnes per identificar possibles errades. D'altra banda, mitjançant l'estudi estadístic dels càlculs fets pels diferents grups, es podrà observar com les mitjanes s'aproximen als valors de les raons trigonomètriques associades als triangles rectangles dibuixats.
- L'activitat titulada El joc de Penney, vinculada al **saber #4.MES.ME.G**, planteja una primera fase d'experimentació que es pot fer amb daus físics o simuladors. Aquesta fase inicial requereix una recollida i compartició rigorosa de dades, ja que disposar d'un gran nombre d'experiments és clau per poder formular conjectures sòlides sobre els resultats de les afirmacions plantejades.