

TOR 4t d'ESO: Sentit algebraic

Consideracions generals.....	1
Blocs de sabers.....	2
Patrons.....	2
Sabers.....	2
Descripció i orientacions.....	2
Recursos i activitats.....	2
Model matemàtic.....	6
Sabers.....	6
Descripció i orientacions.....	7
Recursos i activitats.....	7
Variable.....	16
Sabers.....	16
Descripció i orientacions.....	16
Recursos i activitats.....	18
Igualtat i desigualtat.....	23
Sabers.....	23
Descripció i orientacions.....	24
Recursos i activitats.....	26
Relacions i funcions.....	29
Sabers.....	29
Descripció i orientacions.....	29
Recursos i activitats.....	31
Pensament computacional.....	36
Sabers.....	36
Descripció i orientacions.....	37
Blocs de competències: processos matemàtics i gestió socioemocional.....	41
Resolució de problemes (CE 1 i CE 2).....	41
Sabers.....	42
A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar la resolució de problemes són, entre d'altres:.....	42
Recursos.....	42
Raonament i prova (CE 3 i CE 4).....	43
Sabers.....	43
A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar el raonament són, entre d'altres:.....	43
Recursos.....	43
Connexions amb altres parts de la matemàtica (CE 5).....	44
Sabers.....	44
Recursos.....	44
Connexions amb altres matèries i amb l'entorn (CE 6).....	44



Sabers.....	45
Recursos.....	45
Comunicació i representació (CE 7).....	46
Sabers.....	46
Recursos.....	46
Gestió socioemocional (CE 8 i CE 9).....	47
Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 8.....	47
Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 9.....	48

Consideracions generals

El sentit algebraic aglutina un conjunt de blocs de sabers especialment important dins de les matemàtiques de l'educació secundària, ja que inclou l'aprenentatge d'un llenguatge nou (l'àlgebra), amb tot el que això implica, el desenvolupament del qual és rellevant per aprofundir en els processos i, per tant, en les competències que hi ha en el currículum de matemàtiques.

Per tal de desenvolupar el conjunt de sabers que constitueixen el sentit algebraic als diferents cursos, es proposa introduir el llenguatge algebraic partint dels coneixements aritmètics i geomètrics dels alumnes, tenint molt en compte les dificultats que suposa el treball amb un nou llenguatge. També és rellevant ajudar l'alumnat a donar significat al conjunt de símbols que apareixen en les expressions algebraiques i que representen incògnites, variables, paràmetres, operacions, així com identitats, equacions, inequacions i funcions. D'altra banda, cal mostrar que l'àlgebra és un llenguatge útil en situacions diferents, en particular per expressar generalitzacions de propietats, caracteritzar patrons i resoldre problemes. Pel que fa a l'aprenentatge de la resolució d'equacions, inequacions i sistemes i les seves aplicacions, creiem que cal emmarcar-lo en un ambient de resolució de problemes, per tal d'allunyar-se de l'aplicació mecànica de receptes i de la pràctica reproductiva de procediments opacs. També forma part d'aquest sentit el pensament computacional, que té característiques pròpies, diferents de les dels altres blocs de sabers, però que permet un ampli ventall de connexions internes que poden representar bones oportunitats didàctiques. Al final d'aquest apartat, hi dediquem una atenció especial.

Com en qualsevol altre sentit, és molt important tenir en compte l'horitzó matemàtic, tant d'allò que ja s'ha treballat com del treball a desenvolupar en el futur en altres etapes educatives. En relació amb els sabers de primària, cal tenir en compte el coneixement de les operacions elementals i la seva relació, així com el coneixement de la prioritat de les operacions i l'ús de parèntesis, i també el significat dels símbols aritmètics i de les operacions en els diferents conjunts numèrics, en particular en els enters. Pel que fa a l'horitzó futur, el coneixement de l'àlgebra resulta indispensable per a l'alumnat que farà matemàtiques al batxillerat, però també si accedeix a mòduls professionals i al món laboral, com a eina per resoldre problemes, per caracteritzar els fenòmens de canvi, per argumentar i per expressar generalitzacions.

L'especificació i seqüenciació dels sabers del bloc Pensament computacional s'ha fet atenent diversos criteris. Primerament, s'han contextualitzat al màxim dins de les matemàtiques, s'han establert connexions significatives amb altres blocs del sentit algebraic, amb altres sentits i amb processos com la resolució de problemes, i així s'ha facilitat la integració del pensament computacional en el treball matemàtic. Els sabers que s'han inclòs es classifiquen en quatre categories: les habilitats generals de pensament computacional (descomposició, patrons, abstracció i algorismes), la construcció d'algorismes executables per persones o ordinadors, l'ús d'eines computacionals en matemàtiques, i la gestió socioemocional. S'ha intentat donar acollida a tres opcions de treball diferents però compatibles: el treball sense eines digitals (pensament computacional “desendollat”), la creació de programes en diversos llenguatges de programació i l'ús d'aplicacions de robòtica i dispositius mòbils.

Blocs de sabers

Patrons

Sabers

- A. Observació de regularitats en diferents contextos matemàtics que permetin extreure conclusions o descobrir propietats. **#ALG.RF**

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

L'estudi de regularitats en diferents contextos (numèrics o algebraics) pot contribuir a assolir millor els conceptes que es van treballant durant el curs.

Als cursos anteriors, l'alumnat haurà treballat la cerca de patrons de diferents tipus i esperem que siguin capaços d'identificar-los, explicar-los i fer prediccions sobre la continuació del patró. A partir de 3r d'ESO, en què l'alumnat ja haurà assolit més destresa amb el llenguatge algebraic, buscarem, a més, l'expressió algebraica que generalitza el patró.

En aquest curs, l'últim de l'etapa, proposem anar una mica més enllà per començar a conèixer les diferents formes de creixement dels patrons i que portaran a la idea de límit.

Tal com s'esmenta a altres cursos, cal remarcar la diferència entre una seqüència o successió, que és un conjunt ordenat d'elements, i un patró, que és la regularitat, si n'hi ha, que marca l'estructura d'una successió.

Comentaris sobre les connexions

En aquest estadi avançat del treball de patrons, cal ajudar l'alumnat a veure la 'connexió evident entre les successions i les funcions (**#3.ALG.RF**). Tots dos conceptes estan fortament relacionats, essent un el cas discret i l'altre el continu d'un mateix model matemàtic. Per altra banda, la visualització i modelització geomètrica, dins del sentit espacial, ens ajudarà a comprendre i trobar patrons.

Recursos i activitats

Recursos i activitats generals per al bloc de sabers

En funció del grup i de l'assoliment d'aquestes habilitats en cursos anteriors, es pot començar amb activitats de les proposades al mateix grup de sabers de 3r d'ESO. Per exemple, activitats de les moltes recollides al web [Visual patterns](#) poden ajudar a refrescar estratègies.

Com en cursos anteriors, l'ús de material manipulable pot ajudar a visualitzar la tasca a resoldre i a descobrir la pauta. En activitats complexes pot ser una bona bastida per a l'alumnat. Recordem la campanya [Laboratori de matemàtiques](#) del CREAMAT, en la qual podem trobar propostes per treballar patrons amb diferents materials: *pattern blocks* i cubets encaixables, entre d'altres.

Recursos i activitats per treballar sabers concrets

Per introduir el **saber #4.ALG.PA.A**, una possibilitat és començar amb la comparació de diferents ritmes de creixement de successions.

Podem partir de successions senzilles com ara la dels nombres parells i la dels senars i preguntar com creixen. Fàcilment, es veurà que creixen «a la mateixa velocitat». Després podem proposar altres successions de creixement lineal, de creixement quadràtic o exponencial i demanar si totes creixen de la mateixa manera. La pregunta és volgudament oberta per fomentar i conduir la conversa a l'aula i, davant de les hipòtesis que vagin fent els alumnes, se'n pot demanar una justificació. En aquest cas, serà important veure les diferents estratègies i formes de representar la situació per part de l'alumnat i fer-ne una posada en comú.

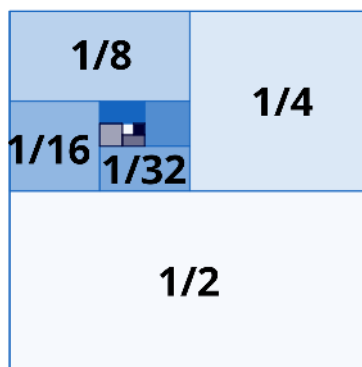
Posteriorment, es poden introduir successions convergents i trencar la idea que totes les successions que creixen tenen suma infinita. Una bona activitat pot ser l'estudi de la successió $\frac{1}{2^n}$, que es pot plantejar en un context numèric quan es treballen les fraccions en contextos històrics, tal com s'ha plantejat a

#2.NUM.QU.B en l'activitat [Les fraccions: l'ull d'Horus](#). En aquest cas, es parteix del mite egipci que diu que

les parts que formaven l'ull d'Horus representaven les fraccions $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \dots, \frac{1}{64}$ i que tot ell representava la unitat. A 4t d'ESO, proposem un enfocament del mateix problema, però des del punt de vista de les successions. Es tracta d'una progressió geomètrica decreixent de suma infinita igual a 1. Aquest últim és un concepte nou i poc intuïtiu per al nostre alumnat, per la qual cosa és important dotar-lo de sentit per poder acabar passant a l'abstracció i al càlcul de límits en estudis posteriors.

En l'article «Diàleg entre iguals a l'aula. Eina per a la construcció del coneixement matemàtic» del Xavier Vilella, s'hi pot trobar una possible forma de gestió de l'activitat per afavorir el descobriment, a més d'altres activitats de cerca de patrons i consideracions interessants sobre com gestionar el diàleg matemàtic a l'aula.

En aquest sentit, la visualització geomètrica del problema és una gran ajuda per mostrar la convergència:



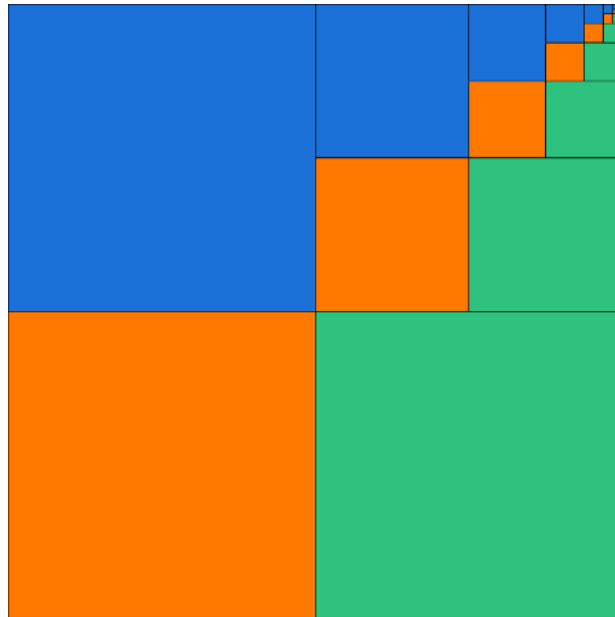
Font: elaboració pròpia

Es pot demanar que cerquin altres successions convergents, amb representacions que ho mostrin, com per exemple aquesta altra:



Font: elaboració pròpia

En la mateixa línia que els darrers exemples, hi ha l'activitat proposada pel MMACA [Una suma d'infinites termes](#). L'activitat proposa observar el quadrat següent:



Font: [Una suma d'infinits termes](#), del MMACA

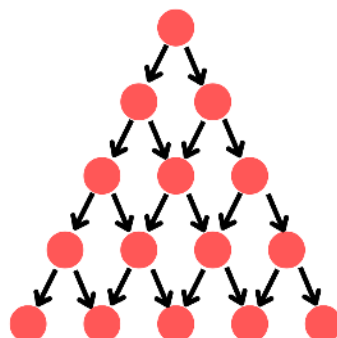
Aquest quadrat està format per tres sèries de quadrats marcats amb tres colors diferents. Cada sèrie comença per un quadrat de superfície $\frac{1}{4}$ del quadrat general. El segon terme és $\frac{1}{4}$ de l'anterior, per tant, és $\frac{1}{16}$ del total. I se segueix d'aquesta mateixa manera amb quadrats cada cop quatre vegades més petits. Es tracta d'una suma d'infinits termes. Com que les tres sumes són iguals, cadascuna és $\frac{1}{3}$ del quadrat general.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots = \frac{1}{3}$$

La proposta va acompanyada d'un full descarregable per poder fer l'activitat doblgant-lo i un petit vídeo que il·lustra com fer els plecs.

En relació amb el **saber #4.ALG.PA.A**, proposem l'activitat [El triangle aritmètic](#) que busca la descoberta del triangle de Pascal i la cerca de patrons a l'interior. És una activitat que es podria plantejar perfectament en cursos anteriors, però es proposa a 4t d'ESO per les fortes connexions que té tant amb el sentit numèric pel que fa a les tècniques de recompte, com amb el mateix sentit algebraic per l'aplicació a l'hora de desenvolupar un binomi, en cas que es consideri que es vol anar una mica més enllà en el treball amb les identitats notables.

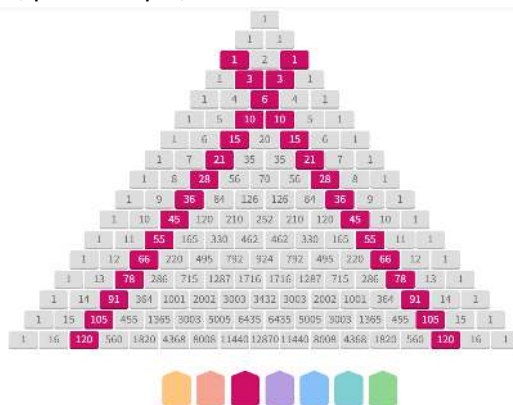
El punt de partida de l'activitat és justament fer un recompte del nombre de camins que porten a cada una de les caselles de la figura següent, entenent que només és possible moure's cap avall. No s'accepten moviments laterals ni cap amunt. Es pot imaginar que es deixa caure una bola des del vèrtex superior i aquesta pot agafar el camí de la dreta o de l'esquerra quan es troba en una bifurcació:



Font: elaboració pròpia

Resulta senzill omplir les primeres caselles, però tal com anem baixant en l'estructura es fa necessari un treball ordenat i sistemàtic per obtenir tots els camins possibles. Després que l'alumnat hagi investigat durant “una estona”, es posen en comú els resultats i es demana que emplenin les dues files següents. En aquest moment, la cerca exhaustiva és prou complicada de fer sense oblidar cap camí, amb la qual cosa forcem a buscar raonaments que permetin obtenir els resultats sense haver-los de buscar. La gestió del docent per conduir la conversa i el raonament és clau per arribar a la conclusió (raonada) que cada casella s'obté sumant els nombres de camins que arriben a les dues immediatament superiors. D'aquesta manera, trobem un primer patró que ens permet completar tantes files del triangle com vulguem.

Un cop descobert el triangle aritmètic, l'estudi dels patrons que amaga és una tasca engrescadora i molt interessant. En aquest [article interactiu de Mathigon](#) sobre el triangle, podem visualitzar, fàcilment amb colors, alguns dels diferents patrons (nombres naturals, nombres triangulars, nombres tetragonals, seqüència de Fibonacci, etc.), així com investigar altres propietats interessants del triangle que ens connecten amb altres camps com, per exemple, la divisibilitat o les fractals.



Font: [Mathigon](#)

Si es vol optar pel format audiovisual, al vídeo [Los secretos del triángulo de Pascal](#) del canal Derivando de YouTube, del matemàtic i divulgador Eduardo Sáenz de Cabezón, es pot trobar més informació interessant sobre el triangle.

Aquesta activitat es podria treballar en cursos anteriors (hi ha un problema d'investigació de la primera fase del Fem Matemàtiques 2022, [Aneu on l'atzar us porti](#), per a 1r o 2n d'ESO), però, si es duu a terme a 4t d'ESO, permet connectar amb altres sabers com ara els nombres combinatoris (**saber #NUM.CO.A**) i d'aquí a la descomposició de potències de binomis, com a possible ampliació.

Saber #4.ALG.PA.A

Una possibilitat, si es vol treballar la cerca de patrons algebraics (**saber #4.ALG.PA.A**), és l'activitat «Potències de binomis», que pretén descobrir les regularitats dins del desenvolupament de les potències d'un binomi.

Per fer-ho, es pot començar operant per trobar el desenvolupament del binomi i observar-ne els resultats. Com més casos calculin, més fàcilment veuran el patró que segueix.

Àlgebra		Opera $((x + y)^0)$ $= 1$
Taula		Opera $((x + y))$ $= x + y$
Alt de càlcul i gràfics		Opera $((x + y)^2)$ $= x^2 + 2 \times x \times y + y^2$
		Opera $((x + y)^3)$ $= x^3 + 3 \times x^2 \times y + 3 \times x \times y^2 + y^3$
		Opera $((x + y)^4)$ $= x^4 + 4 \times x^3 \times y + 6 \times x^2 \times y^2 + 4 \times x \times y^3 + y^4$
		Opera $((x + y)^5)$ $= x^5 + 5 \times x^4 \times y + 10 \times x^3 \times y^2 + 10 \times x^2 \times y^3 + 5 \times x \times y^4 + y^5$
		Opera $((x + y)^6)$ $= x^6 + 6 \times x^5 \times y + 15 \times x^4 \times y^2 + 20 \times x^3 \times y^3 + 15 \times x^2 \times y^4 + 6 \times x \times y^5 + y^6$

Font: elaboració pròpia

Aquesta activitat resulta molt interessant com a pràctica productiva en la manipulació algebraica. Les diferents velocitats de càlcul de l'alumnat faran que no tots arribin a desenvolupar el mateix nombre de binomis, però la posada en comú dels resultats (disposant-los a la pissarra de manera ordenada, per tal que recordi el triangle aritmètic (treballat prèviament)) els posarà a tots en igualtat d'oportunitats per trobar el patró. Es pot anar guiant la conversa per fer-los veure què passa amb els graus de tots els termes d'un mateix binomi i com va variant en cada terme. Per altra banda, caldrà veure com trobar els coeficients i també, a partir de bones preguntes, guiar-los a la descoberta de la relació amb el triangle aritmètic. El moment de descobriment acostuma a ser de molta sorpresa, ja que, en principi, aquesta activitat no tenia res a veure amb el treball fet anteriorment a partir de la cerca de camins, però porta al mateix triangle. És un bon moment, doncs, per introduir els nombres combinatoris (**saber #NUM.CO.A**) aprofitant la necessitat de representar els nombres del triangle si volem escriure l'expressió algebraica del binomi de Newton. Es pot lligar amb el treball d'aquests nombres descrit al sentit numèric.

Model matemàtic

Sabers

- Representació abstracta i simplificada de la realitat utilitzant llenguatge i eines de les matemàtiques.
- Ús de les equacions, els sistemes i les inequacions com a models matemàtics de situacions contextualitzades. **#ALG.ID**
- Cerca de la funció que modelitza una situació (contextualitzada o no) que segueixi un model lineal, quadràtic, exponencial, de proporcionalitat inversa, etc. **[ESS] #ALG.RF, #EST.IN**
- Ús de recursos digitals o interactius per buscar la funció que modelitza millor un context.

- E. Anàlisi de les solucions d'un problema, presa de decisions en conseqüència i formulació de prediccions, si escau. **[ESS]**

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

En arribar a 4t d'ESO, l'alumnat ja ha aprofundit en el treball del llenguatge algebraic, la resolució d'equacions, funcions lineals, afins, de segon grau i de proporcionalitat inversa, elements que permeten modelar i analitzar diferents tipus de fenòmens propis de les matemàtiques o lligats al món real. Ara a 4t, amb la introducció de les funcions exponencials i les inequacions, s'amplia l'horitzó i, per tant, s'obre un ampli ventall de possibles propostes: des de situacions d'augment de poblacions, desintegració radioactiva, l'interès compost fins a problemes de costos i pressupostos.

El mètode científic i l'ús de models matemàtics són fonamentals en la investigació i el desenvolupament de noves tecnologies. Moltes disciplines, com l'enginyeria, l'economia, les ciències socials, la biologia o les ciències físiques, utilitzen la modelització matemàtica com una eina essencial. A 4t d'ESO, l'alumnat ja pot adquirir unes bases sòlides que els seran útils en el seu projecte acadèmic de futur, sigui quina sigui la seva tria posterior a 4t d'ESO.

Cal remarcar el paper valuós que els programes de geometria dinàmica poden arribar a tenir. Més enllà d'ajudar l'alumnat a visualitzar i explorar conceptes matemàtics, també donen eines per buscar les funcions que millor modelitzen un context, la qual cosa permet la creació del model i la validació posterior.

Comentaris sobre les connexions

La creació de models a 4t d'ESO va lligada als sabers dels diferents sentits que es treballen al llarg d'aquest curs i faciliten el procés de modelització, ja que propicien un bon escenari per treballar situacions contextualitzades. Així, dins del sentit algebraic, s'estableixen connexions amb equacions i inequacions (**#4.ALG.ID**) i amb funcions (**#4.ALG.RF**), i, si es volen fer estudis de regressió, s'estableixen connexions amb el sentit estocàstic (**#EST.IN**).

Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

Com als cursos anteriors, s'ha destacat el **saber #4.ALG.MM.E** com a essencial, ja que es considera fonamental en el procés de resolució de problemes. Quan l'alumnat fa tasques de modelització i un cop obtinguda la solució, aquesta s'ha d'interpretar i validar i, en cas que no solucioni el problema de la realitat, prendre les decisions oportunes.

També s'ha destacat com a essencial el **saber #4.ALG.MM.C**, perquè representa una de les idees centrals d'aquest bloc. Trobar la funció que millor s'ajusta a una situació per modelitzar-la i donar resposta a un repte proposat és una tasca ambiciosa, però a la qual tot l'alumnat hi hauria de tenir accés per poder experimentar el paper imprescindible de les matemàtiques per resoldre problemes del món real.

Observacions sobre alguns sabers específics

Tal com també s'ha esmentat als cursos anteriors, l'alumnat té a l'abast molts recursos per treballar el **saber #4.ALG.MM.D**.

El full de càlcul ens permet trobar funcions d'ajust de manera senzilla i, amb els programes de geometria dinàmica, també se'ns obre un món ple de possibilitats. Aquests programes ofereixen fer representacions gràfiques i càlculs complexos, però a més potencien la part creativa del procés de modelització. En aquest sentit, el [repositori de materials del programa GeoGebra](#) proporciona multitud de propostes ja preparades per aplicar a l'aula.

Recursos i activitats

Recursos i activitats generals per al bloc de sabers

Tal com també es comenta als cursos anteriors, un tipus de tasques en què el treball de modelització matemàtica pot encaixar òptimament són els projectes. Al CREAMAT s'hi pot trobar una campanya anomenada [Matemàtiques i projectes](#) amb molts exemples detallats i tots els materials necessaris per portar-los a l'aula.

A l'ARC també hi trobem propostes que ens permeten treballar gairebé tots els sabers d'aquest bloc. Un exemple és l'activitat [El projector. Exemple pràctic d'una funció quadràtica](#) del professor José Luis Álvarez García (traducció i adaptació de Raül Fernández). L'activitat es basa en una construcció de GeoGebra, acompanyada d'un qüestionari que l'alumnat omplirà mentre experimenta amb l'aplicació. La idea en què es basa el recurs és la següent: Quan projectem sobre una pantalla, l'àrea de la imatge projectada depèn de la distància del projector a la pantalla. Si col·loquem el projector molt a prop, la imatge es veurà molt petita. Per contra, si el separem molt, la imatge es fa molt gran. Fins i tot es pot sortir de la pantalla de projecció. L'àrea de la imatge projectada també depèn de l'angle de projecció: per a una mateixa distància, com més obrim l'angle de projecció, més gran serà l'àrea projectada. A l'activitat, s'analitzen aquestes dependències en observar el cas d'un projector sobre una gran pantalla, que projecta una imatge quadrada.

Una altra proposta dels mateixos autors que l'anterior, és l'activitat [El tir parabòlic. Exemple pràctic d'una funció quadràtica](#). La proposta analitza la trajectòria d'un projectil llançat amb certa velocitat i amb un angle d'inclinació determinat, que es veu afectada per l'acció de la gravetat. Trobar les lleis matemàtiques que regeixen el moviment dels projectils va ser una tasca en la qual es van embarcar grans matemàtics, com Tartaglia i Galileu. A les activitats proposades, l'alumnat manipularà un petit canó que llença pilotes de tennis. Es tracta d'investigar com depèn el resultat del llançament de l'angle d'inclinació del canó (angle de tir) i de la velocitat amb la qual s'impulsa la pilota. Es determinarà la trajectòria de la pilota, l'altura màxima i l'abast, és a dir, la distància des del punt de llançament fins al punt on la pilota toca a terra.

Recursos i activitats per treballar sabers concrets

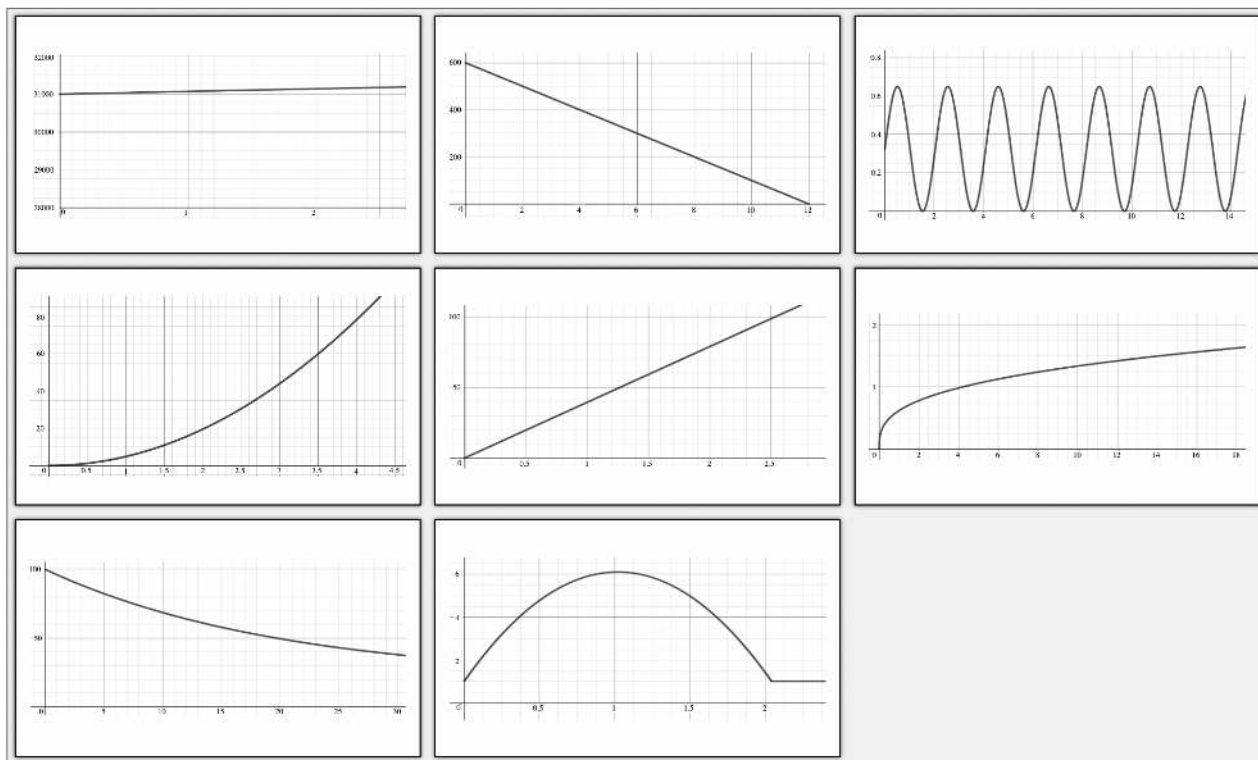
Per treballar el **saber #4.ALG.MM.A**, hi ha l'activitat [Picture the process](#) del web Underground Mathematics. Es proposen vuit situacions del món real i, per a cadascuna d'elles, l'alumnat haurà de dibuixar un gràfic adequat. No cal que sigui precís, només han de donar la forma general. Es tracta de fer esbossos aproximats. És important que, mentre l'alumnat està fent els esbossos, vagin prenent nota de tot allò que tenen en compte.

A continuació, tenim les vuit situacions plantejades. Algunes podrien requerir alguns sabers d'ampliació i es pot eliminar de la llista de situacions a treballar, si cal.

Temperatura d'una tassa de te al llarg del temps.	Alçada de la vàlvula d'un pneumàtic de bicicleta a mesura que la bicicleta avança.	Alçada d'una pilota de tennis llançada cap amunt i després atrapada.
Distància caiguda per un paracaigudista saltant d'un avió.	Lectura al comptador de quilòmetres d'un cotxe que circula per una autopista.	Radi d'un globus esfèric quan s'infla.
Volum d'aigua que queda en una tassa quan l'aigua s'aspira a través d'una palla.	Distància al llarg d'una cinta mètrica mesurada en polzades en comparació amb la distància mesurada en metres.	

Font: [Picture the process](#), del web Underground Mathematics

Un cop l'alumnat té les vuit propostes de gràfic, els mostrem una solució possible per a cada situació. Però els donem els vuit gràfics desordenats, és a dir, hauran de relacionar cada gràfic amb la situació.



Font: [Picture the process](#), del web Underground Mathematics

Un cop tinguin clar el gràfic que correspon a cada situació, els demanem que el comparin amb el gràfic que havien fet ells i, en el cas que siguin molt diferents, els demanem que intentin descobrir el perquè, tot observant amb atenció les suposicions que havien fet inicialment.

Per acabar, depenent del nivell del grup i allò que s'ha treballat anteriorment, es pot demanar que donin una expressió algebraica per a cada gràfic o, directament, se'ls pot donar la imatge de vuit expressions desordenades i que les relacionin amb les situacions plantejades inicialment.

$y(x) = 0,325 (\sin(3,1x) + 1)$	$y(x) = 10x - 4,9x^2 + 1$	$y(x) = 600 - 50x$
$y(x) = 39,37x$	$y(x) = 4,9x^2$	$y(x) = 0,6204\sqrt[3]{x}$
$y(x) = 20 + 80e^{-0,05x}$	$y(x) = 70x + 31000$	

Font: [Picture the process](#), del web Underground Mathematics

La idea és que al final tinguin clar quina situació va amb cada gràfic i cada expressió algebraica.

Per treballar els **sabers #4.ALG.MM.A i #4.ALG.MM.B**, a l'ARC, trobem l'activitat [Semàfors temporals](#) del professor Xavi Roca. Es proposa a l'alumnat la situació següent. Coneixem la longitud i la velocitat màxima d'un tram de carretera per la qual, temporalment, només es podrà circular per un dels dos sentits. Mentre durin les obres, haurem d'instal·lar dos semàfors als dos extrems del tram. Quina és la millor manera de definir el cicle temporal que seguiran els dos semàfors?

Semàfors temporals



En una carretera de doble sentit s'han de fer obres. Mentre durin les obres, només es podrà circular per un dels carrils. Per tal de regular el tràfic es col·locaran dos semàfors en els dos extrems de la carretera. Aquests semàfors s'han de programar perquè es vagin posant en verd o en vermell cada cert temps.



Quina és la millor manera de distribuir aquest temps?

<https://www.khanacademy.org/a/traffic-light-problem-temporary-traffic-right-of-way>

4ESO/BAT

Font: [Semàfors temporals](#), de Xavi Roca

Es tracta d'una activitat oberta. Pot ser interessant començar-la amb un joc de rol en què l'alumnat viu l'experiència d'esperar que el semàfor es posi en verd i després circula per la carretera de sentit únic. També podem simular que cada grup es correspon amb una empresa que respon a la crida de l'ajuntament per a la instal·lació dels semàfors, i que, entre tots, haurem de decidir la millor proposta.

Un cop a l'aula, en primer lloc, es planteja a l'alumnat com representar el cicle temporal complet dels dos semàfors. Els grups hauran de compartir una representació entenedora i la resta de grup l'analitzarà i la compararà amb la seva. Després es planteja com avaluar la qualitat del model. Quines condicions s'han de complir per tal que l'experiència per als conductors sigui òptima? I per tal que ho sigui el trànsit? Cada condició que s'imposi conduirà a un estudi determinat. En alguns casos, es podran fer anàlisis amb dades numèriques —o bé aproximades o bé estimades— i, en d'altres, si escau i és adequat, es podran fer servir variables i plantejar les equacions que es derivin de les condicions que imposen.

Saber #4.ALG.MM.B

Hi ha moltes situacions amb contextos del món real per treballar les inequacions. Vegem-ne alguns exemples. Començarem amb l'activitat «La festa». L'alumnat ha d'organitzar una festa i tenen un pressupost limitat. Han de comprar aliments i begudes per a la festa amb un pressupost total de 200 euros. Saben que cada ampolla de refresc costa 3,5 € i cada bossa de patates costarà 2 €. Quants refrescos i quantes bosses de patates poden comprar si volen gastar com a màxim 200 €?

En primer lloc, es tradueix el problema per resoldre al llenguatge matemàtic mitjançant l'àlgebra i se'n formula la inequació. Suposem que volen comprar x ampolles de refresc i y bosses de patates. La despesa total serà: $3,5x + 2y \leq 200$

On:

- $3,5x$ és el cost dels refrescos
- $2y$ és el cost de les patates
- 200 és el pressupost màxim disponible

Un cop plantejada la inequació, és el moment de resoldre-la i interpretar-ne la solució. Poden solucionar-la gràficament o analíticament, però, al final, hauran de validar i donar sentit a la solució dient quins valors concrets de x i y poden triar si volen comprar un nombre enter d'ampolles de refresc i de bosses de patates. Finalment, hauran de dir quina quantitat en poden comprar per aprofitar al màxim el pressupost de 200 €.

També es pot plantejar una activitat cooperativa de resolució de problemes. La idea és distribuir la classe en grups de 3 o 4 alumnes i situar diverses estacions a la classe a les quals hi hagi un problema relacionat amb un pressupost o una situació quotidiana que impliqui inequacions. Per exemple:

- Decidir la quantitat d'energia per consumir cada mes sense superar el límit de consum de 300 kWh.

- Determinar el nombre màxim d'entrades per a un concert que poden comprar un grup d'amics sense superar el seu pressupost total de 500 €.
- Resoldre el problema d'un comerciant que ha de comprar 3 tipus de productes amb un pressupost limitat i preus específics per a cada producte.
- ...

Els grups aniran passant per les diverses estacions, sempre seguint els passos següents:

- Formulació de la inequació en funció de les variables del problema.
- Resolució de la inequació i representació gràfica.
- Discussió de les possibles solucions i quina és la millor opció dins de les limitacions establertes.

Al final, es fa una posada en comú i cada grup presenta la seva solució davant de la classe i explica el procés utilitzat per resoldre el problema.

Per treballar els **sabers #4.ALG.MM.A, #4.ALG.MM.C i #4.ALG.MM.D**, hi ha l'activitat de l'NCTM «Drug filtering», amb una versió traduïda al català anomenada [Filtratge de medicaments](#). Es tracta de modelar com els ronyons filtren un medicament a la sang. Posem 1 litre d'aigua dins d'un recipient transparent i expliquem que l'aigua representa part de la sang del nostre cos.



Font: Núria Serra

A continuació, posem diverses gotes de colorant alimentari a l'aigua i expliquem que aquest colorant representa 1.000 mg d'un medicament (com ara el paracetamol, per exemple) que hem pres. Barregem bé el colorant alimentari amb l'aigua i expliquem a l'alumnat que, al cap de 4 hores de prendre el medicament, els ronyons n'hauran filtrat un 25%. I preguntem: Com podem modelar aquesta situació? Deixem uns minuts perquè l'alumnat faci propostes i llavors traiem 250 ml del recipient on hi ha la barreja d'aigua i colorant i els substituïm per 250 ml d'aigua clara.



Font: Núria Serra

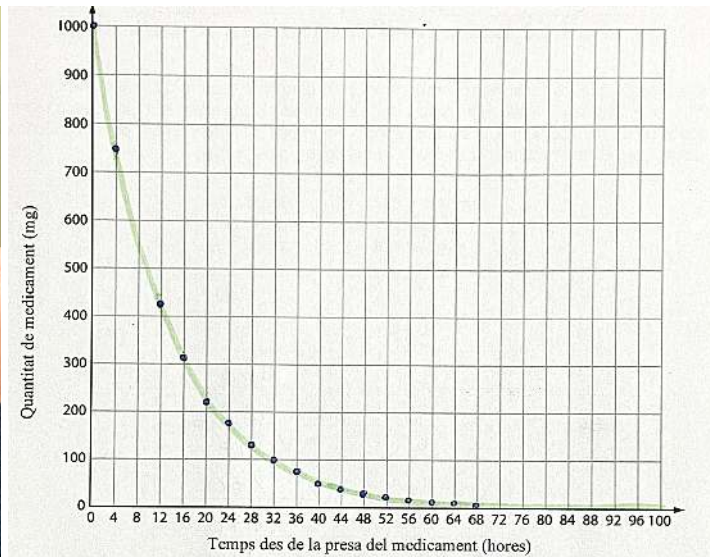
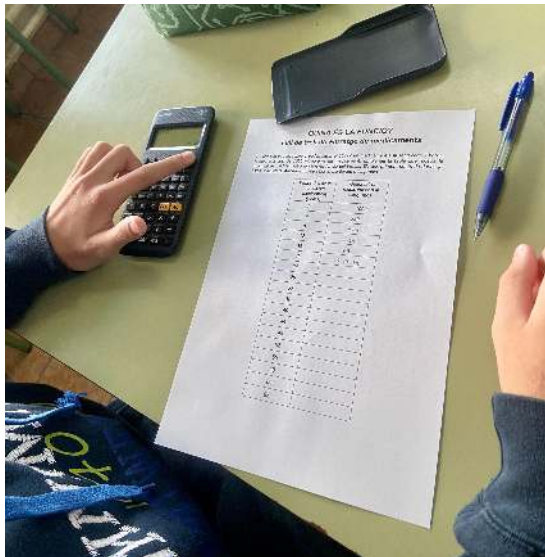
I preguntem: Quants mil·ligrams de medicament queden a la sang? La major part de l'alumnat troba la resposta de 750 mg. Abans de treure més aigua acolorida, preguntem: Com es podria modelar el treball del ronyó al cap de quatre hores més? Una part de l'alumnat respondrà que hauríem de treure 250 ml més d'aigua de color i substituir-los per 250 ml més d'aigua clara. A continuació, preguntem: Si féssim això, quants mil·ligrams de medicament quedarien a la sang? Deixem que l'alumnat en faci una predicció. N'hi haurà que respondran 500 mg. No fem, encara, cap correcció. Tornem a preguntar per un període de quatre hores més. Molt sovint, l'alumnat diu que, novament, s'eliminen 250 mg del medicament. Finalment, preguntem: Llavors, si repeteixo aquest procés quatre vegades, el medicament estarà completament fora del meu cos? Acostumen a respondre que sí.

Ara, traiem 250 ml de l'aigua de color per segona vegada i ho substituïm per 250 ml d'aigua clara. Repetim i preguntem: Si faig això una vegada més, desapareixerà tot el color i quedarà aigua clara? L'alumnat, ara, pot veure que això no passarà.

Deixem que facin un petit debat sobre si la seva predicció era correcta. S'han d'adonar que la segona vegada que hem tret 250 ml d'aigua de color, només hi havia 750 mg del medicament a la sang, de manera que, en

substituir una quarta part només s'han eliminat $\frac{1}{4} \cdot 750 = 187,5 \text{ mg}$.

Repartim la fitxa de treball en la qual, en primer lloc, han d'emplenar una taula on aniran calculant la quantitat de medicament que queda a la sang cada 4 hores. Posteriorment, n'hauran de fer la representació gràfica.



Font: Núria Serra

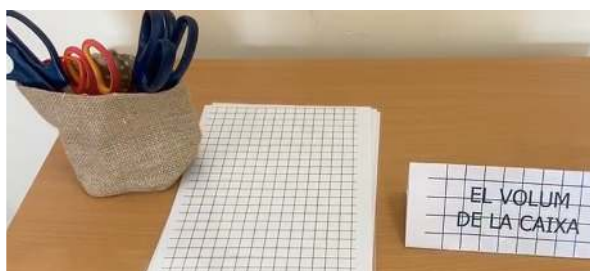
Preguntem a l'alumnat si el gràfic és lineal i per què sí o per què no. No és lineal perquè no s'elimina la mateixa quantitat de medicament durant cada període de quatre hores. Fem observar els gràfics a l'alumnat i els expliquem, si no ho saben, el tipus de funció que estan veient. Després, amb l'ajuda d'un programa de geometria dinàmica es troba la funció d'ajust i es responen les últimes preguntes de la fitxa.

Saber #4.ALG.MM.A, saber #4.ALG.MM.C i saber #4.ALG.MM.D

Per treballar també els **sabers #4.ALG.MM.A, #4.ALG.MM.C i #4.ALG.MM.D**, hi ha l'activitat [Quina és la funció](#), adaptació de la professora Núria Serra al català de l'activitat de l'NCTM «What's the function», ja comentada al document de 2n d'ESO. Ara, a 4t i a diferència de 2n d'ESO, l'alumnat ja disposa de totes les eines per poder fer totes les activitats. Hauran de fer quatre experiments i recollir-ne les dades. Tot seguit les representen en uns eixos de coordenades per, posteriorment, trobar amb el GeoGebra la funció que millor s'ajusta a l'experiència fent servir regressió. Finalment, es comparen els resultats de tots els grups. A continuació, es mostra detalladament com es pot aplicar a classe l'activitat. L'alumnat treballa en grups de 3 o 4 i necessiten un dispositiu per fer anar el GeoGebra. A l'aula hi ha preparades 4 estacions i, a cada estació, hi ha el material per fer un dels experiments:



Font: Núria Serra



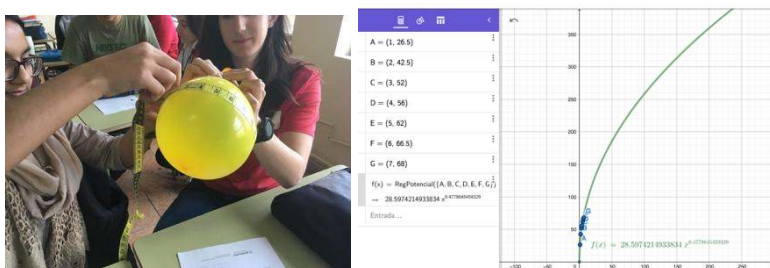
Font: Núria Serra

L'alumnat té uns 15 minuts per agafar el material, fer l'experiment, recollir les dades, conjecturar quina funció pensa que s'ajusta més i fer proves amb el GeoGebra per trobar aquesta funció. Un cop trobada, emplenen un formulari i adjunten una imatge de la funció.

Si tots els grups passen pels quatre experiments, es necessiten dues sessions per fer l'activitat: la primera, per fer tres dels quatre experiments i, la segona, per fer el quart i la posterior posada en comú dels resultats.

Cada grup té a mà un tutorial que explica pas a pas com buscar la funció amb el GeoGebra i un guió per fer cada experiment. Els experiments són els següents:

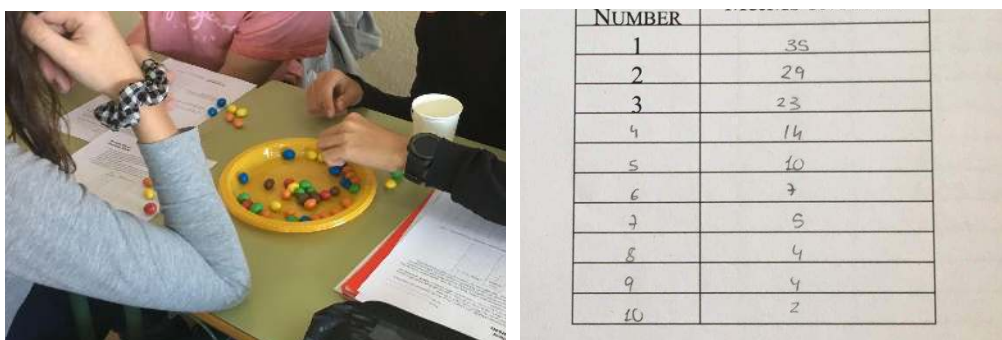
Estació 1: Seleccionar una persona per inflar un globus. Una altra persona mesura la longitud de la circumferència al punt més ample del globus, en cm, després de cada respiració. Les altres persones van anotant els resultats.



Font: Núria Serra

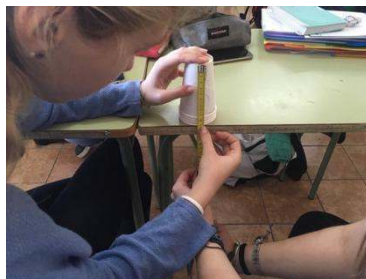
Es tracta d'una funció irracional. És interessant interrogar-los sobre si hi ha restriccions o no al domini i recorregut. Què passa amb el (0,0)? Té sentit contemplar aquest punt?...

Estació 2: S'aboquen M&Ms (que són en una caixeta) sobre un plat i s'escampen perquè no quedin els uns sobre els altres. Es retiren del plat tots els M&Ms en els quals la lletra M apareix a la part superior, es compten i s'anoten els M&Ms restants (els que queden al plat). A continuació, es posen els del plat un altre cop a la caixeta, es remena bé i es tornen a abocar al plat. Repetirem el mateix procediment: eliminarem els M&Ms que tinguin la lletra M a la part superior i comptarem els que queden al plat per, posteriorment, posar-los a la caixeta i mesclar-los una altra vegada. Repetim el procés fins que no en quedi cap. Obtindrem una funció exponencial decreixent.



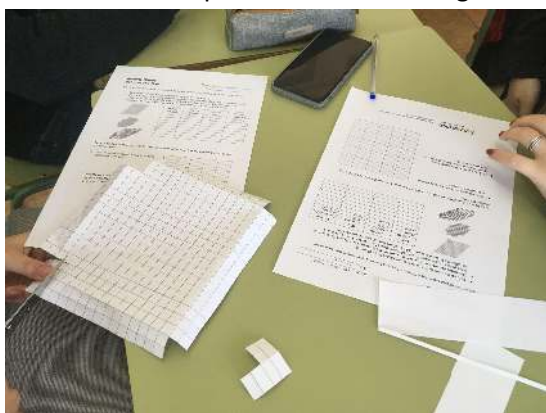
Font: Núria Serra

Estació 3: Es vol conèixer l'altura d'una pila de gots. Es mesura l'altura d'un got. S'apilen un parell de gots sobre el primer i es mesura l'altura total. Es van afegint gots de 2 en 2 o de 3 en 3 i se'n mesura l'altura. Aquest és l'experiment en què és més senzill de reconèixer la funció que millor s'ajusta a les dades. Es tracta d'una funció afí.



Font: Núria Serra

Estació 4: S'agafa un tros de paper quadriculat (els quadrats fan 1 cm de costat). Es tracta d'anar tallant quadrats de cada cantó, els quatre de la mateixa mida. Es pleguen els costats per formar una caixa en forma d'ortoeidre i s'ha de determinar el volum de la caixa. Es fa el mateix procediment cada cop que es tallen quadrats dels cantons. Podeu consultar l'[activitat ampliada](#) al web del CREAMAT. El resultat és una funció polinòmica de tercer grau.



Determine the volume of the box and complete the following chart. Repeat this process on other pieces of grid paper for several different-sized cut squares. You may sketch or visualize the boxes if you can find the volume without constructing each box.

HEIGHT (IN CM)	LENGTH (IN CM)	WIDTH (IN CM)	VOLUME (IN CUBIC CM)
1 cm	10 cm	10 cm	100 cm ³
2 cm	8 cm	8 cm	128 cm ³
3 cm	6 cm	6 cm	108 cm ³
4 cm	4 cm	4 cm	64 cm ³
5 cm	2 cm	2 cm	20 cm ³

Let x be the height of the box and let y be the volume of the box. Plot the ordered pairs (x,y) and analyze the data.

1. What category of function can be used to approximate the data?

2. Find the equation for a function that approximates the data.

$y = 4x^3 - 20x^2 + 100x$

Font: Núria Serra

Algunes de les preguntes que podem fer a l'alumnat per treure el màxim profit de l'activitat són:

- Expliqueu com heu triat el tipus de funció.
- En quines experiències, si n'hi ha, es poden fer servir altres tipus de funcions per modelar les dades?
- Quines restriccions hi ha pel que fa al domini i al recorregut?
- Per a quins experiments heu obtingut una corba que descriu exactament les dades? A quins experiments la corba obtinguda no les descriu exactament? Per què creus que passa?
- ...

Per acabar l'activitat, podem fer la inversa d'aquesta proposta, donar-los un tipus de funció o un gràfic i fer-los suggerir un context que es correspongui a aquest gràfic.

La proposta és una adaptació d'una activitat explicada a l'article «Generating and Analyzing Data» (Stevens, 1993) de la revista *Mathematics Teacher* de l'NCTM.

Saber #4.ALG.MM.E

En qualsevol de les activitats i situacions proposades anteriorment a l'alumnat, serà important parar atenció al **saber #4.ALG.MM.E**, sobretot quan les activitats comportin investigar, manipular i descobrir. Aturar-se a comprovar si s'està anant per bon camí, valorar críticament les solucions d'un problema, veure si són coherents i adequades, i prendre decisions en conseqüència és essencial en el bon fer matemàtic. Cal donar espai a l'aula perquè això passi, animar els estudiants a reflexionar contínuament sobre la feina que estan fent i sense donar veredictes, i propiciar que siguin ells mateixos qui facin l'anàlisi amb l'ajuda de les nostres preguntes, que els aniran guiant, si cal. Si l'activitat és llarga (diverses sessions), es pot fer una aturada de

tota la classe en un punt intermedi per posar en comú els resultats obtinguts fins al moment i fer aportacions de millora entre tots.

Variable

Sabers

- A. Paràmetres en l'expressió algebraica de funcions. [AMP] #ALG.ID, #ALG.RF
- B. Ús de variables en situacions contextualitzades. #SOE
- C. Variables en distribucions estadístiques bidimensionals. #EST.DI, #EST.IN
- D. Evolució històrica del concepte de variable i de l'àlgebra simbòlica com a llenguatge de la ciència. [AMP] #SOE

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

El concepte de variable s'ha d'introduir de manera progressiva, per tal que permeti que la comprensió adquireixi significat de manera natural. A 4t d'ESO, s'aprofundeix en aquest concepte i es posa l'accent en els paràmetres i en l'ús de variables en diversos contextos. Les variables estadístiques també s'han anat introduint gradualment durant els tres primers cursos d'ESO (qualitatius nominals, qualitatius ordinals, quantitatius discretes i quantitatius contínues). Ara, a 4t, es va més enllà i es treballen les relacions entre variables en distribucions estadístiques bidimensionals. El **saber #4.ALG.VA.D** convida a fer una mirada històrica i a prendre consciència del valor del llenguatge simbòlic en el camp de la ciència, la qual cosa contribueix a completar el coneixement algebraic a l'ESO.

Comentaris sobre les connexions

El fet de tractar expressions algebraiques de funcions fa que el **saber #4.ALG.VA.A** estigui connectat amb els blocs Igualtat i desigualtat i Relacions i funcions d'aquest mateix sentit. Així mateix, el **saber #4.ALG.VA.C** està naturalment connectat amb els blocs Distribució i Inferència del sentit estocàstic. Els **sabers #4.ALG.VA.B** i **#4.ALG.VA.D** presenten una connexió evident amb el sentit socioemocional, en particular amb el **saber #SOE.CE.L**: «Interès per establir connexions entre conceptes matemàtics, amb altres disciplines i per analitzar i comprendre el món amb una mirada matemàtica».

Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

En aquest bloc no s'ha destacat cap saber essencial, però sí que se n'han destacat dos d'ampliació: els **sabers #4.ALG.VA.A** i **#4.ALG.VA.D**. Es pot donar la circumstància que el treball amb paràmetres en l'expressió algebraica de funcions es pugui deixar per a estudis posteriors. Pel que fa a l'evolució històrica del concepte de variable i de l'àlgebra simbòlica com a llenguatge de la ciència, seria desitjable que es pogués tractar, però, depenent del temps de què es disposi, es podrà fer amb més o menys profunditat.

Observacions sobre alguns sabers específics

Un paràmetre és un símbol que pot prendre diferents valors, cadascun dels quals caracteritza un membre particular d'una família d'expressions algebraiques, funcions, corbes, etc. Per a aquest membre particular el valor del paràmetre serà constant, però serà diferent per a un altre membre de la família. Els paràmetres solen definir el context concret d'aplicació, ja que, fixat un d'ells, quedarà ben definit el context i la relació entre les variables. Si es canvia el valor del paràmetre, es tindrà un altre membre de la família d'expressions algebraiques, funcions, corbes, etc. Suposem que desitgem estudiar les característiques dels gràfics de la següent família de funcions: $y=3x+1$, $y=3x+2$, $y=3x+5$, $y=3x-3$, $y=3x+3$, $y=3x-2$, $y=3x+6$, $y=3x-4$ Es tracta de funcions afins, representades per rectes en el pla. Cadascuna és una funció que relaciona les variables x i y , però la diferència entre elles és el terme independent. Cada valor t d'aquest terme independent definirà una funció concreta, una recta determinada. Tota la família podrà expressar-se com $y=3x+t$ on t és un paràmetre cadascun dels valors del qual dona una funció concreta de la família anterior que relaciona les

variables x i y . A 4t d'ESO, l'ús de paràmetres se circumscriurà pràcticament a l'àmbit dels gràfics de famílies de funcions, però és important que l'alumnat entengui bé que un canvi en un paràmetre en modifica la funció i el gràfic donant una altra funció de la mateixa família, que compregui que un paràmetre actua com una variable quan es tracta de distingir casos dins d'una família (per exemple, d'una família de funcions) i actua com una constant quan s'estudia un d'aquests casos concrets.

Respecte al **saber #4.ALG.VA.B:**

L'aplicació de la matemàtica en diferents contextos, molt vinculada a les connexions externes, sovint se centra en la construcció de models matemàtics que permeten descriure, analitzar i preveure situacions o fenòmens de l'entorn científic, tecnològic, mèdic i econòmic, entre d'altres. Aquests models quasi sempre inclouen variables que descriuen situacions de canvi. Això ajuda l'alumnat a donar un significat concret a les variables, a captar-ne la importància per descriure contextos en evolució i a descobrir aplicacions de les matemàtiques. Per aquest motiu, aquest saber està clarament connectat amb el **saber #SOE.CE.L** del sentit socioemocional, com ja s'ha indicat.

Respecte al **saber #4.ALG.VA.C:**

Al llarg dels tres primers cursos d'ESO, s'han introduït variables estadístiques qualitatives (nominals i ordinals) i quantitatives (discretes i contínues) en el context de distribucions unidimensionals, que tracten una sola variable. A 4t d'ESO, s'introdueixen les distribucions bidimensionals, on es treballen dues variables conjuntament per estudiar-ne la relació. En el cas de les variables qualitatives, aquesta relació es pot analitzar amb taules de contingència, mentre que, per a les variables quantitatives, s'empren representacions amb núvols de punts i l'estudi de la correlació i la regressió, que permet fer prediccions.

Respecte al **saber #4.ALG.VA.D:**

Aquest saber incorpora a la formació de l'alumnat un context històric relacionat amb la gènesi del llenguatge algebraic en matemàtiques, un aspecte fonamental de l'estructura interna de la matemàtica i una eina essencial per a altres ciències. Sense una notació matemàtica precisa i consistent, les afirmacions matemàtiques, i científiques en general, expressades amb paraules estarien sotmeses a inexactituds, ambigüitats i errors d'interpretació. Les expressions matemàtiques constitueixen un llenguatge que permet codificar informació de manera exacta i que resulta útil per expressar regularitats i patrons en el comportament de fenòmens en física, química i altres ciències.

Galileo Galilei deia (Galilei, 1623):

La filosofia està escrita en aquest grandíssim llibre que contínuament tenim obert davant dels ulls (em refereixo a l'univers), però no es pot entendre si primer no s'aprèn a comprendre la llengua i a conèixer els caràcters amb què està escrit. Està escrit en llengua matemàtica, i els caràcters són triangles, cercles i altres figures geomètriques, sense els quals és humanament impossible entendre'n cap paraula; sense aquests, és com vagar inútilment per un obscur laberint.

Al llarg de molts segles, els problemes matemàtics s'abordaven des del raonament geomètric. Un exemple d'això són les construccions geomètriques d'al-Khwarazmí (o al-Khuwarizmí) per justificar els algorismes de resolució d'equacions de segon grau. Precisament, el mot «àlgebra» prové d'una obra d'al-Khwarazmí: *Al-Kitab al-muhtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala* (*Compendi de càlcul per reintegració i comparació*).

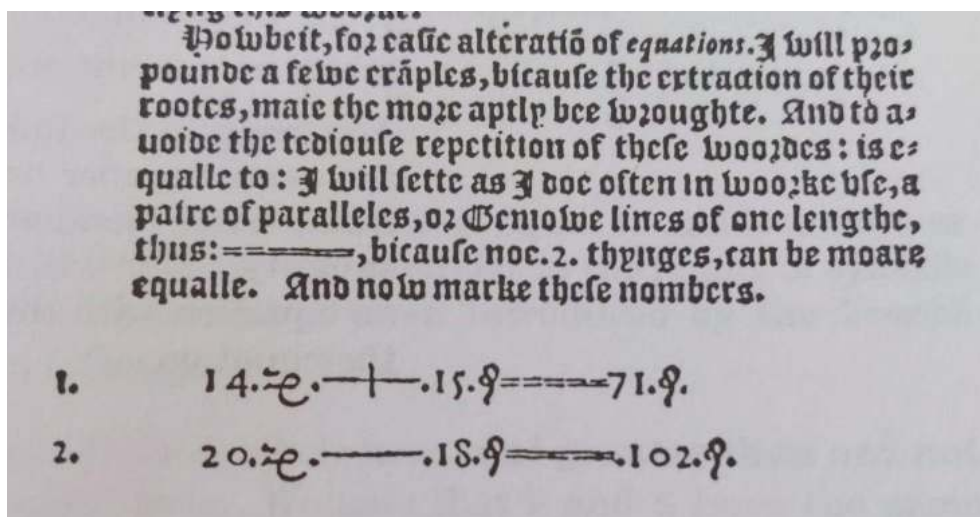
L'ús del llenguatge simbòlic és força recent. Iolanda Guevara, en la seva tesi doctoral, *L'ús de contextos històrics a l'aula de matemàtiques de secundària: El cas concret de la visualització en la connexió geometria-àlgebra*, afirma (Guevara, 2015):

En la història de l'àlgebra, la formulació dels problemes en forma de llenguatge simbòlic ha estat una qüestió relativament tardana –al segle XVI, amb François Viète i altres autors– (...), però, en canvi, el raonament geomètric és el que s'ha utilitzat durant segles per justificar els procediments

matemàtics emprats en la resolució de problemes que avui dia, en l'àmbit escolar, es resolen mitjançant el llenguatge algebraic.

El matemàtic francès François Viète va fer el primer pas cap al concepte actual de variable en començar a utilitzar lletres per representar magnituds desconegudes i constants, establint així les bases de l'àlgebra simbòlica. L'obra *La Géométrie* (1637) de René Descartes va ser crucial per difondre l'ús de lletres per representar variables, emprant les lletres x, y, z per a variables desconegudes i a, b, c per a constants conegudes. Amb el desenvolupament del càlcul diferencial i integral per part d'Isaac Newton i Gottfried Wilhelm Leibniz, el concepte de variable va evolucionar, i va passar a entendre's com una entitat que pot canviar de valor de manera contínua. El 1749, Leonhard Euler va definir una funció com una quantitat variable que depèn d'una altra quantitat.

Potser mereix un interès especial la introducció del signe igual, protagonista destacat en moltes expressions algebraiques. El signe igual (=) va ser inventat per Robert Recorde l'any 1557, en la seva obra *The Whetstone of Witte*. Va utilitzar dues línies paral·leles perquè, segons ell, «no hi ha dues coses que puguin ser més iguals». A més, va argumentar que emprava aquesta abreviatura per evitar la tediosa repetició de les paraules «és igual a». La imatge següent, extreta del llibre *Mathematics: from the birth of numbers* (Gullberg, 1997), mostra el text on Recorde introdueix el signe igual:



Font: *Mathematics: from the birth of numbers*, de Jan Gullberg (Gullberg, 1997)

Al text que apareix immediatament abans dels dos exemples finals, s'inclou la frase ja citada «no hi ha dues coses que puguin ser més iguals». Els exemples corresponen respectivament a les equacions: $14x + 15 = 71$ i $20x - 18 = 102$.

Naturalment, els apunts anteriors no pretenen ser un escrit sobre la història de les matemàtiques (això excediria els objectius d'aquest document), sinó unes notes per destacar aspectes que seria desitjable transmetre a l'alumnat de secundària perquè valori l'origen i la importància del llenguatge simbòlic, que actualment és, de fet, el llenguatge de la ciència.

Com s'ha indicat, aquest saber està connectat amb el sentit socioemocional i, en concret, amb el **saber #SOE.CE.L**, atès que el llenguatge formal i les eines de càlcul i manipulació simbòlica són dos dels grans instruments que les matemàtiques ofereixen a altres àrees del coneixement.

Recursos i activitats

[Recursos i activitats generals per al bloc de sabers](#)

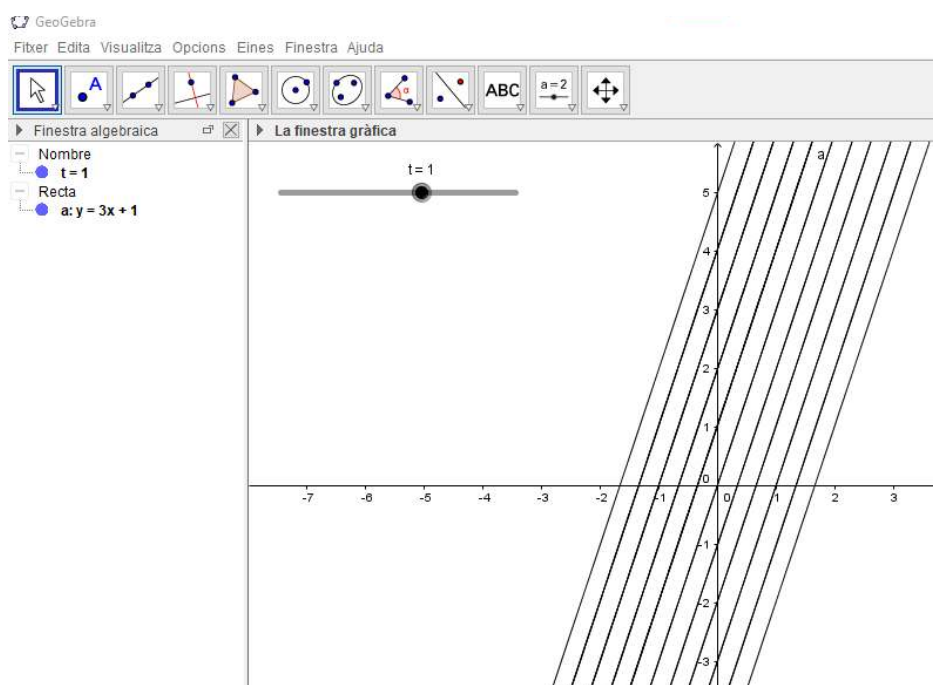
En general, el treball entorn dels sabers d'aquest bloc s'ha de dur a terme mentre es posa en joc la idea de variables en models matemàtics, en igualtats i desigualtats algebraïques, en funcions, en estadística, etc. Així, un recurs comú a tots els sabers del bloc és intentar destacar, sempre que hi hagi l'oportunitat, quines són les variables que es posen en joc, què signifiquen i el sentit de la seva relació.

Recursos i activitats per treballar sabers concrets

Respecte al **saber #4.ALG.VA.A:**

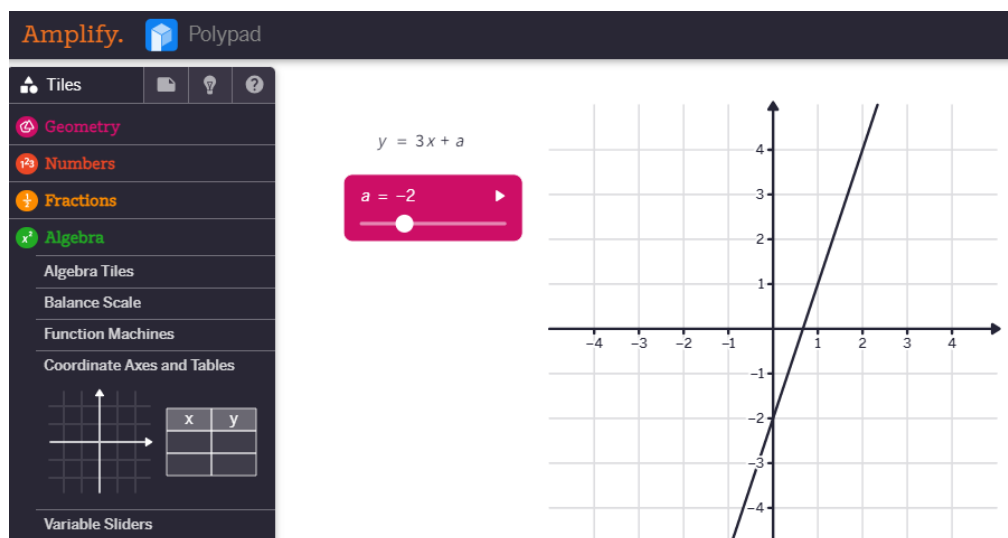
Tal com s'indica a l'apartat de descripció i orientacions, a 4t d'ESO, l'ús de paràmetres es limitarà essencialment a l'àmbit dels gràfics de famílies de funcions. En aquest camp es poden esmentar dos recursos molt interessants:

- En la versió 5 del GeoGebra, els «punts lliscants» permeten representar paràmetres. La imatge següent és una captura de pantalla en la qual el punt lliscant t es mou en un rang de -5 a 5 amb increments d'1. S'ha activat la traça de la recta per tal de visualitzar algunes de les rectes de la família $y = 3x + t$. El valor de t canvia movent el punt lliscant. En el moment de la captura de pantalla, el valor de t era 1.



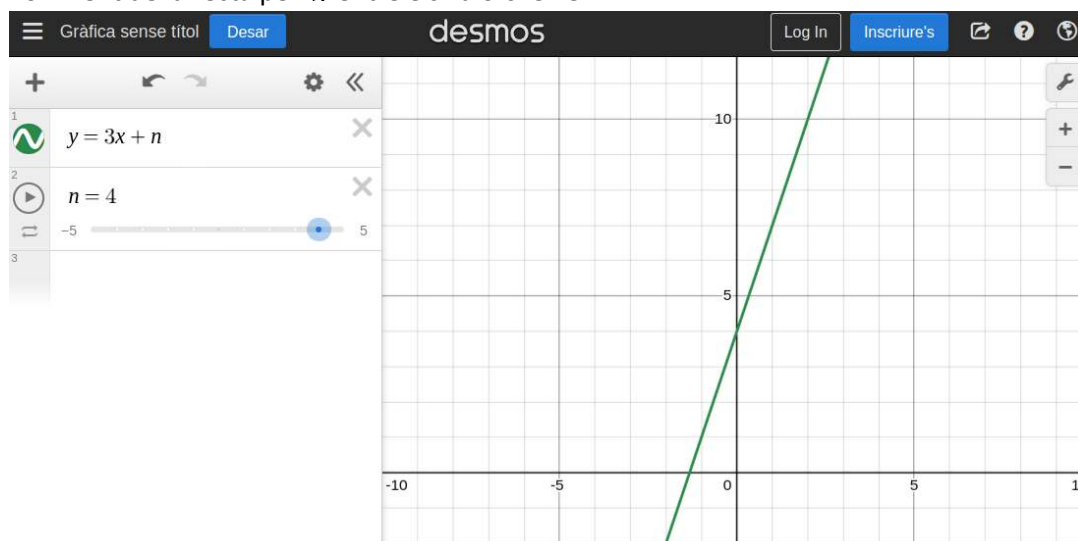
Font: elaboració pròpia amb GeoGebra

- Les variables *sliders* (lliscants) de [Polypad d'Amplify](#) actuen com a paràmetres per representar famílies de funcions. Vegeu la captura de pantalla següent:



Font: elaboració pròpia amb Polypad d'Amplify

- [DESMOS](#) anomena “barres lliscants” als paràmetres d’una expressió algebraica. La imatge mostra la gràfica per $y = 3x + n$ amb ordenada a l’origen 4. Les opcions d’animació permeten reproduir el moviment de la recta per n entre els valors -5 i 5.



Font: elaboració pròpia amb DESMOS

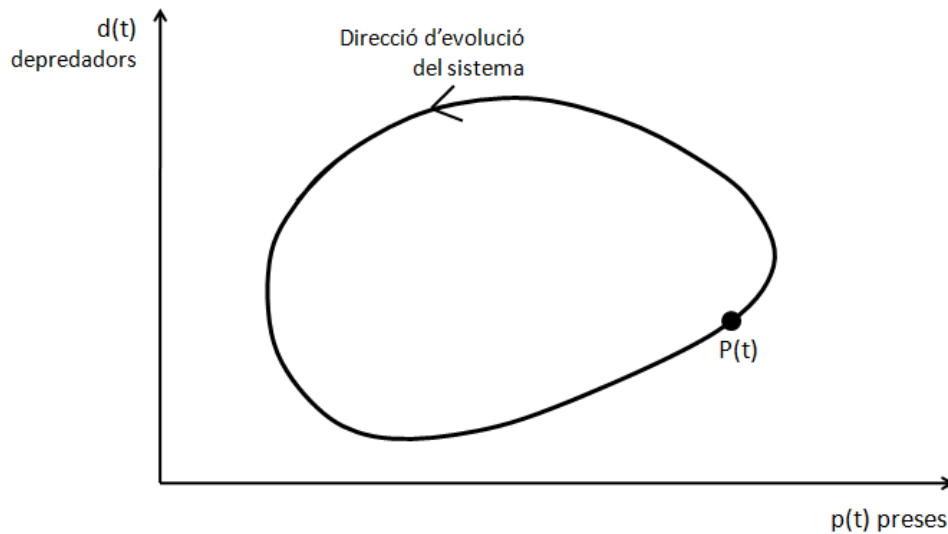
Respecte al **saber #4.ALG.VA.B:**

Un bon recurs per destacar l'ús de variables en situacions contextualitzades consisteix a portar algunes d'aquestes situacions a classe, fent observar la presència de les variables i el sentit de la relació que s'estableix entre elles. Una dinàmica possible és que sigui el mateix alumnat qui les explori per equips en diferents contextos i, després en faci una petita exposició a classe, per posar en relleu connexions amb altres àrees del coneixement. A continuació, a tall d'exemple, es presenten, molt resumidament, quatre d'aquestes situacions.

- El canvi entre escales de temperatura: graus Celsius i graus Fahrenheit.
La relació que expressa el canvi de graus Celsius a graus Fahrenheit, $f = 1,8c + 32$, és un bon exemple de relació afí entre dues variables: c representa la temperatura en graus Celsius i f , la

temperatura en graus Fahrenheit. Es pot convidar l'alumnat a fer-ne una representació gràfica i a calcular algunes imatges i antiimatges significatives (com punts de fusió i d'ebullició, per exemple).

- La relació espai-temps en moviments uniformes i en moviments uniformement accelerats.
En cinemàtica, aquesta relació descriu com canvia la posició (x) d'un objecte en funció del temps (t) tant en el moviment uniforme (velocitat constant) com en el moviment uniformement accelerat (acceleració constant). En el cas del moviment uniforme, es complirà la relació $x = x_0 + v \cdot t$ on x_0 és la posició inicial i v és la velocitat. En el cas del moviment uniformement accelerat, l'expressió algebraica és $x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$ on x_0 és la posició inicial, v_0 és la velocitat inicial i a és l'acceleració. En el primer cas, es té un model afí i, en el segon cas, un model quadràtic. Es poden fer representacions gràfiques (rectes i paràboles respectivament) i estudiar-ne les característiques.
- La relació entre la pressió i el volum d'un gas ideal a temperatura constant.
La llei de Boyle-Mariotte estableix la relació entre la pressió (P) i el volum (V) d'un gas ideal a temperatura constant. Aquesta llei afirma que $P \cdot V = k$ (on k representa una constant), és a dir, que, si P_1 i V_1 són la pressió i el volum respectivament d'un gas en un moment i P_2 i V_2 són la pressió i el volum en un altre moment, llavors $P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2$. Observem que, en aquest cas, les variables són P i V i que la seva relació, $P = \frac{k}{V}$, és una funció de proporcionalitat inversa.
- El sistema presa-depredador en el camp de l'ecologia.
Aquest és un model matemàtic molt simplificat (actualment superat), però que és molt il·lustratiu. Durant el primer quart del segle passat es van portar a terme recerques estadístiques als mercats de peix de Venècia, Trieste i Fiume, per on passaven pràcticament totes les captures del nord de l'Adriàtic. Es van observar fluctuacions notables en les espècies pescades. Durant els anys de la Primera Guerra Mundial, en què es va reduir la pesca, va augmentar la proporció de captures de peixos depredadors (taurons, rajades, etc.) que mengen peixos més petits. Aquest augment de depredadors va fer disminuir el nombre de peixos presa, una disminució que, al seu torn, va reduir els depredadors per manca d'aliment, amb la qual cosa van tornar a augmentar els peixos petits... Cap al 1925, el matemàtic italià Vito Volterra es va proposar trobar una explicació d'aquestes oscil·lacions mitjançant mètodes matemàtics. Si bé les condicions que va deduir Volterra tenen a veure amb el camp de les equacions diferencials, molt lluny dels sabers de l'ESO, la idea intuïtiva de la dinàmica que es produeix és més elemental i es pot representar gràficament en el pla. Si en un moment t , $p(t)$ representa la població de preses en un ecosistema i $d(t)$ la població de depredadors, el parell $P(t) = (p(t), d(t))$ és un punt del pla que, amb el pas del temps, descriu una corba tancada com la de la figura següent:



Font: elaboració pròpia

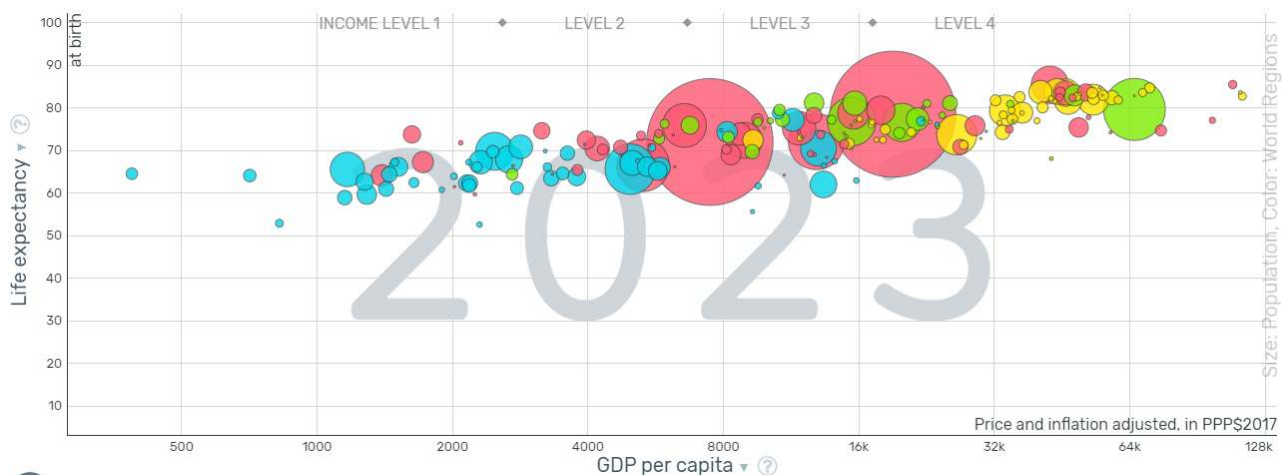
En aquest model s'observen dues variables: el nombre de preses i el nombre de depredadors. Es tracta d'un model excessivament simplificat amb moltes febleses. Herbert Amann, a *Els models matemàtics són insubornables* (Amann, 1994) escriu:

El sistema depredadors-preses és un model matemàtic molt senzill, i dràsticament simplificat, que avui només té valor històric i com a il·lustració. Malgrat que algunes suposicions que conté no resisteixen una crítica seriosa, és precisament a causa de la seva simplicitat i accessibilitat que pot servir per perfilar una part del paper que les matemàtiques juguen en la descripció de fenòmens complexos.

L'article [Diseñando un simulador de ecosistemas. Una experiencia STEM de enseñanza de dinámica de los ecosistemas, funciones matemáticas y programación](#) de Jordi Domènech Casal (Domènech-Casal, 2020) descriu i analitza una activitat molt potent que, entre d'altres, inclou tasques al voltant del model presa-depredador que s'acaba d'esmentar. En [aquesta carpeta](#), hi ha un material excel·lent elaborat per en Jordi Domènech Casal per aplicar aquesta activitat a l'aula, en particular el model presa-depredador.

Respecte al **saber #4.ALG.VA.C:**

Un recurs potent en diversos sentits, i en particular per entendre la idea de relació entre dues variables estadístiques, és el [Gapminder](#). De segur que aquest recurs és citat en altres llocs d'aquesta proposta, però aquí no es podia deixar de referenciar. A continuació, s'inclou una captura de pantalla de Gapminder en què es mostra un diagrama de dispersió (en forma de gràfic de bombolles) en què es relaciona el producte interior brut per càpita (eix d'abscisses) de diferents països del món amb la seva esperança de vida (eix d'ordenades). Cada país es representa per un cercle el radi del qual és proporcional a la seva població i en el qual el color depèn del continent.



Font: [Gapminder](#)

Un dels aspectes més atractius de Gapminder és que permet estudiar dinàmicament l'evolució de la relació entre variables al llarg del temps. Resulta espectacular veure els canvis de manera contínua i és una invitació a interpretar determinats «canvis sobtats» des d'una perspectiva històrica (per exemple, els efectes de guerres). Això estableix una connexió rellevant amb ciències socials. Hi ha un ampli ventall de variables associades als països que es poden emparellar per estudiar-ne la correlació: mortalitat infantil, emissions de CO₂ per càpita, relació entre el nombre de noies i el de nois a les escoles de primària i secundària, despesa pública per a cada estudiant de secundària com a percentatge del PIB per càpita, nombre de telèfons mòbils per cada 100 habitants, nombre d'ordinadors per cada 100 habitants, densitat de població, edat mitjana de la població, taxes d'atur per franges d'edat i gènere, vehicles de motor de 4 rodes per cada 1.000 habitants, mortalitat per accidents de trànsit per cada 100.000 habitants, i moltes més. L'estudi de la definició i el significat de cada variable és molt rellevant en si mateix (l'aplicació ho descriu molt bé), i la visualització de la relació entre dues variables qualssevol i l'evolució al llarg del temps resulta tant interessant com atractiva. L'anàlisi de la relació entre determinades parelles de variables estadístiques i la visualització permeten contribuir a l'assoliment dels Objectius de Desenvolupament Sostenible (ODS). És molt recomanable l'apartat de [materials per a l'ensenyament](#) de la pàgina de Gapminder.

Respecte al **saber #4.ALG.VA.D:**

Una bona activitat per treballar aquest saber és convidar l'alumnat a buscar fórmules expressades en llenguatge matemàtic del camp de la física, la química, la biologia, etc. que relacionin dues variables, tot prenent consciència del seu significat i del sentit de la relació que l'expressió algebraica estableix entre elles. Això enllaça molt bé amb els recursos que s'han exposat per al **saber #4.ALG.VA.B**. Tanmateix, allà es posava l'accent en la idea de variable, mentre que aquí es posa l'accent en els aspectes històrics i en la constatació de la importància que té el llenguatge simbòlic en la ciència.

Igualtat i desigualtat

Sabers

- Diferents significats del signe igual (comparació, definició, assignació, transformació, etc.).
- Revisió i consolidació de la resolució d'equacions de segon grau.
- Idea de polinomi.
- Factorització i arrels de polinomis. **[AMP]** **#ESP.VM**
- Resolució d'equacions racionals, irracionals, exponencials i trigonomètriques senzilles. Comprovació i discussió, si escau, de les solucions. **[AMP]**
- Resolució de problemes d'equacions en situacions contextualitzades. **[ESS]** **#ALG.MM**
- Resolució algebraica i gràfica en el pla de sistemes de dues equacions lineals. Classificació en sistemes compatibles-determinats, compatibles-indeterminats o incompatibles. **#ESP.LS**

- H. Concepte d'inequació, d'incògnita i de solució.
- I. Analogies i diferències amb les equacions.
- J. Resolució d'inequacions amb una incògnita. #NUM.QU
- K. Solució geomètrica d'una inequació lineal amb dues incògnites. Regió solució. #ESP.VM
- L. Solució geomètrica d'un sistema d'inequacions lineals amb dues incògnites. Regió solució. [AMP] #ESP.VM
- M. Igualtats per expressar funcions dependents d'un paràmetre. [AMP] #ALG.VA, #ALG.RF

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

El bloc Igualtat i desigualtat de 4t d'ESO és una continuació del treball dut a terme en aquest mateix bloc als cursos anteriors, i en particular a 3r d'ESO. En concret, se centra, d'una banda en la resolució d'equacions polinòmiques, en la resolució gràfica i classificació de sistemes d'equacions i, especialment, en el treball sobre inequacions, la relació amb les equacions i la resolució gràfica d'inequacions amb dues incògnites, així com sistemes de dues equacions lineals amb dues incògnites. El treball amb igualtats i desigualtats a 4t d'ESO també es focalitza en la idea de polinomi, la factorització en casos senzills i la relació amb les seves arrels, així com la resolució d'algunes equacions no polinòmiques (racionals, exponencials i trigonomètriques) senzilles.

Comentaris sobre les connexions

Les connexions de diversos sabers d'aquest bloc amb blocs d'altres sentits i amb altres blocs del mateix sentit algebraic són nombroses. Les més rellevants són les següents:

- El **saber #4.ALG.ID.A** es connecta tant amb el bloc **#4.NUM.SO** (sentit de les operacions) com amb el bloc **#4.ESP.VM** (visualització i modelització geomètrica).
- El **saber #4.ALG.ID.F**, resolució de problemes d'equacions en situacions contextualitzades, es connecta amb el bloc **#4.ALG.MM** d'aquest mateix sentit.
- El **saber #4.ALG.ID.K** i el **saber #4.ALG.ID.L** es connecten tots dos amb el bloc **#ESP.VM** (visualització i modelització geomètrica) del sentit espacial.

Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

Es considera el **saber #4.ALG.ID.F** com a saber essencial. Com ja s'ha dit en cursos anteriors, la resolució de problemes contextualitzats és clau i s'ha d'estendre a tot aquest apartat. Les condicions descrites en l'enunciat d'un problema es tradueixen a llenguatge matemàtic sovint en forma d'equacions i també d'inequacions. En la resolució posterior és important no perdre de vista, dins del possible, el significat dels símbols que es manegen i de les relacions que s'estableixen. Un cop obtinguda la solució, cal interpretar-la en el context del problema i valorar-ne la plausibilitat. És formatiu explicitar aquest procés i que l'alumne en prengui consciència.

D'altra banda, els **sabers #4.ALG.ID.D**, **#4.ALG.ID.E** i **#4.ALG.ID.L** es consideren sabers d'ampliació.

Observacions sobre alguns sabers específics

Respecte al **saber #4.ALG.ID.C**, considerem important entendre els polinomis com a models generalitzats de nombres enters en base x . També es pot establir un paral·lelisme entre les operacions amb nombres i les operacions amb polinomis.

En relació amb el **saber #4.ALG.ID.D**, el **saber #4.ALG.ID.E** i el **saber #4.ALG.ID.G**, cal tenir en compte els següents aspectes:

- La representació gràfica de les solucions d'una equació o inequació lineal amb dues incògnites correspon als conjunts de punts del pla les coordenades dels quals compleixen la condició: rectes i semiplans.
- La representació gràfica de les solucions d'un sistema de dues condicions (equacions o inequacions) lineals amb dues incògnites correspon als conjunts de punts del pla les coordenades dels quals compleixen les dues condicions: intersecció de rectes o de semiplans.

També en relació amb el **saber #4.ALG.ID.F**, com ja dèiem a tots els cursos anteriors, és important tenir en compte la importància de l'ús de contextos. Puig Adam, en el seu decàleg (1960) diu: *No oblidar l'origen concret de les matemàtiques i els processos històrics de la seva evolució*. Uns anys abans Lobachevski (1792-1856) havia afirmat: *No hi ha cap branca de les matemàtiques, per abstracta que sigui, que no es pugui aplicar algun dia a l'estudi dels fenòmens del món real*. Totes dues cites, des de punts de vista ben diferents, apel·len a la relació entre les matemàtiques i els diferents contextos.

En l'ensenyament de les matemàtiques, les característiques de les activitats d'aprenentatge són un punt clau. Si aquestes activitats tenen com a objectiu la construcció de sabers matemàtics de naturalesa abstracta, cal partir de concrecions d'aquests sabers. D'altra banda, si el que es vol és mostrar les diferents utilitats de les matemàtiques i aplicar-les per resoldre problemes diversos, també cal concretar aquells contextos en els quals és possible i té sentit aplicar les matemàtiques del currículum. És precisament en l'aplicació de sabers a contextos diferents on es manifesta una part important de la competència matemàtica.

Per tant, en el procés d'aprenentatge matemàtic hi ha, com a mínim, dos moments en què els contextos són rellevants:

- a) En l'inici del procés, d'una banda, per interessar a l'alumnat, creant reptes que vulgui intentar resoldre i, de l'altra, per proporcionar-li un suport concret i significatiu per construir nou coneixement.
- b) En la part final del procés, per mostrar que les matemàtiques són útils per analitzar i resoldre situacions d'àmbits molt diversos i, al mateix temps, per consolidar i aplicar els aprenentatges duts a terme.

Per tal d'aportar orientacions sobre quins contextos poden ser els més adequats per introduir a les classes de matemàtiques, pensem que cal anar més enllà de les classificacions generals com els anomenats contextos quotidians o contextos reals, expressions que semblen incloure tot allò que no és directament matemàtic, ja que, si no precisem una mica, podria semblar que tot context no matemàtic pot ser adequat. Presentem, sense ànim d'exhaustivitat, una tipologia de contextos:

Context proper a l'alumne. Interessos, vivències i necessitats dels alumnes. Són aquelles situacions que interessen a l'alumnat perquè els afecten directament. S'inclouen aquí les situacions en què es reclama a l'alumne una participació directa i vivencial (teatralitzacions, jocs de rol, etc.) i també les experimentacions a partir de materials manipulatius. Aquest context se situa, majoritàriament, en la part introductòria del procés d'aprenentatge.

Context quotidià. Entorn social, local, laboral i cultural proper a l'alumnat. Són situacions que es poden comprendre per la proximitat i, per aquest motiu, és important analitzar-les i conèixer-les emprant les matemàtiques. Són especialment adequades aquelles que, a més de socialment rellevants, s'han produït en un moment pròxim al del treball a classe (eleccions, fenòmens apareguts en mitjans de comunicació, actes culturals, esports, etc.).

Context històric. Molts dels sabers del currículum de l'ESO van ser creats fa molts segles per resoldre problemes que tenen sentit quan s'emmarquen en l'època en què es van desenvolupar. Utilitzar aquests problemes i les solucions originals pot servir per donar sentit als sabers involucrats, veure'n l'origen i també conèixer altres maneres de fer matemàtiques d'acord amb els coneixements del seu temps.

Context lúdic. Les recreacions matemàtiques, els reptes i els jocs són un context molt extens que es pot relacionar amb la majoria dels sabers matemàtics. Tot i que podria entrar dins del context quotidià (jugar és una activitat humana rellevant i adequada a l'adolescència) és molt ampli i permet dissenyar activitats de durada molt diversa. La idea de repte i l'interès intrínsec de moltes recreacions i jocs és un dels punts clau de la rellevància d'aquest context.

Context científic i tecnològic. Les relacions entre les diferents ciències experimentals, ciències de la salut i la tecnologia amb les matemàtiques són moltes i, per tant, els contextos científics poden ser apropiats tant per construir conceptes matemàtics i comparar-los amb els seus equivalents en altres ciències, com també per aplicar sabers matemàtics ja construïts. Cal tenir en compte que tant aquest context com els dos següents tenen relació amb altres matèries del currículum, per la qual cosa, és adequat introduir-los d'acord amb el treball fet en les matèries relacionades.

Context social. Moltes problemàtiques de les ciències socials (geografia, història, economia, etc.) i del món d'avui dia (desigualtats, guerres, pandèmies, canvi climàtic, etc.) necessiten les matemàtiques per ser analitzades i, al mateix temps, ajuden a donar sentit a molts sabers, especialment el sentit estocàstic.

Context humanístic. L'art, la fotografia, la música, la literatura i la resta de disciplines dites humanístiques comparteixen totes elles relacions amb les matemàtiques, en els dos sentits esmentats: ajudar a construir conceptes matemàtics per mitjà de plasmacions artístiques i proporcionar activitats d'aplicació de les matemàtiques en l'anàlisi de problemàtiques d'aquestes disciplines.

Context matemàtic. Fer matemàtiques és, moltes vegades, treballar en el context pròpiament matemàtic i en les connexions internes que hi ha entre els diferents sabers; mantenir la idea de repte, que porta a voler fer allò que es proposa, i basar-se en aquells sabers que ja poden considerar-se concrecions, per tal de construir-ne d'altres.

Entenem que una tipologia de contextos com aquesta pot ajudar a trobar exemples de situacions per ser treballades a l'aula, procurar que els contextos abastin l'ampli ventall proporcionat i també ser compartides amb el treball en altres matèries, sempre tenint en compte les característiques i els interessos de l'alumnat.

Pel que fa al **saber #4.ALG.ID.H**, al **saber #4.ALG.ID.I**, al **saber #4.ALG.ID.J** i al **saber #4.ALG.ID.K**, cal tenir en compte la relació que tenen amb l'expressió algebraica de funcions. Tots ells representen punts d'ancoratge per a connexions amb el bloc **#4.ALG.RF**, Relacions i funcions, i el bloc **#4.ALG.MM**, Model matemàtic. En aquest sentit, hi ha alguns aspectes que són conceptualment clau:

- La distinció entre equació i funció i, paral·lelament, entre incògnita i variable.
- La vinculació entre funcions i models matemàtics que corresponen a contextos concrets.
- Les relacions entre l'expressió algebraica d'una funció i la representació gràfica.

En relació amb el **saber #4.ALG.ID.M**, igualtats per expressar funcions que depenen d'un paràmetre, que és d'ampliació, es proposa la introducció de paràmetres en casos senzills i treballat de manera connectada amb els blocs Variable i Relacions i funcions. La idea central és veure com diferents valors del paràmetre afecten la funció i les característiques.

Recursos i activitats

Un llibre molt interessant ple d'activitats i recursos per al treball amb l'àlgebra és el llibre d'Abraham Arcavi i d'Alex Friedlander, *Task and competencies in the teaching and learning of algebra*. NCTM 2017. Moltes de les activitats d'aquest llibre promouen l'establiment de connexions entre diferents sabers de l'àlgebra. Per exemple, en la imatge següent, extreta de la pàgina 136 del llibre esmentat, trobem l'activitat: «Relació entre expressions, funcions i equacions», que connecta la simplificació d'expressions algebraïques, la resolució d'equacions i la representació gràfica d'expressions algebraïques de funcions. Tot i que aquesta activitat podria haver-se fet a 3r d'ESO, és a 4t on creiem que aquestes connexions tenen més sentit, tant per relacionar els diversos sabers del bloc Igualtat i desigualtat com per establir connexions amb els altres blocs del sentit algebraic.

Aquesta activitat es relaciona amb el **saber #4.ALG.ID.A.**

L'enunciat de l'activitat tal com apareix en el llibre (Friedlander & Arcavi, 2017) és:

1. In the following three columns, you will find algebraic expressions, functions, and equations related to each other.

Find domains and perform the required operations.

Simplify the expressions	Graph the functions	Solve and locate the solutions on the graph
$\frac{x-2}{2} + \frac{x-2}{4}$	$y = \frac{x-2}{2} + \frac{x-2}{4}$	$\frac{x-2}{2} + \frac{x-2}{4} = 2$
$\frac{x-2}{2} - \frac{x-2}{4}$	$y = \frac{x-2}{2} - \frac{x-2}{4}$	$\frac{x-2}{2} - \frac{x-2}{4} = 2$
$\frac{x-2}{2} \cdot \frac{x-2}{4}$	$y = \frac{x-2}{2} \cdot \frac{x-2}{4}$	$\frac{x-2}{2} \cdot \frac{x-2}{4} = 2$
$\frac{x-2}{2} : \frac{x-2}{4}$	$y = \frac{x-2}{2} : \frac{x-2}{4}$	$\frac{x-2}{2} : \frac{x-2}{4} = 2$

Font: *Tasks and competencies in the teaching and learning of algebra* (Friedlander & Arcavi, 2017)

Pel que fa al **saber #4.ALG.ID.E.**, al capítol 5 del llibre *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria* (Calvo et al., 2016) es pot trobar l'activitat 5.24 que teniu a continuació:

Actividad 5.24. Para cada una de las siguientes funciones racionales:

$$f(x) = \frac{x+5}{2x-1} \quad f(x) = \frac{3x-1}{2x-3} \quad f(x) = \frac{2x+1}{x-2} \quad f(x) = \frac{3x+5}{4x-3} \quad f(x) = \frac{4x-1}{2x-4}$$

Encuentra el dominio y el recorrido de cada función y los puntos de corte a los ejes. Completa, para cada una de las funciones, la tabla:

x	1		5		-2		20	
y		1		5		-2		20

¿Qué observas al comparar los datos de las distintas funciones?

Encuentra otros ejemplos de funciones racionales que presenten características similares.

Esta actividad permite observar que, dado un par de valores correspondientes a las coordenadas de un punto que pertenece al gráfico de la función, el par que resulta al invertir dichos valores también pertenece al gráfico de esta, es decir, los gráficos son simétricos respecto de la recta $y = x$. Este tipo de trabajo, de cierta complejidad, se abordará al final de la educación secundaria.

Font: *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria* (Calvo et al., 2016)

Com s'indica, es tracta d'una activitat de final d'ESO (a la nostra proposta és un saber d'ampliació) en la qual es treballen les expressions algebraïques de funcions racionals, valors numèrics, i es relacionen amb propietats d'aquestes funcions.

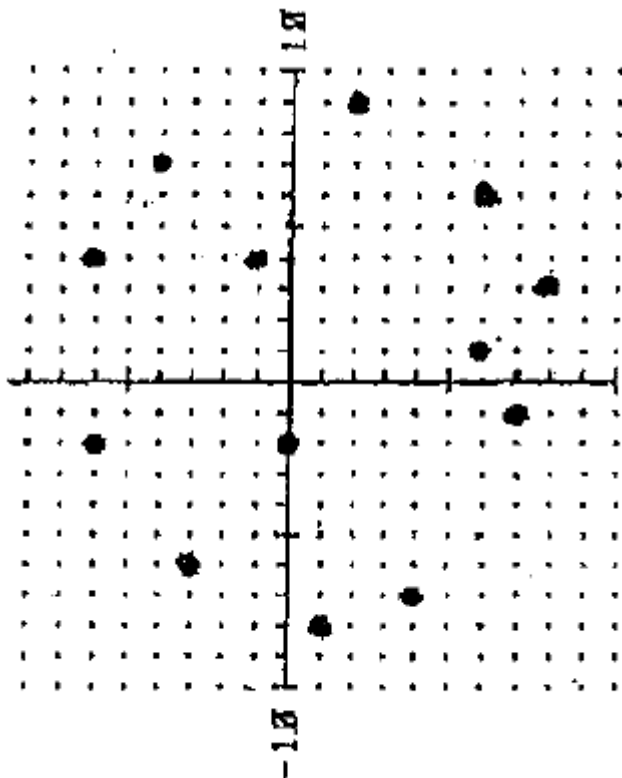
En relació amb el **saber #4.ALG.ID.K**, tot i que ja s'ha citat en cursos anteriors, un bon recurs per il·lustrar la correspondència entre equacions i inequacions amb dues incògnites i representació en el pla és el que s'anomena «joc de rol de coordenades» (Aubanell, 2017).

També es pot consultar l'ARC, en les activitats [Equacions de rectes](#) i [Inequacions amb dues incògnites](#).

Es pot veure un [vídeo](#) d'aquesta activitat feta pel grup CÚBIC a la FME de la UPC en la 20a Jornada de l'ABEAM.

En relació amb el mateix **saber #4.ALG.ID.K** i el **saber #4.ALG.ID.L**, es pot adaptar una activitat que apareix en l'article de la revista *Números*, vol. 38, «Y en matemáticas, los que instruimos ¿qué construimos?» (Arcavi, 1999). L'activitat original fixa un conjunt de punts sobre un pla cartesià (en dona les coordenades) i demana trobar les equacions de les funcions que passen pel màxim nombre possible de punts assenyalats. De fet, la situació es planteja com un joc, en què els punts són globus i es tracta de tocar-los amb l'equació trobada. El nombre de punts obtinguts creix exponencialment d'acord amb els punts tocats. Fins aquí és una activitat relacionada amb l'equació d'una funció, però podem ampliar-la a treballar-la amb inequacions demanant que es trobi una inequació amb dues incògnites tal que en la seva regió solució hi hagi un cert nombre de punts de tots els assenyalats inicialment, o bé, anàlogament, que es trobin dues inequacions de manera que en la regió solució hi hagi un cert nombre de punts.

La situació que proposa Abraham Arcavi en l'article esmentat parteix de la imatge següent:



Font: «Y en matemáticas, los que instruimos ¿qué construimos?» (Arcavi, 1999)

És clar que la situació inicial pot variar assenyalant la quantitat de punts que es vulgui.

Relacions i funcions

Sabers

- Revisió del concepte i propietats de les funcions polinòmiques (constants, lineals o de proporcionalitat directa, afins i quadràtiques) i de proporcionalitat inversa. #ESP.VM, #ALG.MM, #EST.IN
- Estudi i aplicació en contextos de la funció exponencial i les seves característiques: representació, estudi de la relació entre la gràfica i el valor de la base en l'expressió algebraica de la funció exponencial. #ESP.VM, #ALG.MM, #EST.IN
- Estudi de l'efecte dels paràmetres en diferents tipus de funcions estudiades. #ESP.LS, #ALG.PA, #ALG.VA
- Estudi i aplicació en contextos de les funcions definides a trossos i les seves característiques. [AMP] #ESP.VM, #ALG.MM
- Anàlisi de les propietats de diferents tipus de funcions a partir de la seva gràfica: creixement i decreixement, màxims i mínims, domini i recorregut, simetries, continuïtat, etc.
- Ús de recursos digitals i interactius per a la representació de taules i gràfics. #ALG.PC
- Extracció d'informació d'una funció donada gràficament, mitjançant una taula, una expressió algebraica i verbalment. #ALG.ID

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

Tal com es comenta als documents dels cursos anteriors, un dels conceptes matemàtics fonamentals que s'estudien al llarg de l'etapa de secundària és el de funció. Les funcions ens permeten estudiar fenòmens de

canvi i relacions entre variables, per la qual cosa són una part fonamental en la modelització de situacions contextualitzades (**#4.ALG.MM**) i permeten establir connexions amb altres camps de les ciències o les ciències socials.

Ara, a 4t d'ESO, s'ha de seguir el camí iniciat als cursos anteriors, partint del fet que les funcions proporcionen contextos per pensar en les relacions de canvi i procurar que l'alumnat no es quedi amb una visió poc profunda de les funcions que limiti el concepte de funció a una fórmula o al seguiment de pautes per aconseguir un gràfic. Al llarg de tot aquest bloc Relacions i funcions, és important continuar tenint en compte, tal com es proposa també als cursos anteriors, el bloc Variable, **#4.ALG.VA**, que cal anar treballant conjuntament donada l'estreta relació que hi té.

Si a 2n d'ESO es proposava començar l'estudi de funcions lineals i afins i, a 3r, se suggeria continuar amb l'estudi de relacions de proporcionalitat inversa i quadràtiques analitzant aquestes relacions, per començar a construir famílies de funcions a partir de les característiques, ara a 4t, es recomana seguir la mateixa línia amb les funcions exponencials. Una eina que hem de tenir present en l'estudi d'aquestes característiques són els programes de geometria dinàmica, que poden ajudar a millorar-ne la comprensió conceptual.

Comentaris sobre les connexions

Com ja s'ha comentat a l'apartat Reflexions generals, és evident la connexió amb el bloc Variable, **#4.ALG.VA**, i també amb el bloc Igualtat i desigualtat, **#4.ALG.ID**, ja que no es pot deslligar l'estudi de les característiques de les funcions de la resolució d'equacions, vist tant des del punt de vista analític com gràfic.

A través de les funcions, podem descriure molts fenòmens, ja siguin quotidians, d'altres àmbits de coneixement o fins i tot de les matemàtiques mateixes. Estem parlant, per tant, de modelització matemàtica i establint connexions directes amb els blocs **#4.ALG.MM** i **#4.ESP.VM**. També s'estableixen connexions amb **#4.ESP.LS** quan es treballa l'efecte del pendent i l'ordenada a l'origen de les funcions lineals i afins.

Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

Tenint en compte que és l'últim curs de l'educació obligatòria i veient el nivell d'abstracció necessari per treballar tots els conceptes del bloc, s'ha considerat que no s'havia de posar cap saber essencial malgrat que es considerin tots ells molt importants per a tots els alumnes, especialment per a aquells que pretenen continuar el seu camí acadèmic fent batxillerat.

Com que les funcions definides a trossos conceptualment són diferents de la resta i, per definició, incorporen totes les altres, s'ha decidit que aquest saber s'havia de considerar d'ampliació. Malgrat aquesta consideració, es poden trobar contextos que involucrin les funcions a trossos que permeten treballar aquest tipus de funcions senzillament i fent que s'entengui bé el concepte.

Observacions sobre alguns sabers específics

L'estudi de la funció exponencial, **saber #4.ALG.RF.B**, proporciona una comprensió essencial d'un tipus de funcions que són àmpliament utilitzades en ciències, tecnologia i altres camps. La comprensió de les seves propietats, com ara l'evolució del creixement i el decreixement exponencial, ajuda a aprofundir en la comprensió conceptual de les propietats de les funcions i a enfortir els coneixements sobre càlcul i àlgebra.

Es continua treballant el **saber #4.ALG.RF.E**, introduït a 3r, per tal d'aportar a la comprensió conceptual de la idea de funció. Les gràfiques permeten veure intuïtivament com es comporta una funció. Entendre les propietats com el creixement, el decreixement, els màxims, els mínims, les simetries, etc. a partir de la gràfica, ajuda a visualitzar com les funcions canvien i a identificar patrons ràpidament. D'altra banda, treballant els gràfics de les funcions, l'alumnat desenvolupa habilitats per analitzar i interpretar informació de manera crítica.

Respecte al **saber #4.ALG.RF.F**, els recursos digitals de geometria dinàmica poden ajudar l'alumnat a veure clarament com les relacions entre les variables es modifiquen de manera immediata quan canvien certs valors. Aquesta interactivitat facilita la comprensió i permet l'estudi de moltes situacions de canvi: com canvia el gràfic d'una funció quan modifiquem els coeficients d'una equació, com es comporten les funcions en diferents intervals del seu domini o com es transformen les gràfiques a mesura que es modifiquen certs paràmetres, per exemple. Aquests recursos permeten que l'alumnat vegi i experimenti amb els conceptes de manera més intuïtiva, ajudant a millorar la comprensió de les relacions funcionals.

Respecte al **saber #4.ALG.RF.G**, anàlogament als cursos anteriors, es pretén que l'alumnat sigui capaç d'extreure informació d'una funció donada a través de qualsevol de les representacions possibles. A l'hora de fer-ho a partir de gràfics, és interessant treballar també amb situacions no quantificades per centrar el focus en els diferents tipus de variació d'una funció, i no només en els valors concrets que pren.

Recursos i activitats

Recursos i activitats generals per al bloc de sabers

Per treballar bona part dels sabers d'aquest bloc hi ha la seqüència didàctica a l'ARC [Funcions: interpretació de gràfiques](#) de la professora Victòria Oliu. La seqüència consta d'activitats introductòries com ara l'observació de la gràfica de la demanda elèctrica en temps real i l'observació de diferents gràfiques en aplicacions GeoGebra. També s'hi poden trobar activitats de repàs de funcions treballades a 3r d'ESO i activitats d'aprenentatge: seqüència d'aplicacions GeoGebra que permeten un treball individual, o en petits grups, amb propostes per observar i reflexionar. Per acabar, hi ha l'activitat final que tracta de fer un mapa conceptual de tot allò que s'ha treballat.

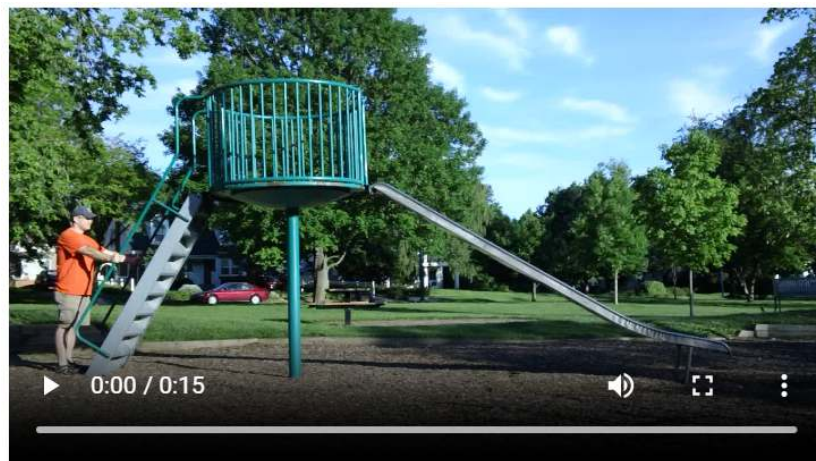
Al web [NRICH](#) i a [DESMOS](#) hi ha tot un seguit de propostes breus per treballar funcions i gràfiques amb diferents nivells de dificultat. La majoria de les propostes es poden dur a terme en una sessió i totes tenen en comú que involucren part dels processos matemàtics, com ara la resolució de problemes, el raonament, la comunicació i la representació.

Hi ha moltes més activitats d'aquest tipus al magnífic llibre *El lenguaje de funciones y gráficas* (Shell Centre for Mathematical Education, 1990). En aquest [enllaç](#) es pot descarregar la versió en castellà gratuïtament.

Recursos i activitats per treballar sabers concrets

Saber #4.ALG.RF.A

Per treballar el **saber #4.ALG.RF.A**, proposem l'activitat [Graficar historias](#) de DESMOS. En aquesta activitat, es presenten diferents situacions en format de vídeos curts de 15 segons, en cadascuna de les quals s'identifica clarament la variació d'alguna variable respecte al temps. A la primera activitat es demana, per començar, identificar totes les variables que es podrien estudiar a partir del vídeo: Quines són les diferents mesures que canvien a mesura que va avançant el vídeo?



Font: [Graficar historias](#), de DESMOS

A continuació, es concreten dues variables (altura de la cintura respecte al terra i temps transcorregut) i es demana als alumnes que dibuixin la gràfica de la relació. Un cop acabades es poden posar en comú les diferents produccions, començant per les més senzilles i acabant per les més precises, i es demana una valoració de cada una: una característica que els agradi i una que es pugui millorar. Posteriorment, cadascú millora la seva gràfica segons els consells rebuts.

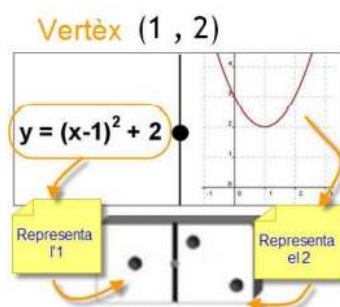
En les activitats següents es proposen noves situacions: omplir amb aigua un recipient, la quantitat d'ous que hi ha en una ouera tal com es van traient, i com varia la distància d'una persona a un punt fix si aquesta està en un gronxador que va fent voltes. En cada una d'aquestes situacions, la funció que la modelitza té característiques diferents que es poden analitzar en acabar l'activitat i poden donar peu a l'anàlisi de les característiques funcionals: continuïtat, periodicitat, etc. El cas de l'ouera proporciona una oportunitat per parlar de les funcions esglaonades i com dibuixar-les de manera precisa, per tal que un valor de la variable independent (en aquest cas, en un moment de temps determinat) no tingui mai dues imatges (el nombre d'ous).

Saber #4.ALG.RF.A i saber #4.ALG.RF.C

Un recurs interessant és [El dòmino quadràtic](#), activitat recollida a l'ARC.

L'objectiu de l'activitat és saber reconèixer la relació entre les diferents expressions algebraiques de la funció quadràtica i la forma gràfica, a partir de la determinació del vèrtex.

Cada petit grup d'alumnes crea un dòmino propi de 28 fitxes com aquesta:

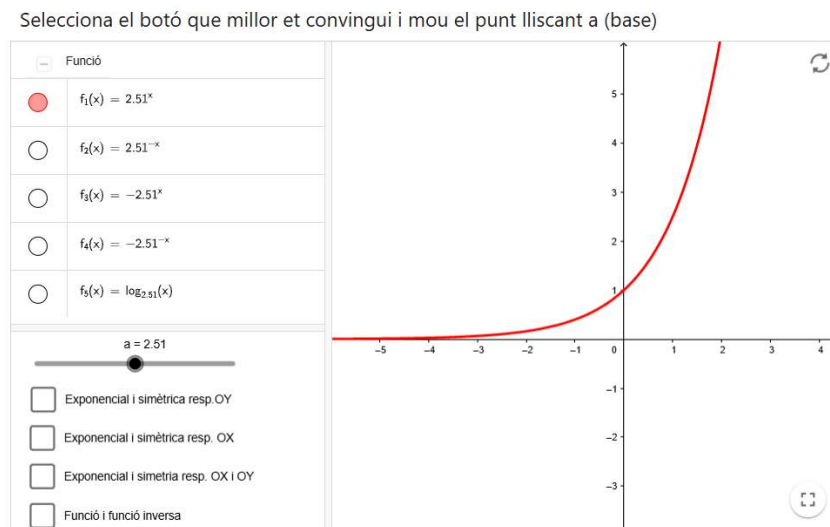


Font: [El dòmino quadràtic](#), de Ramon Bergadà

Se'ls presenta una plantilla buida que ells han d'omplir en format digital, amb la qual cosa caldrà que facin servir programari específic, com per exemple el GeoGebra, per a la representació gràfica, i un editor d'equacions, per a la part algebraica. Cada grup crearà el seu dòmino, que s'imprimirà i es plastificarà per poder jugar amb les regles habituals.

Saber #4.ALG.RF.B

Una aplicació molt interessant sobre la funció exponencial és el recurs [Funcions exponencials i logarítmiques](#) del professor Manel Martínez. La construcció permet visualitzar com canvia una funció exponencial quan se'n modifica el valor de la base, així com l'efecte dels signes tant en la base com en l'exponent i la funció inversa. També disposa d'una sèrie de preguntes per guiar-ne la descoberta.



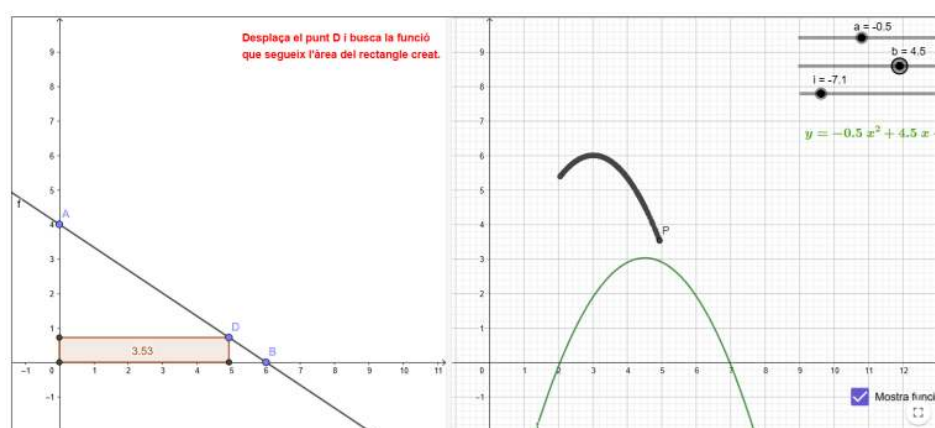
Font: [Funcions exponencials i logarítmiques](#), de Manel Martínez

Saber #4.ALG.RF.B

Per treballar la funció exponencial en context, hi ha el recurs a l'ARC [Les truites de l'estany](#) del professor Lluís Mora. Es proposa la situació següent: En un llac del Pirineu, s'han de repoblar les truites atès que cada any, per diversos motius, la població en disminueix. L'activitat està plantejada com un treball d'investigació, en què l'alumnat haurà d'elaborar primer una hipòtesi de treball i, després d'uns càlculs d'aplicació de la funció exponencial, haurà de portar a terme una recerca sobre com pot variar la població de truites a l'estany en funció de com canvien cadascuna de les tres variables. Per fer-ho, caldrà que emprin aplicacions o fulls de càlcul que hauran d'elaborar. En funció del nivell al qual estiguem treballant, podrem demanar l'obtenció d'una expressió algebraica general.

Saber #4.ALG.RF.C

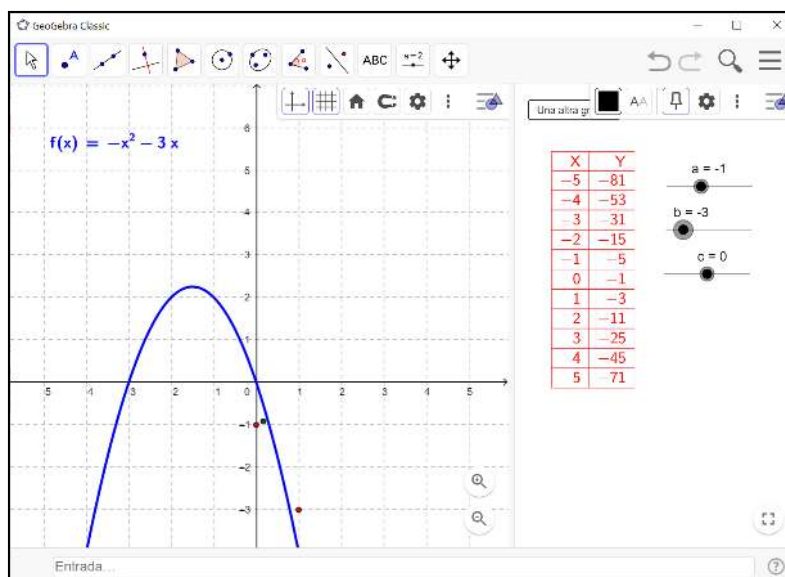
El recurs [Investiga amb funcions](#) del professor Guillem Bonet permet fer exploracions en diferents situacions per trobar el tipus de funció que les descriu. En cas que siguin funcions afins o quadràtiques, es proposa també ajustar els paràmetres per trobar-ne l'expressió algebraica, la qual cosa permet visualitzar intuïtivament quin és l'efecte que tenen en la representació gràfica de la funció. En cas que es vulgui anar més enllà, es pot estirar l'activitat treballant amb les expressions algebraiques per tal de justificar les conjectures que s'han fet respecte al tipus de funció que descriu la situació.



Font: [Investiga amb funcions](#), de Guillem Bonet

Saber #4.ALG.RF.A i saber #4.ALG.RF.C

Un altre recurs interessant per treballar l'efecte dels paràmetres en les funcions quadràtiques és [Paràboles a l'atzar](#) del professor Pep Bujosa, recollida a l'ARC. La proposta consta de tres activitats: la primera, d'introducció, permet observar els efectes de la variació dels paràmetres en la representació gràfica de la funció. La segona activitat consisteix a trobar l'expressió algebraica d'una funció quadràtica que passi per uns punts donats prèviament (en vermell a la imatge), tot ajustant els paràmetres de la funció dibuixada en blau.



Font: [Paràboles a l'atzar](#), de Pep Bujosa

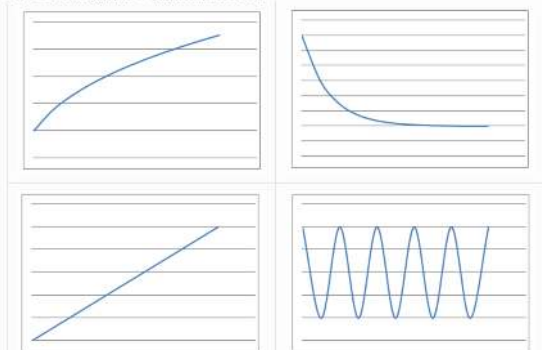
Per acabar, l'activitat 3 proposa trobar l'expressió algebraica de funcions quadràtiques a partir d'alguns dels seus punts. El mateix programa genera aleatòriament diferents funcions.

Per utilitzar els enllaços inclosos en l'activitat de l'ARC, caldrà tenir instal·lat el programari GeoGebra a l'ordinador. En cas contrari es pot accedir als recursos a través de GeoGebra en línia: [Activitat 1](#), [Activitat 2](#) i [Activitat 3](#).

Saber #4.ALG.RF.A i saber #4.ALG.RF.G

En l'activitat [What's that graph](#) de NRICH, es busca relacionar situacions reals de canvi amb les formes de les representacions gràfiques que les modelitzen. Es parteix d'una activitat oberta en la qual es demana buscar possibles contextos a partir d'unes gràfiques donades, amb creativitat, que l'alumnat faci conjectures, la qual cosa permetrà un debat interessant a l'aula. Posteriorment, es dona el conjunt de situacions perquè l'alumnat relacioni quina és la que correspon a cada gràfica de l'activitat anterior. Per acabar, es demana relacionar-ne cada una amb la seva expressió algebraica general.

Here are some graphs of physical processes.



Can you match the equations to the processes and graphs?

$y = A\sqrt{x}$	$y = A \sin(Bx) + A$	$y = Ax + B$	$y = \frac{A}{e^x} + B$
$y = Ax^2$	$y = Ax^2 + Bx + C$	$y = Ax$	$y = Ax + B$

© University of Cambridge

Font: [What's that graph](#), de NRICH

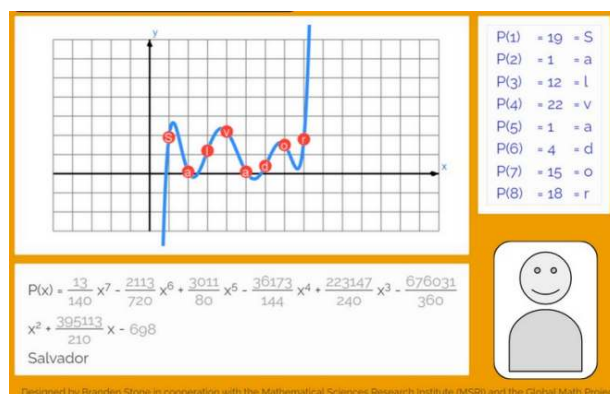
Una extensió de l'activitat consisteix a buscar el valor dels paràmetres en les expressions anteriors per tal d'ajustar al màxim possible les fórmules a la situació contextualitzada.

Saber #4.ALG.RF.D

Una possibilitat per introduir les funcions definides a trossos (**saber #4.ALG.RF.D**) és partir de la funció valor absolut. En aquesta activitat d'Underground Mathematics de la Universitat de Cambridge, [Absolutely](#), es parteix de la representació gràfica de la funció valor absolut per analitzar-la i estudiar-ne les característiques. L'activitat està plantejada a partir de preguntes que es formulen a l'alumnat per tal de promoure les conjectures, la conversa matemàtica i el debat a l'aula, per acabar sistematitzant el nou coneixement.

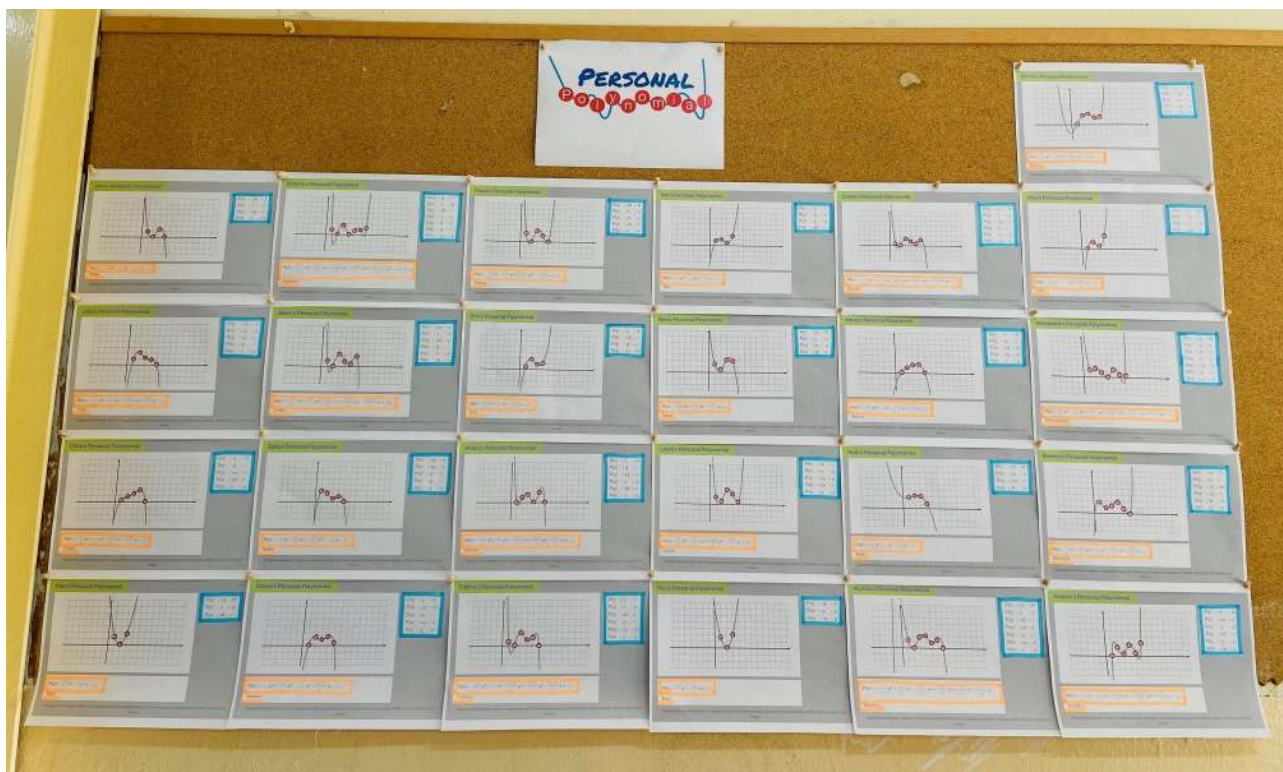
Saber #4.ALG.RF.E

Per treballar el **saber #4.ALG.RF.E**, les característiques de les funcions, es proposa l'activitat de l'ARC [El teu polinomi](#), una adaptació del Manel Martínez de l'activitat «Personal Polynomial» de James Tanton. Partint d'una llei de codificació, cada alumne crea el seu DIP (document d'identificació polinomial) en el qual apareixen tres maneres d'expressar una funció: taula de valors, expressió algebraica i gràfica.



Font: ["El teu polinomi"](#), de Manel Martínez

L'anàlisi de la targeta pròpia i la posada en comú amb el grup permetran estudiar les relacions que hi ha entre una forma d'expressió i les altres, així com algunes característiques de les funcions. Es pot optar per fer un mural al suro de la classe amb els polinomis de cada membre del grup. Acostuma a passar que el professorat d'altres matèries, en entrar a l'aula, pregunta pel mural i es dona l'espai idoni perquè l'alumnat expliqui el treball que han fet.



Font: elaboració pròpia

Saber #4.ALG.RF.F

Podem trobar molts exemples per treballar el **saber #4.ALG.RF.F**, ús de recursos digitals i interactius de geometria dinàmica per la representació de taules i gràfics, si anem a l'apartat de **funcions** dels materials de GeoGebra, al web GeoGebra.org. Hi ha tot un ventall de recursos ja preparats per treballar nombrosos aspectes relacionats amb les funcions i les seves característiques.

Per altra banda, gran part de les activitats que es proposen en aquest document per treballar els sabers d'aquest bloc Relacions i funcions incorporen l'ús de programes de geometria dinàmica.

Pensament computacional

Sabers

- Reconeixement de patrons: regularitats o similitud en dades i en processos. **#EST.PI**
- Avançament en la utilització de grafs com a eina de modelització en la resolució de problemes.
[AMP] #ALG.MM
- Resolució de problemes contextualitzats que posen en joc habilitats de pensament computacional.
[ESS] #NUM.EF, #NUM.RE, #EST.DI
- Creació, testatge, depuració i millora d'algorismes per resoldre problemes que puguin ser executats per una persona o per un ordinador. En particular, per simular experiments aleatoris per al càlcul aproximat de probabilitats. **#EST.PI**
- Idea de recursivitat aplicada a les matemàtiques. **[AMP]**
- Presència i ús de funcions matemàtiques en calculadores, programes de geometria dinàmica, fulls de càlcul, llenguatges de programació, etc. **#ALG.RF**
- Autoconfiança, persistència, adaptabilitat, flexibilitat, creativitat, col·laboració i gestió constructiva de l'error. **#SOE**

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

El bloc dels sabers del pensament computacional es construeix de manera integrada dins de l'àmbit matemàtic i estableix connexions naturals amb altres sentits, especialment en el que ens trobem, l'algebraic, i amb el procés de resolució de problemes. Aquesta integració facilita la introducció i desenvolupament d'idees computacionals dins del treball matemàtic, com la descomposició, el reconeixement de patrons, l'abstracció i els algorismes (competència 4).

Els sabers s'han seqüenciat per oferir opcions diverses: des del pensament «desendollat» fins a la creació de programes en llenguatges tant visuals com textuais, i l'ús de dispositius mòbils o robòtica. Això permet adaptar l'ensenyament a les necessitats de cada curs i recurs disponible, per tal de mantenir sempre un enfocament pràctic i contextualitzat.

Observacions sobre alguns sabers específics

Una de les competències clau en el pensament computacional i vinculada a la resolució de problemes és el reconeixement de patrons, el **saber #4.ALG.PC.A**. Aquesta habilitat és fonamental per ajudar els alumnes a descompondre problemes complexos, generar hipòtesis, establir models matemàtics o detectar regularitats o similituds per millorar l'eficiència en la resolució de problemes. A més, aquest saber ha de permetre simplificar i generalitzar situacions, de manera que proporcioni una manera més eficaç d'organitzar la informació, i de predir futurs comportaments o resultats. El reconeixement de patrons involucra:

- Poder crear regles generals per aplicar a situacions anàlogues.
- Sistematitzar problemes aparentment complexos, identificant-hi regularitats.
- Fer prediccions d'un comportament futur d'un conjunt de dades estadístiques.

L'ús de grafs, la base del **saber #4.ALG.PC.B**, és una estratègia molt potent per a la resolució de problemes, ja que permet representar relacions complexes entre objectes o situacions de manera visual i estructurada. Com que, per desenvolupar-lo, es requereix un coneixement extra i no explícit al currículum, s'ha considerat un saber d'ampliació. Ara bé, les seves aplicacions al món real, facilitades per l'ús de principis bàsics i la representació visual, poden ajudar molt al desenvolupament del **saber #4.ALG.PC.G**, i aporten confiança i estímuls, contextualitzant i aproximant les matemàtiques a l'alumnat.

Amb el **saber #4.ALG.PC.C**, ens referim a aplicar estratègies pròpies de la informàtica, com la descomposició, el reconeixement de patrons, l'abstracció i la creació d'algoritmes, per abordar, entendre i resoldre situacions complexes de manera lògica i estructurada.

El vincle entre programació i la simulació d'experiments aleatoris que remarca el **saber #4.ALG.PC.D** permet a l'alumnat treballar conceptes de probabilitat intuïtivament i aprofundir en el món de la programació i el pensament algorítmic, que són habilitats fonamentals per al desenvolupament del pensament computacional. Aquest saber no es vol focalitzar només en continguts estocàstics, sinó en problemes que requereixin gran quantitat de càlculs per poder arribar a una solució satisfactòria.

La idea de recursivitat que marca el **saber #4.ALG.PC.E** implica la definició d'una funció o procés que es refereix a si mateix per resoldre problemes de manera iterativa o repetitiva. És una eina que permet resoldre elegantment i eficaç certs tipus de problemes computacionals. També es pot vincular al concepte d'inducció matemàtica, fonamental per a la demostració de propietats matemàtiques. Com en el cas del **saber #4.ALG.PC.B**, i pel mateix motiu, s'ha considerat un saber d'ampliació.

El **saber #4.ALG.PC.F** involucra diferents dispositius digitals segons les necessitats:

- En el cas de les calculadores científiques es pensa tant en les funcions trigonomètriques, logarítmiques, exponencials, com en la funció factorial, nombres combinatoris, potència, arrel i conversió entre graus i radians o el que disposi cada model. Tot per tal de trobar el valor

directament i centrar-se en la interpretació del resultat, com en l'anàlisi de les propietats de les funcions.

- En els programes de geometria dinàmica, com GeoGebra o DESMOS, s'amplia el rang de funcions disponibles amb les pròpies del programa. L'ús permet focalitzar una anàlisi profunda de les propietats del problema geomètric, analític o estocàstic que es vol explorar.
- Els fulls de càlcul, com Excel, Google Sheets o LibreOffice Calc, permeten aplicar funcions matemàtiques per fer càlculs automàtics sobre grans quantitats de dades i combinar-les per generar-ne de noves.
- Finalment, els llenguatges de programació ofereixen la possibilitat d'implementar funcions matemàtiques per resoldre problemes algorísmics i simular processos matemàtics.

El pensament computacional no només tracta de desenvolupar competències tècniques, sinó també de potenciar habilitats personals i interpersonalment necessàries per resoldre problemes complexos. Aquí entra en joc el **saber #4.ALG.PC.G**. Quan l'alumnat s'enfronti a problemes nous i desconeguts, la confiança en les capacitats d'un mateix els permetrà explorar solucions sense por del fracàs inicial. El fet de desenvolupar algorismes, solucionar errors de codi o trobar patrons pot requerir molts intents; per tant, la persistència i la creativitat ajuden a superar obstacles i avançar cap a solucions eficients. En aquest context, sovint és necessari exercir l'adaptabilitat i la flexibilitat per reajustar els mitjans computacionals emprats als canvis en els requisits o a l'aparició de dificultats inesperades. Més enllà del pensament computacional les actituds esmentades són útils també en la resolució de problemes, en general, i es vinculen amb el sentit socioemocional, **#SOE**.

[La llei de Benford](#) es pot aplicar a diferents contextos reals i permet la reflexió a partir de la distribució dels dígit que hi apareixen. El sorprenent patró que sorgeix i el vincle amb el pensament estocàstic fan que pugui esdevenir una bona situació d'aprenentatge pel **saber #4.ALG.PC.A**, tal com es planteja a la [campanya d'estadística del CREAMAT](#). Les dades per estudiar poden ser qualssevol sempre que siguin reals. Es poden trobar a través d'un cercador escrivint «Open Datasets». Per exemple, la ciutat de Barcelona ofereix públicament les seves a «[OpenDataBCN](#)». Si s'analitza la taula de freqüències relatives del dígit inicial dels diferents nombres d'una mateixa variable quantitativa es pot concloure si la llista de nombres és un [conjunt de Benford](#).

Pel **saber #4.ALG.PC.B**, hi ha el problema clàssic dels ponts de Königsberg, que és l'origen d'aquest concepte i, a la vegada, la llavor d'una branca important de les matemàtiques. És ideal com a context històric i per mostrar com un problema del qual no se'n sabia la solució durant molts anys, s'acaba resolent creativament i senzillament, amb un procediment seqüencial. Tot plegat lliga amb el **saber #4.ALG.PC.C** i el **saber #4.ALG.PC.G**. El llibre *En busca del grafo perdido* (Grima, 2003) ofereix una introducció accessible al món dels grafs, ja que n'explica els conceptes clarament i amb problemes contextualitzats enginyosos.

Per treballar el **saber #4.ALG.PC.C**:

Tal com s'ha esmentat durant tota l'etapa, les tasques [Bebras](#) tenen per objectiu desenvolupar les habilitats del pensament computacional de l'alumnat, a més de la creativitat i la resolució de problemes. Per aquesta raó, encaixen perfectament en aquest **saber #4.ALG.PC.C**. La col·lecció realitzada des d'[Austràlia](#) és la més completa per trobar tots els nivells. De les activitats traduïdes al català, [HelloBebras](#), són ideals totes les del document [Nivell 3: 3r ESO - 2n Batxillerat](#) amb la seva guia docent. Es recomana fer la posada en comú de les estratègies de resolució i compartir la reflexió sobre les habilitats de pensament computacional que s'han posat en joc en el desenvolupament del repte (reconeixement de patrons, ús d'abstraccions, descomposició i anàlisi del problema, determinació de les eines més adequades per solucionar-lo, definició d'algorismes, etc.).

El problema de [Monty Hall](#), com a exemple del **saber #4.ALG.PC.D**, és un problema contextualitzat i amb fortes connexions externes, en particular amb la història i la societat. Alhora es tracten temes reals i propers a l'alumnat pel fet de parlar de premis i guanyos. Podem veure el problema i simular el joc a la web d'[Estadísticas para todos](#) amb diferents demostracions i amb una [presentació](#) per dur a classe. Una de les

maneres de comprovar quina hauria de ser la resposta correcta és fer una simulació amb moltes partides i veure'n les freqüències relatives de dues possibles opcions: canviant de porta i sense canviar de porta. A la [pàgina web d'ADEMGI](#), es pot obtenir una [fitxa per a l'alumnat](#), en què es tracta el tema des d'aquest punt de vista. També hi trobarem la [fitxa per al professorat](#).

Enunciat del «Problema de Monty Hall»:

Imagina que participes en un concurs de televisió. El presentador, Monty Hall, t'ofereix triar una de tres portes possibles. Darrere d'una de les portes, hi ha un cotxe (el premi desitjat) i, darrere de les altres dues portes, hi ha una cabra (premi no desitjat).

1. Primer, tries una de les portes, però encara no l'obres.
2. Aleshores, el presentador (que sap on és el cotxe) obre una de les dues portes que no has triat on hi ha una cabra.
3. Ara, tens una oportunitat: Monty t'ofereix canviar la tria inicial per l'altra porta que queda tancada.

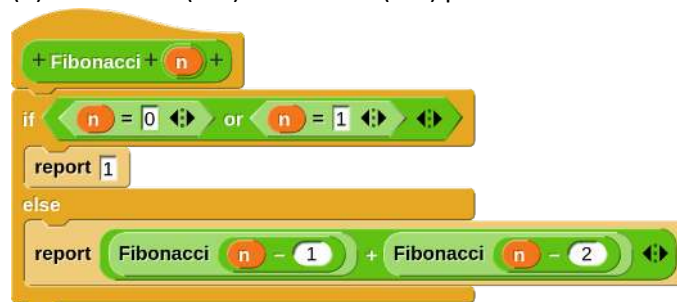
La pregunta és: Hauries de mantenir l'elecció inicial o canviar de porta per tenir més possibilitats de guanyar el cotxe?

Recursos directes per treballar el **saber #4.ALG.PC.D** poden ser:

- [Procés per arribar a la constant de Kaprekar](#).
- [Ús del mètode de Montecarlo pel càlcul del nombre pi](#).
- [Procés iteratiu associat a la conjectura de Collatz](#).
- [Resolució de problemes](#) extrets de l'[arxiu del projecte Euler](#).

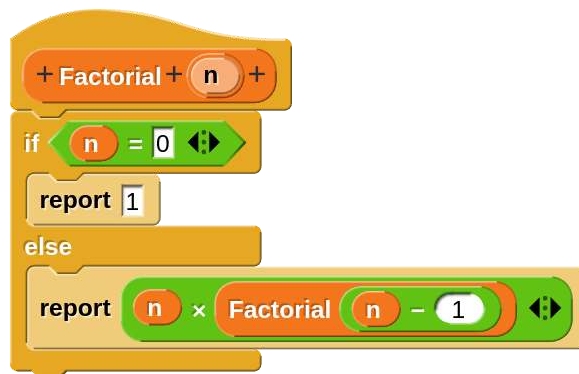
Alguns exemples en els quals es pot aplicar la idea de recursivitat que es parla al **saber #4.ALG.PC.E** són:

- La successió de Fibonacci:
 - $\text{Fibonacci}(0) = 0$
 - $\text{Fibonacci}(1) = 1$
 - $\text{Fibonacci}(n) = \text{Fibonacci}(n-1) + \text{Fibonacci}(n-2)$ per $n > 1$



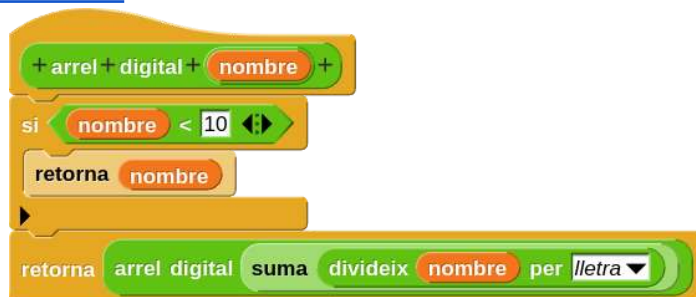
Font: elaboració pròpia

- El [factorial d'un nombre natural](#):
 - $\text{Factorial}(0) = 1$
 - $\text{Factorial}(1) = 1$,
 - $\text{Factorial}(n) = n * \text{Factorial}(n-1)$ per $n > 1$



Font: elaboració pròpia

- [L'arrel digital d'un nombre:](#)



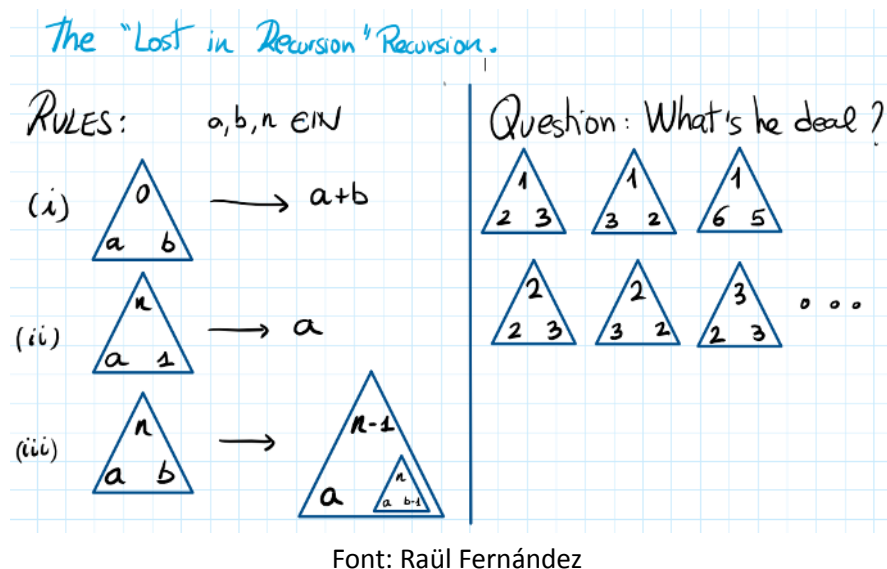
Font: elaboració pròpia

En aquest vídeo [Seymour Papert: on Logo HURDLES TAPE 3](#), es fa una descripció del concepte de recursió tant amb exemples codificats amb LOGO, com amb joc de rol que, tot i l'edat dels alumnes que hi participen, són magistrals. S'hi pot trobar també, com a exemples de recursió, la suma d'una llista i trobar l'element més gran d'una llista de nombres.

Continuant amb aquest saber, el món de les fractals està estretament relacionat amb la recursivitat, tant en la forma en què es construeixen com en la representació algorítmica. Hi ha una bona seqüència de construcció a [Programem Matemàtiques amb Snap!](#).

Per ampliar amb altres tipus de fractals, com la corba de Koch i altres adaptacions, es recomana el llibre *Learning to Code - An Invitation to computer science through the art and patterns of nature (Snap! edition)* (Thornburg, 2021, p. 115-130).

Com a activitat desendollada, recomanem [Lost in Recursion](#), una proposta força animada de Paul Salomon. Amb les tres regles de la imatge associada, es pregunta: «Què toca fer? Què passa, doncs?» i, tot seguit, s'acompanya amb uns exercicis que poden desbloquejar la situació:



Els [Exploding Dots](#) del professor James Tanton, els quals faciliten la comprensió de la divisió de polinomis [a l'experiència 6](#), són una tècnica o mecanisme original que, amb un punt de persistència i confiança, poden crear un entorn en què l'alumnat es trobi més còmode que no pas amb els desenvolupaments propis de l'àlgebra de polinomis. Això es troba relacionat amb el **saber #4.ALG.PC.G.**

Blocs de competències: processos matemàtics i gestió socioemocional

El conjunt de sabers que constitueixen el sentit algebraic, com tots els altres sentits, s'han de relacionar amb el conjunt de competències del currículum. Sense un coneixement dels sabers, difícilment es poden desenvolupar els processos per avançar en l'assoliment de les competències i, d'altra banda, la manera com s'introdueixen, es construeixen i s'utilitzen els sabers és clau per poder fer un treball competencial.

Així doncs, tots els sabers poden contribuir a desenvolupar qualsevol competència si es treballen en activitats adequades. Així mateix, un saber pot contribuir a desenvolupar diverses competències.

Es presenta la relació entre els sentits i les competències específiques a través dels processos: Resolució de problemes (competències específiques CE 1 i CE 2), Raonament i prova (competències específiques CE 3 i CE 4), Connexions, en què distingim les internes (competència específica CE 5) i les externes (competència específica CE 6), Comunicació i representació (competència específica CE 7), i Gestió socioemocional (competències específiques CE 8 i CE 9).

Aquesta relació, pel que fa al sentit algebraic, es concreta en el marc d'aquest exemple, de la manera que es descriu en els apartats següents, tot i que hi pot haver altres anàlisis igualment vàlides.

Resolució de problemes (CE 1 i CE 2)

El treball del sentit algebraic, que inclou el desenvolupament del llenguatge algebraic, introduït ja a 1r i 2n d'ESO i desenvolupat a 3r, continua a 4t d'ESO i ofereix a l'alumnat l'oportunitat d'abordar problemes matemàtics amb la potència de les eines algebraiques. En la resolució de molts problemes, el primer pas és comprendre bé l'enunciat, i el segon consisteix a traduir aquest enunciat a una representació simbòlica que sovint és una equació o inequació, o un sistema d'equacions o inequacions. Mitjançant tècniques algebraiques, es pot resoldre aquesta equació, inequació o sistema, i interpretar-ne el resultat dins del context del problema. El sentit algebraic proporciona, doncs, moltes possibilitats per treballar la resolució de problemes, especialment en la comprensió dels enunciats i la traducció al llenguatge matemàtic, en aquest cas, algebraic (CE 1); també pel que fa a la interpretació dels resultats, la validesa dels quals pot estar

condicionada pel context del problema (CE 2). La majoria dels blocs de sabers incideixen en el treball sobre resolució de problemes, però pel que fa al treball d'aquest sentit a 4t d'ESO, tenen una incidència especial els blocs Model matemàtic, Variable, Igualtats i desigualtats i Pensament Computacional.

Sabers

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar la resolució de problemes són, entre d'altres:

- El **saber #4.ALG.PA.A**, anàlisi del creixement, decreixement i tendència de diferents tipus de successions i funcions, presenta oportunitats per treballar la resolució de problemes.
- El **saber #4.ALG.VA.B** juga un paper bàsic en la traducció a llenguatge matemàtic d'enunciats de problemes i, més en general, en l'estudi de situacions contextualitzades per tal de construir petits models matemàtics que les descriguin.
- El **saber #4.ALG.MM.A** i el **saber #4.ALG.MM.B**, com la majoria dels sabers del bloc Model matemàtic, tenen relació directa amb la resolució de problemes, pel fet que, en molts casos per dissenyar un pla de resolució del problema, cal determinar un model matemàtic adequat.
- El **saber #4.ALG.ID.F**, resolució de problemes d'equacions en situacions contextualitzades, per la seva naturalesa, està lligat al procés de resoldre problemes, en aquest cas de situacions contextualitzades.
- El pensament computacional està molt lligat al procés matemàtic de resolució de problemes, per la qual cosa poden considerar-se diversos sabers d'aquest bloc, com el **saber #4.ALG.PC.C** i el **saber #4.ALG.PC.D**.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers fan referència directa al procés de resolució de problemes. Per exemple:

- Els recursos [El triangle aritmètic](#) i «Potències de binomis» proposades en relació amb el **saber #4.ALG.PA.A**, porten a plantejar diversos problemes de caràcter matemàtic.
- El recurs [Semàfors temporals](#) que trobem a l'ARC, relacionat amb els **sabers #4.ALG.MM.A** i **#4.ALG.MM.B**.
- L'activitat de l'NCTM «Drug filtering», amb una versió traduïda al català anomenada "[Filtratge de medicaments](#)" proposada en relació amb els **sabers #4.ALG.MM.A**, **#4.ALG.MM.C** i **#4.ALG.MM.D**.
- A propòsit del **saber #4.ALG.VA.B**, se suggereix destacar l'ús de variables en situacions contextualitzades i aplicar algunes d'aquestes situacions a classe (canvi entre escales de temperatura, relació espai-temps en cinemàtica, relació entre la pressió i el volum d'un gas ideal a temperatura constant, aproximació al sistema presa-depredador en el camp de l'ecologia, etc.). Es tracta de proposar que l'alumnat treballi en equip i les explori i es posin en relleu connexions amb altres àrees del coneixement. Cadascuna d'aquestes situacions implica el plantejament d'un problema i la seva traducció a un petit model matemàtic, que són aspectes que contribueixen al desenvolupament de la competència específica CE 1.
- El **saber #4.ALG.PC.D** aporta directament recursos i activitats en què es necessita la programació per arribar a resultats plausibles, com a l'activitat de [La constant de Kaprekar](#) o els problemes que aporta la pàgina web del [Projecte Euler](#).

Raonament i prova (CE 3 i CE 4)

En tot l'aprenentatge de l'àlgebra, la comprensió del significat dels símbols és un punt clau, que cal tenir en compte per poder fer raonaments de tota mena. La manipulació de símbols algebraics, així com de dibuixos i gràfics, ens permet descobrir noves relacions, buscar equivalències entre expressions aparentment diferents i trobar justificacions generals. A l'hora d'emprar les eines algebraiques en situacions contextualitzades, hem de procurar que l'aplicació mecànica de regles no substitueixi els processos de raonament ni amagui els significats dels símbols i expressions derivades del context (CE 3). Tot el bloc Pensament computacional està profundament lligat al raonament i associat a la competència CE 4.

Sabers

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar el raonament són, entre d'altres:

- El treball sobre el **saber #4.ALG.PA.A**, anàlisi de les característiques de successions i funcions, inclou moltes activitats de generalització, de conjectura i de prova que són pròpies del procés de raonament matemàtic.
- Les activitats relacionades amb el **saber #4.ALG.ID.A** promouen el raonament matemàtic, en el sentit de distingir el significat de diferents conceptes implicats.
- També el **saber #4.ALG.RF.A**, sobre el concepte i les propietats de les funcions polinòmiques, del bloc Relacions i funcions, promou el raonament matemàtic quan es caracteritzen els diferents models de funcions polinòmiques i el significat dels paràmetres de les expressions algebraiques d'aquestes mateixes funcions.
- El **saber #4.ALG.PC.B**, associat també a comunicació i representació (CE 7), implica identificar relacions i connexions, per tal de validar resultats i promoure un raonament deductiu.

Recursos

Alguns dels recursos esmentats per treballar diferents sabers fan referència directa al procés de raonament i prova. Per exemple:

- En relació amb el **saber #4.ALG.PA.A**, s'han proposat les activitats [El triangle aritmètic](#) i «Potències de binomis» que, de manera natural, presenten situacions per conjecturar i també per demostrar conjectures.
- També pel que fa al **saber #4.ALG.PA.A**, el recurs [article interactiu de Mathigon](#) permet desenvolupar processos de raonament matemàtic.
- Per treballar els **sabers #4.ALG.MM.A**, **#4.ALG.MM.C** i **#4.ALG.MM.D**, hi ha l'activitat de l'NCTM «[Drug filtering](#)», amb una versió traduïda al català anomenada [Filtratge de medicaments](#). Es tracta de modelar com els ronyons filtren un medicament a la sang. La realització de l'activitat implica processos de raonament matemàtic.
- L'activitat del llibre d'Abraham Arcavi i d'Alex Friedlander, *Task and Competencies in the teaching and learning of algebra*, NCTM 2017, que hem titulat: «Relació entre expressions, funcions i equacions», i que connecta la simplificació d'expressions algebraiques, la resolució d'equacions i la representació gràfica d'expressions algebraiques de funcions, proposada en relació amb el **saber #4.ALG.ID.A**, implica la realització de raonaments matemàtics, especialment argumentacions.
- L'activitat [Paràboles a l'atzar](#), que trobem a l'ARC i que ha estat proposada en relació amb el **saber #4.ALG.RF.A**, té relació amb el procés de raonament.
- El recurs [Les truites de l'estany](#) del professor Lluís Mora, relacionat amb el **saber #4.ALG.RF.B**.
- El recurs [Funcions exponencials i logarítmiques](#) del professor Manel Martínez, lligat al **saber #4.ALG.RF.B**, permet visualitzar com canvia una funció exponencial quan en variem el valor de la base, així com l'efecte dels signes tant en la base com en l'exponent i la seva funció inversa. També disposa d'una sèrie de preguntes per anar guiant la descoberta que promouen el raonament matemàtic.

- Una possibilitat per introduir les funcions definides a trossos (**saber #4.ALG.RF.D**) és partir de la funció valor absolut. L'activitat [Absolutely](#) està plantejada a partir de preguntes que es formulen a l'alumnat per tal de promoure les conjectures, la conversa matemàtica i el debat a l'aula, per acabar sistematitzant el nou coneixement.

Connexions amb altres parts de la matemàtica (CE 5)

L'àlgebra es relaciona amb la majoria dels sentits, però segurament és amb el sentit numèric i l'espacial, juntament amb el de la mesura, on trobem més connexions internes. Aquestes connexions són fonamentals per construir el llenguatge algebraic i donar sentit a les seves representacions sense les quals esdevindrien totalment abstractes. El bloc de sabers de pensament computacional també presenta connexions riques amb sabers d'altres blocs i sentits.

Sabers

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar les connexions internes són, entre d'altres:

- El **saber #4.ALG.PA.A**, del bloc Patrons, permet establir connexions tant amb blocs del mateix sentit algebraic (Relacions i funcions, Igualtats i desigualtats, principalment) com amb sabers d'altres sentits (com el numèric i l'espacial).
- Els **sabers #4.ALG.VA.B** i **#4.ALG.VA.D** tenen un abast molt general que impliquen connexions internes àmplies i significatives, incloses connexions amb el sentit socioemocional. D'una manera més concreta, el **saber #4.ALG.VA.A** i el **saber #4.ALG.VA.C** també permeten ampliar la idea de variable, ja sigui a través del concepte de paràmetre o en el camp de l'estadística. Es tracta d'un bloc de sabers amb molta capacitat de connexió interna dins de les matemàtiques.
- El disseny i l'execució d'algorismes connecten conceptes com la probabilitat, l'estadística, la geometria, el càlcul numèric i el pensament computacional, en un marc de resolució de problemes, i això ho pot desenvolupar el treball al voltant del **saber #4.ALG.PC.D**.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers aporten o utilitzen connexions internes, ja sigui entre els diferents blocs del sentit algebraic o bé entre aquests i altres sentits. Per exemple:

- Les activitats [El triangle aritmètic](#) i «Potències de binomis» associades al **saber #4.ALG.PA.A**, permeten establir connexions entre el sentit algebraic i els sentits numèric i espacial. El mateix succeeix amb el recurs [article interactiu de Mathigon](#) relacionat amb el mateix **saber #4.ALG.PA.A**.
- A propòsit del **saber #4.ALG.VA.A**, s'esmenten dos recursos que poden ser útils per representar famílies de funcions que depenen d'un paràmetre: el GeoGebra (amb els «punts lliscants») i el Polypad (amb les variables *sliders*). La relació de l'expressió analítica de la família de funcions (del canvi dels valors del paràmetre) amb l'expressió gràfica és un bonic exemple de connexió interna.
- El recurs comentat en el **saber #4.ALG.PC.D** que porta per títol [Ús del mètode de Montecarlo pel càlcul del nombre pi](#) permet establir connexions entre el pensament computacional i l'estocàstic.

Connexions amb altres matèries i amb l'entorn (CE 6)

L'àlgebra, com a eina per a resoldre problemes tant de les matemàtiques mateixes com en altres contextos, es connecta amb moltes disciplines, especialment les de l'àmbit científic. I dins del sentit algebraic, els blocs Model matemàtic i Relacions i funcions, són especialment rics per les connexions amb les lleis científiques. El pensament computacional, en particular el desenvolupament de programes informàtics, també permet establir connexions amb camps molt diversos de fora de les matemàtiques. Sempre que en un saber s'esmenti la relació amb situacions contextualitzades, trobarem una possibilitat per establir connexions entre les matemàtiques, la resta de disciplines, l'entorn i, en general, amb el món.

Sabers

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar les connexions externes són, entre d'altres:

- El **saber #4.ALG.VA.B** té una voluntat explícita de relació amb el context i és important per abordar la introducció de petits models matemàtics d'aquestes situacions.
- El **saber #4.ALG.VA.C** és fonamental per a l'estudi de distribucions estadístiques bidimensionals contextualitzades en aplicacions concretes.
- El **saber #4.ALG.ID.F**, per la seva naturalesa, promou de manera natural les connexions externes.
- També el **saber #4.ALG.RF.A** i el **saber #4.ALG.RF.B**, del bloc Relacions i funcions, es poden treballar a partir de situacions contextualitzades, per tal d'afavorir les connexions externes.
- La majoria dels sabers del bloc Model matemàtic, i en concret els **sabers #4.ALG.MM.A**, **#4.ALG.MM.B**, **#4.ALG.MM.C** i **#4.ALG.MM.D**, possibiliten el treball d'establir connexions entre les matemàtiques i altres disciplines.
- L'ús de funcions matemàtiques amb eines tecnològiques permet establir connexions amb altres matèries com la robòtica, les ciències o l'economia financera, de manera que es pot associar el **saber #4.ALG.PC.F** amb l'establiment de connexions externes.

Recursos

Molts dels recursos descrits per treballar diferents sabers del sentit algebraic ofereixen oportunitats per fer connexions externes. Per exemple:

- Les situacions contextualitzades citades com a recurs a propòsit del **saber #4.ALG.VA.B** (canvi entre escales de temperatura, relació espai-temps en cinemàtica, relació entre la pressió i el volum d'un gas ideal a temperatura constant, aproximació al sistema presa-depredador en el camp de l'ecologia, etc.) són excel·lents oportunitats de connexió amb altres matèries i amb l'entorn.
- El Gapminder, citat a propòsit del **saber #4.ALG.VA.C**, ofereix la possibilitat d'estudiar l'evolució temporal en la relació entre dues variables estadístiques associades a diferents països. Això estableix una connexió rellevant amb les ciències socials.

Molts dels recursos citats en relació amb els sabers del bloc Model matemàtic parteixen de situacions en context i, per tant, permeten establir connexions externes. En concret, alguns d'aquests recursos són:

- La proposta [Picture the process](#), proposada en el **saber #4.ALG.MM.A**.
- L'activitat de l'ARC [Semàfors temporals](#), relacionada amb el **saber #4.ALG.MM.A** i el **saber #4.ALG.MM.B**.
- El recurs de l'NCTM [Drug filtering](#), amb una versió traduïda al català anomenada [Filtratge de medicaments](#), relacionat amb el **saber #4.ALG.MM.A**, el **saber #4.ALG.MM.C** i el **saber #4.ALG.MM.D**.
- Per treballar els **sabers #4.ALG.MM.A**, **#4.ALG.MM.C** i **#4.ALG.MM.D**, hi ha l'activitat [Quina és la funció](#), una adaptació al català de la professora Núria Serra de l'activitat de l'NCTM [What's the function](#). En el treball d'aquesta activitat, la connexió entre els sabers matemàtic i els contextos no matemàtics sorgeixen de manera natural.

També molts recursos del bloc Relacions i funcions es refereixen a contextos no matemàtics i permeten connexions externes. Per exemple:

- L'activitat [Graficar historias](#), relacionada amb el **saber #4.ALG.RF.A**.

- El recurs [Les truites de l'estany](#) del professor Lluís Mora que podem trobar a l'ARC, relacionat amb el saber **#4.ALG.RF.B.**

Totes aquestes activitats contribueixen al desenvolupament de la competència CE 6.

Comunicació i representació (CE 7)

L'àlgebra és un llenguatge que permet expressar de manera general i interpretar sintèticament propietats i relacions numèriques o relacions entre variables mitjançant fórmules de diferents tipus. Des d'una perspectiva més àmplia, és interessant projectar la idea que el llenguatge i les tècniques algebraiques són emprades en tots els àmbits científics i tecnològics.

Si ens centrem en la competència comunicativa (CE 7), és clar que el fet que l'àlgebra esdevingui en si mateixa un llenguatge fa que el seu desenvolupament estigui estretament vinculat amb aquesta competència. Saber llegir i interpretar expressions algebraiques, models expressats per mitjà de fórmules, igualtats i desigualtats, funcions elementals, i saber-los utilitzar per expressar situacions i per resoldre problemes lligats a aquestes situacions forma una part essencial de la competència comunicativa entesa com una competència específica de les matemàtiques. Interpretar i fer ús del llenguatge algebraic són accions que permeten relacionar el sentit algebraic i la competència comunicativa. Però també relacionar el llenguatge algebraic amb altres formes de representació és una idea clau que apareix tant en la idea de Model matemàtic, com, especialment, en el concepte de funció, de manera que la comprensió d'aquest concepte està lligada a les seves representacions i a la relació que tenen.

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar la comunicació i la representació són, entre d'altres:

Sabers

Pel caràcter que té l'àlgebra com a llenguatge i pel fet que molts dels conceptes que apareixen en el sentit algebraic admeten diferents representacions de manera que una acció clau és la connexió entre aquestes representacions, diversos sabers del sentit algebraic poden contribuir significativament al desenvolupament de la competència CE 7. Per exemple:

- El **saber #4.ALG.PA.A** implica accions de determinació i generalització de successions i funcions, relacionades tant amb la representació com amb la comunicació.
- El **saber #4.ALG.VA.D** posa el focus en el paper de l'àlgebra simbòlica com a llenguatge de la ciència i, per tant, en el seu potencial com a instrument de comunicació i representació.
- Els **sabers #4.ALG.ID.G, #4.ALG.ID.H, #4.ALG.ID.K i #4.ALG.ID.L** del bloc Igualtat i desigualtat, promouen de manera natural el pas d'una representació a una altra, especialment entre simbòlica i gràfica, pel que fa a equacions, inequacions i sistemes.
- El treball amb els **sabers #4.ALG.MM.A, #4.ALG.MM.C i #4.ALG.MM.D** implica un procés de representació i de comunicació matemàtica.
- El **saber #4.ALG.PC.B**, associat també a Raonament i prova (CE 3 i CE4), comporta una eina visual i simbòlica que facilita la representació de situacions contextualitzades.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers del sentit algebraic fan referència al procés de comunicació i representació. Per exemple:

- L'activitat [Les fraccions: l'ull d'Horus](#), relacionada amb el **saber #4.ALG.PA.A**.
- Les activitats [El triangle aritmètic](#) i «Potències de binomis», associades al **saber #4.ALG.PA.A**.

- Les facilitats que donen el GeoGebra i el Polypad, citats a propòsit del **saber #4.ALG.VA.A**, per a la representació de famílies de funcions poden contribuir a donar importància a la representació d'idees matemàtiques i al desenvolupament de la CE 7.
- El Gapminder, referenciat en el **saber #4.ALG.VA.C**, és un gran recurs per representar la relació entre dues variables estadístiques tot mostrant diagrames de dispersió i l'evolució en el temps. La interpretació d'aquests diagrames provoca converses matemàtiques interessants. Es tracta d'aspectes que tenen incidència en el desenvolupament del procés de comunicació i representació.
- L'activitat [Picture the process](#), del **saber #4.ALG.MM.A**.
- Per treballar els **sabers #4.ALG.MM.A**, **#4.ALG.MM.C** i **#4.ALG.MM.D**, hi ha l'activitat [Quina és la funció](#), adaptació i traducció al català de la professora Núria Serra de l'activitat de l'NCTM [What's the function](#). En el treball d'aquesta activitat, l'ús de representacions i la comparació entre elles és un procés clau.
- L'activitat [Graficar historias](#), del **saber #4.ALG.RF.A**.
- El recurs [El dòmino quadràtic](#) que trobem a l'ARC, relacionat amb el **saber #4.ALG.RF.A** i el **saber #4.ALG.RF.C**.
- L'activitat [Absolutely](#), relacionada amb el **saber #4.ALG.RF.D**, està plantejada a partir de preguntes que es formulen a l'alumnat per tal de promoure les conjetures, la conversa matemàtica i el debat a l'aula, per acabar sistematitzant el nou coneixement.

Gestió socioemocional (CE 8 i CE 9)

Tot i que tant a 1r com a 2n d'ESO s'han començat a treballar aspectes rellevants del llenguatge algebraic, com els patrons, els models matemàtics i les equacions, és a 3r i a 4t d'ESO quan l'àlgebra es treballa com un llenguatge propi, tot i mantenir sempre les connexions amb el sentit numèric i el geomètric, per tal d'anar dotant de significat tot allò que es fa. Tal com dèiem en cursos anteriors, és fonamental reconèixer i atendre les dificultats que aquest salt cap a l'abstracció suposa per a part de l'alumnat. Si aquest pas es fa de manera gradual i acollidora, augmentarà l'autoconfiança dels alumnes en les seves capacitats matemàtiques, ja que se'ls proporcionaran eines per afrontar la resolució de problemes amb més seguretat i perseverança. Alhora, es facilitarà la participació en grup, discutint estratègies matemàtiques i interaccionant de manera positiva amb les altres persones.

La descoberta d'un nou llenguatge, la comprensió de les seves aplicacions en situacions reals i la sensació de dominar millor les matemàtiques, incrementen la motivació i contribueixen a desenvolupar la identitat matemàtica de l'alumnat. Ara bé, si l'alumnat no comprèn la relació entre aquest llenguatge abstracte i els contextos en què es desenvolupa, es pot crear una sensació d'inseguretat que farà que es focalitzi en la sintaxi (les regles per a la transformació d'expressions algebraiques) i, per tant, perdi de vista el veritable significat dels conceptes algebraics involucrats (en particular, el concepte de funció i la relació amb l'expressió algebraica corresponent).

La gestió socioemocional està vinculada a dues competències específiques:

- CE 8, relacionada amb el desenvolupament d'habilitats personals com les creences, les actituds i les emocions envers les matemàtiques.
- CE 9, centrada en el desenvolupament d'habilitats socials com el treball en equip i la presa de decisions.

A continuació s'indiquen alguns aspectes que, treballats des del sentit algebraic, poden contribuir al desenvolupament de les competències CE 8 i CE 9.

Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 8

- Per treballar els **sabers #4.ALG.MM.A**, **#4.ALG.MM.C** i **#4.ALG.MM.D**, es proposa l'activitat de l'NCTM «Drug filtering», amb una versió traduïda al català anomenada [Filtratge de medicaments](#). Es tracta de modelar com els ronyons filtren un medicament a la sang. La realització de l'activitat

implica processos de raonament matemàtic. En la gestió de l'activitat, l'aprenentatge a partir de l'error és molt rellevant.

- En qualsevol de les activitats i situacions proposades en el bloc Model matemàtic, serà important parar atenció al **saber #4.ALG.MM.E**, en especial quan les activitats comportin investigar, manipular i descobrir. Aturar-se a comprovar si s'està anant per bon camí, valorar críticament les solucions d'un problema, i veure si són coherents i adequades per prendre decisions en conseqüència, és essencial en el bon fer matemàtic. Cal donar espais a l'aula perquè això passi, animar els estudiants a reflexionar contínuament sobre la feina que estan fent i sense donar veredictes, i afavorir que siguin ells mateixos qui facin l'anàlisi amb l'ajuda de les nostres preguntes, que els aniran guiant, si cal. Si l'activitat és llarga (diverses sessions), es pot fer una aturada de tota la classe en un punt intermedi per posar en comú els resultats obtinguts fins al moment i fer aportacions de millora entre tots.
- El treball entorn dels **sabers #4.ALG.VA.B** i **#4.ALG.VA.D**, com per exemple amb l'activitat en què es convida l'alumnat a buscar fórmules expressades en llenguatge matemàtic dins del camp de la física, la química o la biologia, que relacionin dues variables, a l'hora que en descobreixen el significat i el sentit de la relació que s'estableix entre elles, pot contribuir a desenvolupar una visió de les matemàtiques més completa, i en la qual es prengui consciència de les aplicacions i de l'evolució històrica.
- L'activitat [El teu polinomi](#), proposada en el **saber #4.ALG.RF.E**, pel que té d'implicació personal de tot l'alumnat.
- El **saber #4.ALG.PC.E**, com que es troba associat a la recursivitat, permet als estudiants desenvolupar confiança i perseverança per abordar problemes complexos pas a pas, fomenta actituds positives cap a les matemàtiques i redueix l'angoixa davant de tasques desafiants. L'activitat [Lost in Recursion](#) d'en Paul Salomon n'és un bon exemple.

Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 9

En l'àlgebra, com en la resta de sentits i en les matemàtiques en general, s'ofereixen oportunitats per treballar en equip, ja que promou actituds positives i la implicació en la presa de decisions, així com el respecte per les aportacions dels altres, i contribueix a superar qualsevol idea limitant sobre les habilitats pròpies o alienes en matemàtiques.

Diverses activitats del conjunt de recursos exposats en els sabers del sentit algebraic són especialment adequades per ser treballades en petit grup i, fins i tot, amb tot el grup. D'acord amb l'activitat, el professorat podrà decidir una gestió que possibiliti l'alternança entre el treball individual, en parelles, en petit i en gran grup, en què el contrast d'idees, les discussions i els acords siguin un punt clau que guiï l'aprenentatge. A continuació, es destaquen algunes activitats concretes en aquest àmbit:

- L'activitat [Quina és la funció](#), relacionada amb els **sabers #4.ALG.MM.A**, **#4.ALG.MM.C** i **#4.ALG.MM.D**.
- L'exploració de situacions contextualitzades citada com a recurs a propòsit del **saber #4.ALG.VA.B**, si es fa cooperativament, pot ser una bona oportunitat per contribuir a desenvolupar la competència específica CE 9, mitjançant les destreses i actituds adequades per a un bon treball en equip.
- En el **saber #4.ALG.PC.G**, es valora el treball col·laboratiu a partir d'activitats interactives que requereixen compartir idees, debatre estratègies i prendre decisions conjuntes per resoldre problemes matemàtics creativament. Com a exemple, podem citar dos recursos i activitats associats com són els [Exploding Dots](#) d'en James Tanton i les tasques [Bebras](#).