

TOR 3r d'ESO: Sentit estocàstic

Consideracions generals	2
Blocs de sabers	2
Distribució	2
Sabers	2
Descripció i orientacions	3
Reflexions inicials	3
Comentaris sobre les connexions	3
Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació	3
Observacions sobre alguns sabers específics	3
Recursos i activitats	4
Recursos i activitats per treballar sabers concret	4
Inferència	22
Sabers	22
Descripció i orientacions	23
Reflexions inicials	23
Comentaris sobre les connexions	23
Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació	23
Recursos i activitats	24
Recursos i activitats generals per al bloc de sabers	24
Recursos i activitats per treballar sabers concrets	24
Predictibilitat i incertesa	37
Sabers	37
Descripció i orientacions	37
Reflexions inicials	37
Comentaris sobre les connexions	37
Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació	37
Recursos i activitats	37
Blocs de competències: processos matemàtics i gestió socioemocional	53
Resolució de problemes (CE 1 i CE 2)	53
Sabers	54
Recursos	55
Raonament i prova (CE 3 i CE 4)	55
Sabers	55
Recursos	56
Connexions amb altres parts de la matemàtica (CE 5)	56
Sabers	56
Recursos	56
Connexions amb altres matèries i amb l'entorn (CE 6)	57
Sabers	57
Recursos	57



Comunicació i representació (CE 7)	58
Sabers	58
Recursos	58
Gestió socioemocional (CE 8 i CE 9)	59
Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 8	59
Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 9	59

Consideracions generals

Per abordar el desplegament curricular de 3r d'ESO, partim del supòsit que l'alumnat ja ha fet les activitats corresponents a 1r i 2n d'ESO. Recomanem que el professorat que no estigui familiaritzat amb aquestes activitats revisi tant la introducció com les propostes didàctiques dels nivells anteriors. Naturalment, les activitats es poden adaptar a la programació de cada centre, assegurant que la progressió en el desenvolupament del pensament estadístic de l'alumnat sigui coherent i estructurada.

A 3r de l'ESO abordarem conjunts de dades més extensos que el que s'ha fet a 1r i 2n, és per això que és convenient introduir el treball amb dades agrupades, cosa que permet organitzar les dades en intervals o classes i fa més senzilla la identificació de patrons, tendències i característiques generals d'un conjunt de dades. Això és especialment útil per reduir la complexitat del càlcul i per presentar les dades de manera clara i comprensible mitjançant taules, gràfics i altres eines visuals.

Per altra banda, s'introdueix un nou tipus de representació gràfica: els gràfics de caixa i bigotis o boxplots. Aquesta eina estadística ens permet visualitzar de manera clara i compacta la distribució d'un conjunt de dades i treballar conceptes avançats com els quartils, la mediana i els valors extrems. El treball amb aquest tipus de gràfics amplia les habilitats analítiques de l'alumnat i promou una comprensió més profunda dels conceptes de dispersió i posició i, a més, ofereix una eina pràctica per comparar diferents distribucions de manera visual.

Finalment, és a 3r que introduïm el concepte de desviació típica i estenem el treball de l'estudi de la dispersió de dades, ja que el seu càlcul ens permet comparar distribucions amb valors centrals similars, cosa que ajuda a identificar quin conjunt de dades és més homogeni o més dispers i ofereix a l'alumnat una visió més completa i precisa de com analitzar les dades reals.

Pel que fa a Predictibilitat i Incertesa es continua aprofundint en el treball de la dependència i la independència d'esdeveniments, així com la seva compatibilitat. També es treballen a fons situacions més complexes en què els esdeveniments no són sempre equiprobables i cal buscar la manera de trobar-ne les probabilitats, tant en experiments simples com compostos. Per fer-ho, ens podem ajudar de diferents tipus de representacions i organització de les dades de la distribució.

En aquestes situacions, les simulacions i la utilització de recursos digitals ens poden ajudar a fer una primera aproximació als resultats buscats i poden complementar la realització de la tasca experimentalment amb material manipulatiu o bé de la seva resolució teòrica.

El coneixement sobre l'origen i l'evolució dels diferents conceptes treballats pot ajudar l'alumnat a comprendre'ls millor. És interessant plantejar com, històricament, diversos matemàtics van abordar situacions en què l'atzar tenia un paper central, cosa que va obrir el camí cap als coneixements actuals en teoria de la probabilitat. Finalment, atès que vivim en un món on l'atzar apareix en múltiples situacions, és essencial saber analitzar-ne el paper per fer-ne una interpretació racional i equilibrada.

Blocs de sabers

Distribució

Sabers

- A. Anàlisi i interpretació de taules i gràfics estadístics.
- B. Identificació i reconeixement de variables quantitatives discretes i contínues, en contextos diversos.

#ALG.VA

- C. Estudi i tractament de dades corresponents a variables contínues i discretes i, en cas que sigui necessari, organització d'aquestes dades en classes, utilitzant la marca de classe com a representant. **#EST.IN ,#ALG.VA**
- D. Confecció de taules de freqüència de variables contínues: determinació del rang, nombre i amplada d'interval i marca de classe. **#NUM.QU**
- E. Representació d'un conjunt de dades donades amb gràfics estadístics (mitjançant histogrames, polígons de freqüències i diagrames de caixa...). **#ALG.PC**
- F. Selecció de les eines digitals més adequades per al tractament i la representació de dades estadístiques. **#ALG.PC**
- G. Càlcul i interpretació dels paràmetres estadístics de centralització de variables contínues i discretes (mitjana, moda, mediana i quartil). **[ESS]**
- H. Càlcul i interpretació dels paràmetres estadístics de dispersió de variables contínues i discretes (rang, variància i desviació típica). **[ESS]**
- I. Càlcul i interpretació del coeficient de variació per comparar i interpretar diferents distribucions de dades.

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

El nombre de paràmetres estadístics que l'alumnat ha d'aprendre a 3r d'ESO pot derivar en una visió mecanicista de l'estadística, en què les activitats a classe es redueixen al càlcul de fórmules desconnectades del seu significat i aplicació; és necessari, per tant, introduir els conceptes de manera progressiva, començant per càlculs bàsics i avançant cap a situacions més complexes, sense deixar de plantejar situacions contextualitzades, i relacionar les activitats amb problemes quotidians o aplicacions pràctiques perquè l'alumnat vegi la rellevància dels conceptes.

El treball col·laboratiu i el debat a l'aula esdevenen eines clau en el càlcul i la interpretació de paràmetres estadístics essencials a 3r d'ESO. Fomenten la comprensió profunda dels conceptes i també permeten al professorat dur a terme una avaluació contínua, de manera que puguin detectar en temps real el nivell d'assoliment dels objectius d'aprenentatge. El treball en grup afavoreix l'intercanvi d'idees i la resolució conjunta de problemes, mentre que el debat ajuda a aclarir dubtes, contrastar perspectives i consolidar el significat dels paràmetres en un context pràctic i rellevant.

Comentaris sobre les connexions

El **saber #3.EST.DI.B**, referent a la identificació de variables i el **saber #3.EST.DI.C**, referent a l'estudi i el tractament de variables estan connectats amb el **saber #3.ALG.VA.B**, i donen així significat al concepte de variable dins dels contextos estadístics.

Per altra banda, el **saber #3.EST.DI.E** i **saber #3.EST.DI.F**, estan connectats amb el **saber #3.ALG.PC.C**, selecció, determinació i ús reflexiu i eficient de les eines computacionals adequades per analitzar i resoldre problemes.

Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

És important tenir en compte que els sabers essencials del bloc de distribució a 3r d'ESO estan relacionats amb el càlcul i la interpretació tant dels paràmetres estadístics de centralització com dels de dispersió. No obstant això, si no s'ha treballat l'estadística en cursos anteriors o s'ha fet de manera superficial, és necessari revisar els sabers essencials d'aquests cursos. Sense una base prèvia en la confecció de taules de freqüència, la representació de dades i l'anàlisi gràfica, és difícil assolir el càlcul i la interpretació adequats dels paràmetres estadístics.

Observacions sobre alguns sabers específics

A més de la desviació típica, a 3r s'introdueix el coeficient de variació, **saber #3.EST.DI.I**, un paràmetre estadístic essencial per comparar la dispersió relativa de diferents distribucions de dades, especialment quan aquestes tenen unitats de mesura o magnituds molt diferents. Cal plantejar situacions que requereixin comparar dues distribucions o més, i destacar la utilitat del coeficient de variació.

El càlcul i la interpretació del coeficient de variació dona lloc a activitats que combinen càlcul matemàtic amb raonament crític, i proporcionen al professorat indicadors clars sobre el nivell de comprensió de l'alumnat.

Recursos i activitats

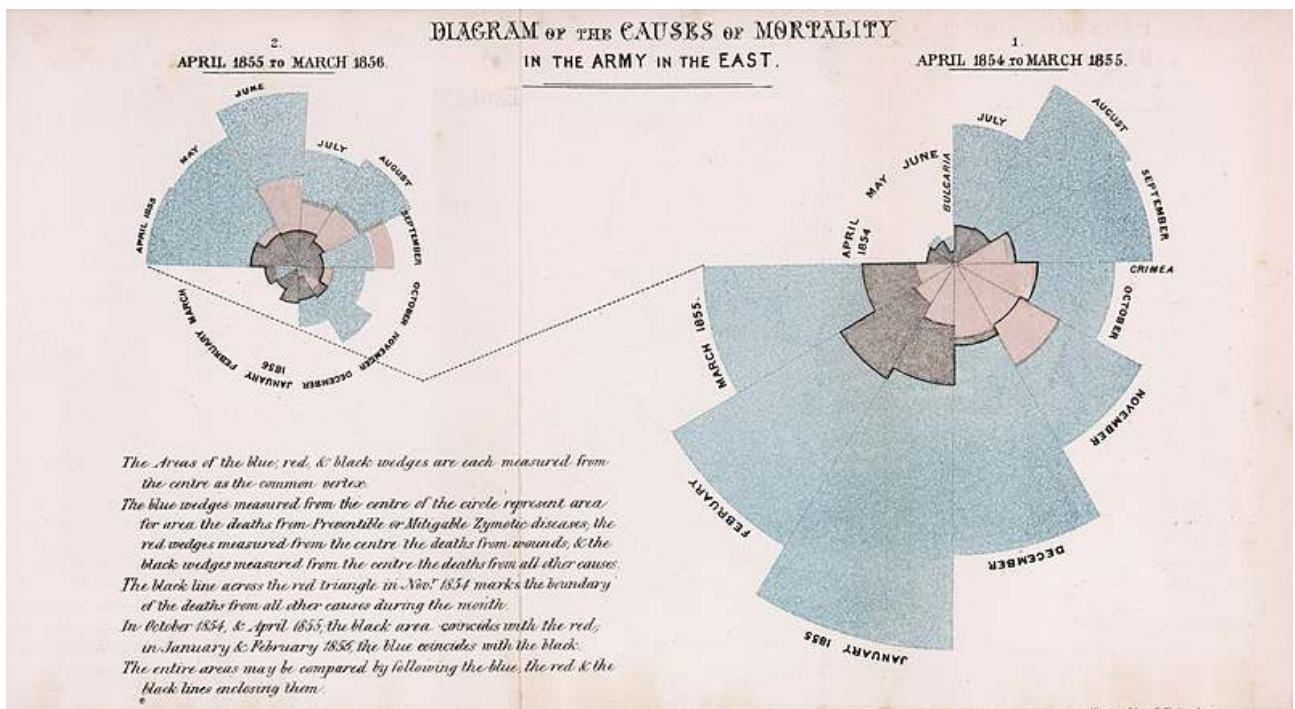
Recursos i activitats per treballar sabers concrets

Estudiar els gràfics a 3r d'ESO, **saber #3.EST.DI.A**, tot i haver-los treballat a 1r i 2n, té una raó de pes: en aquest curs, es busca assolir un nivell d'anàlisi més profund i aplicar els gràfics a situacions més complexes. A 1r i 2n d'ESO, l'objectiu és que l'alumnat adquireixi les habilitats bàsiques per llegir i interpretar gràfics, reconèixer variables i relacionar dades amb fenòmens observables.

A 3r d'ESO, el focus s'amplia cap a l'anàlisi crítica de les dades i la seva representació. Els conjunts de dades a aquest nivell han de ser més rics i variats, sovint de diverses variables. Això requereix una comprensió més sofisticada de com les diferents variables interactuen entre si, cosa que permet extreure conclusions més elaborades, i identificar correlacions, tendències i patrons ocults que no són evidents en una primera lectura del gràfic.

El context de la vida real o d'altres disciplines, com les ciències socials o experimentals, hi té un paper fonamental, ja que facilita el treball amb conceptes relacionats amb la inferència, fent estimacions i prediccions a partir de les dades representades en gràfics.

El curs de 3r d'ESO és un bon nivell per introduir un dels gràfics estadístics més famosos: el diagrama polar de Florence. En podeu trobar una activitat per a l'anàlisi del gràfic a L'estadística més enllà dels paràmetres del grup Vilatzara: [Florence Nightingale](#). Al gràfic es representen en vermell els morts en combat per ferides de guerra; en blau, els morts per ferides infeccioses o contagioses que es creia que eren provocades per un organisme anomenat *zyme* i, en negre, la resta de morts per altres causes.



Font: [Wikipedia](#) [Viquipèdia](#)

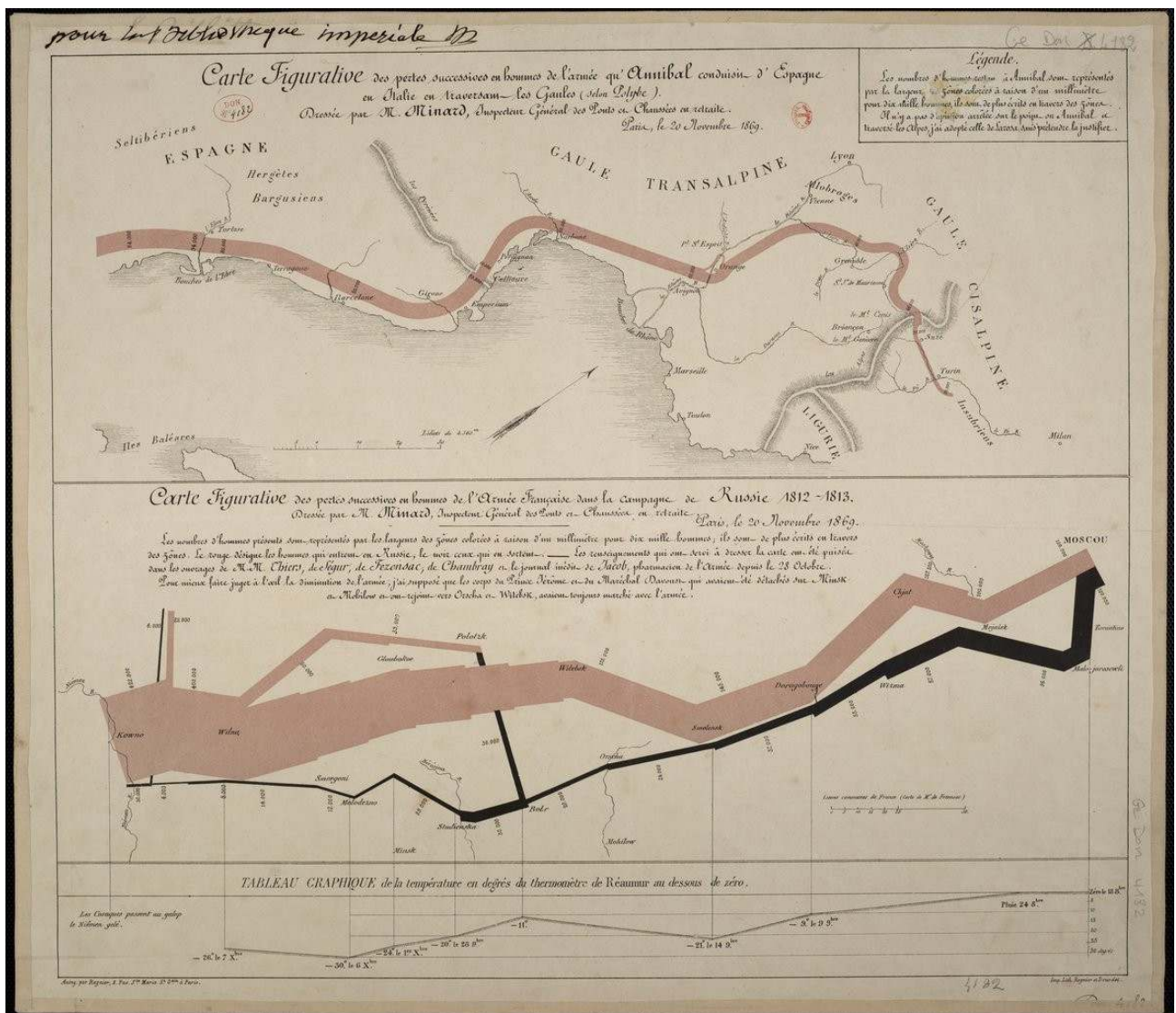
Autora: Florence Nightingale

El «gràfic de rosa» o «diagrama polar» mostra les causes de mort dels soldats britànics durant la Guerra de Crimea (1853-1856). Aquest gràfic il·lustrava que la majoria de les morts no eren causades per les ferides de combat, sinó per malalties prevenibles com el còlera i la disenteria, que es podien reduir amb millores sanitàries. Utilitzant una representació visual clara, Nightingale va mostrar que les condicions sanitàries feien augmentar dramàticament les taxes de mortalitat.

La seva feina va marcar un abans i un després en la medicina, la gestió hospitalària i la salut pública, ja que va demostrar la importància de prendre decisions informades per dades. A més, la seva contribució va ser fonamental per establir la infermeria moderna i va ajudar a avançar en el camp de l'estadística aplicada a les ciències socials.

Aquest gràfic no només és un exemple d'una eina potent de comunicació de dades, sinó que també va ser una forma d'influir en les polítiques públiques, ja que va mostrar que les visuals estadístiques poden portar a un canvi social real. Per tant, podem entendre la importància per treballar-lo a classe. Això sí, a l'hora de presentar-lo, convé explicar-ne els fets i el context social i polític de l'època. Es pot trobar més informació al [web del museu](#) de Londres.

Un altre gràfic que el nostre alumnat hauria de conèixer és el famós gràfic de Charles Joseph Minard, que mostra la campanya de Napoleó a Rússia (1812-1813). Aquest diagrama és considerat una obra mestra de la visualització de dades per la seva claredat i la seva capacitat de representar múltiples variables alhora.



Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

Font: [Gallica](https://gallica.bnf.fr/)

Autor: Charles Joseph Minard

El gràfic de Minard descriu el nombre de soldats de Napoleó que van iniciar la campanya, els que van sobreviure en diferents moments del viatge, la ruta que van seguir, les condicions meteorològiques i els obstacles geogràfics. La línia ampla del gràfic mostra el nombre de soldats i com es va anar reduint a mesura que avançaven cap a Moscou i, posteriorment, durant la retirada. També inclou un gràfic de línia a la part inferior que mostra les temperatures extremes durant la retirada.

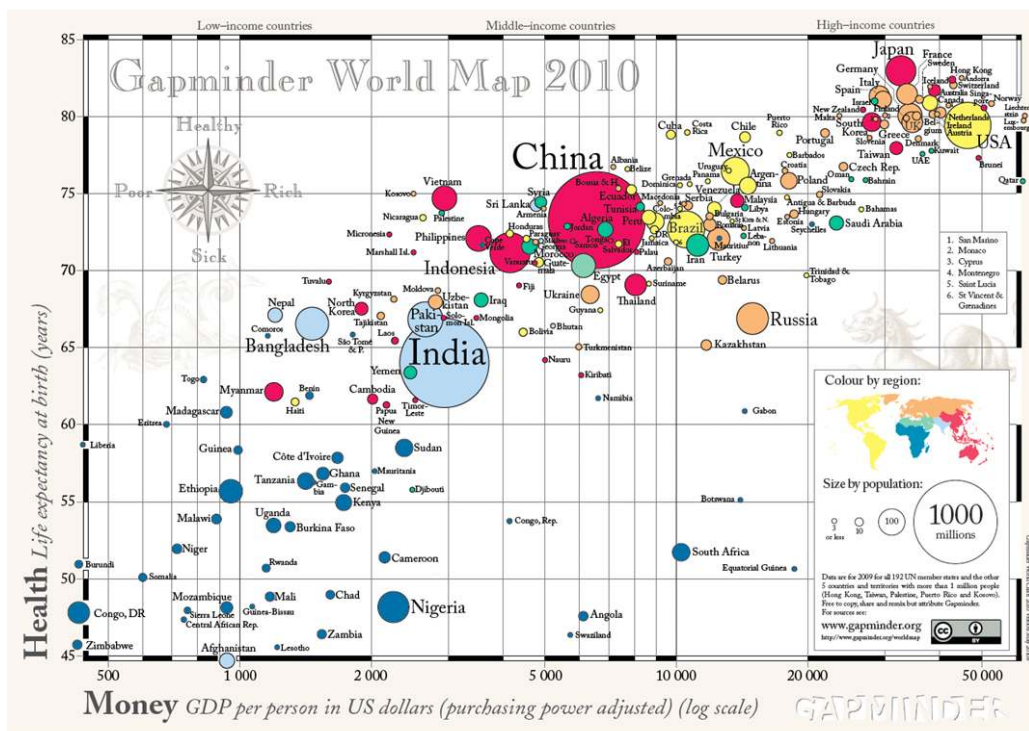
A l'Estadística més enllà dels paràmetres del grup Vilatzara podeu trobar l'activitat [Quants hi van anar? Quants en van tornar?](#), i, tot i que està proposada per a 2n d'ESO, donada la complexitat del gràfic que representa fins a 6 variables i les connexions històriques que s'estableixen entre la invasió russa de Napoleó i l'operació Barba-roja de Hitler, és perfectament adaptable a 3r d'ESO.

Un altre recurs per a l'anàlisi i la interpretació de dades és el web [Gapminder](#), una eina en línia gratuïta que permet visualitzar dades estadístiques d'una manera interactiva i dinàmica. La seva missió és ajudar a comprendre el desenvolupament humà a través de gràfics animats que representen dades com la mortalitat infantil, el PIB per càpita o l'esperança de vida, entre altres. Aquests gràfics són molt intuïtius, ja que fan

servir bombolles que representen diferents països codificades per colors segons el continent i permet explorar les dades històriques i comparar l'evolució dels països al llarg del temps, cosa que facilita l'aprenentatge de temes com l'economia, la salut pública o la sostenibilitat d'una manera entretinguda i visualment atractiva.

Una de les activitats que es pot trobar als materials de Gapminder és el [Gapminder Card Game](#), en què es demana a l'alumnat, sense ser gaire específic, que classifiqui els països segons el nivell de desenvolupament (probablement haurà de buscar en un mapa on se situen alguns dels països); després se li pot demanar que expliqui quines variables pensa que ha utilitzat per fer la classificació, com per exemple els ingressos, el nivell de salut o el desenvolupament econòmic.

Un cop acabada la primera discussió, és el moment de distribuir el gràfic Gapminder World Map 2010 als grups i explicar el gràfic, és a dir, que cada bombolla és un país, la mida de la bombolla és la població, el color del continent, l'eix Y és l'esperança de vida (és a dir, la salut) i l'eix X és la renda per persona, i aclarir ràpidament què signifiquen els dos indicadors. Posteriorment, podem demanar-los que cerquin i marquin els països al gràfic i discutir si hi ha resultats que ens criden l'atenció o que surten de les nostres primeres conjetures. Finalment, podem acabar mostrant l'evolució del gràfic Esperança de vida respecte a la renda per càpita al llarg dels anys al [vídeo que apareix al web](#) o al vídeo de la BBC de Hans Rosling's [200 Countries, 200 Years, 4 Minutes](#).



Esperança de vida i renda per càpita

Font: [Gapminder Tools](#)

A 3r d'ESO continuen sent un bon recurs els gràfics de [Slow Reveal Graphs](#) i l'anàlisi de gràfics del web del *New York Times* [what's going on the graph](#), que permet analitzar l'impacte de les dades científiques, tecnològiques, socials, artístiques i culturals de les notícies d'actualitat dels darrers 6 anys.

Per altra banda, per aprofundir en l'anàlisi de gràfics i ajudar l'alumnat a entendre dades relacionades amb contextos reals i, donat que a 3r de l'ESO es treballa una anàlisi més profunda, que inclou interpretar les

implicacions, les relacions entre variables i la capacitat de detectar tendències o anomalies en un gràfic, és essencial treballar els **comentaris de gràfics** dins de l'àrea de matemàtiques, per tal de fomentar la capacitat comunicativa: saber explicar en paraules els patrons i les conclusions que es deriven d'un gràfic millora les capacitats de raonament verbal i escrit i facilita la connexió amb altres disciplines, com la ciència, la geografia o l'economia, en què les representacions gràfiques són fonamentals. Això no només promou l'aprenentatge interdisciplinari, sinó que també ajuda l'alumnat a veure la utilitat de les matemàtiques més enllà de l'aula.

Podem treballar el comentari de gràfics a través de la base d'orientació següent:

PRESENTACIÓ	• Tema del gràfic. • Tipus de gràfic. • Variables que es representen. • Cronologia.
DESCRIPCIÓ	• Tendències generals. • Parts destacades.
INTERPRETACIÓ	• Arguments dels aspectes destacats. • Relació amb coneixements sobre el tema. • Text argumentatiu.
CONCLUSIÓ	• Breu resum. • Preguntes obertes que genera el gràfic. • Possibles conseqüències o prediccions futures.

Proposta base d'orientació per al comentari d'un gràfic.

Podem trobar una proposta per treballar el **saber #3.EST.DI.B** al blog de Sarah Carter [maths=love](#), en què, a través d'unes targetes de classificació basades en el llibre d'Allan J. Rossman i Beth L. Chance *Workshop Statistics: Discovery with Data* (1996), l'alumnat ha de classificar en variables quantitatives, qualitatives o no variables un conjunt d'11 afirmacions en el context de l'arribada de pacients a una sala d'urgències. L'activitat concretament s'anomena [Emergency Rooms Card Sort Activity for Categorical and Quantitative Variables](#) i l'alumnat un cop classificades les targetes pot inventar les seves pròpies afirmacions i categoritzar-les en quantitatives contínues o discretes i qualitatives.

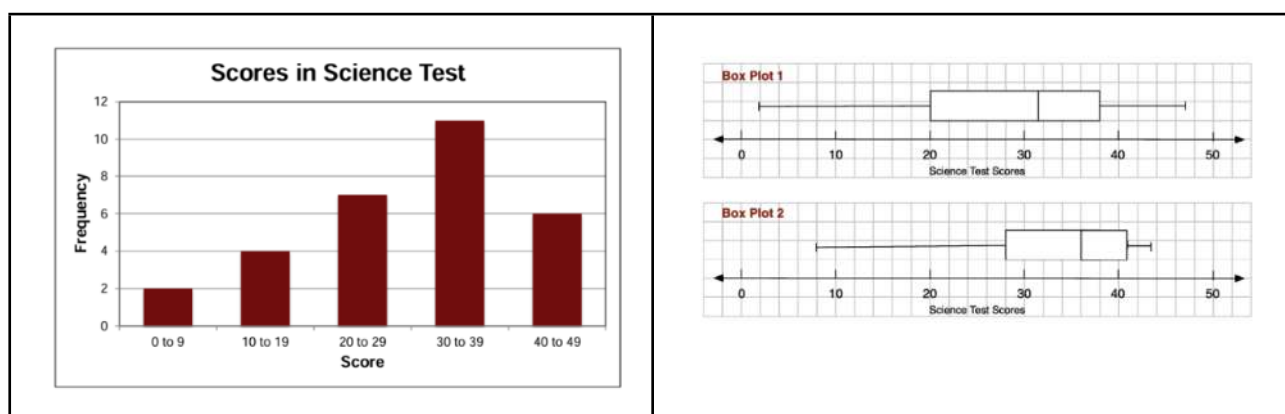
Tipus de sang	Temps d'espera
Mitjà d'arribada (a peu, en taxi, en bus, en metro)	Si els homes han d'esperar més que les dones
Nombre de pacients que arriben abans de migdia	Si el pacient té assegurança mèdica
Nombre de punts requerits	Si s'han requerit o no punts
Quins pacients requereixen punts?	Nombre de pacients amb assegurança mèdica
Número d'habitació	

Traducció de les targetes proposades per Sarah Carter

Per treballar el **saber #3. EST.DI.C** es proposa [Mathematics Assessment Project](#), que, com ja hem comentat, són un conjunt de materials que es van generar el 2015 en col·laboració entre la Universitat de Califòrnia, Berkeley i l'equip del Shell Center de la Universitat de Nottingham. Com totes les lliçons proposades, hi podem trobar els materials per a l'alumnat, així com les indicacions i els suports per al professorat en el moment de dur l'activitat a l'aula. Totes les tasques s'inicien amb una preactivitat que l'alumnat ha de fer individualment a casa. A l'inici de la lliçó es revisen els resultats per detectar la comprensió de la situació i possibles dificultats. A continuació se segueix un esquema de treball individual, debats en petits grups i posada en comú a tota la classe. Al final de la lliçó es proposa una petita avaluació o una activitat reflexiva per tal que l'alumnat sigui conscient del que ha après.

L'activitat indicada en aquest cas és [Representing Data With Grouped Frequency Graphs and Box Plots](#), la pretasca que es proposa en aquest cas, per fer a casa, correspon a un gràfic de freqüències agrupades de l'alçada d'un grup de noies. Segons la proposta de [Mathematics Assessment Project](#), no cal que l'alumnat sàpiga contestar totes les preguntes al treball inicial, sinó que cal explicar que sabran fer-ho quan acabin l'activitat. Aquesta primera tasca es recull, però no es puntua. En lloc d'això, es formula una sèrie de preguntes basades en el treball dels estudiants per ajudar-los a progressar. Les seves dificultats es resumeixen en una llista de preguntes, que servirà com a guia per al seu desenvolupament. A l'activitat apareix una llista de possibles preguntes que poden ajudar l'alumnat a millorar la tasca, com per exemple: si l'alumnat proporciona valors de la mediana i del quartil llegits d'un diagrama de caixa com a intervals, no valors exactes; podem preguntar a l'alumnat: Què representa cada interval de l'escala del diagrama de caixa? Podem llegir el valor exacte de la mediana del diagrama de caixa?

Ja a l'aula, podem treballar l'activitat següent basada en els resultats d'un examen de ciències en què la màxima puntuació, que ningú ha obtingut, és de 50 punts. Els alumnes poden reflexionar primer individualment i després per parelles sobre les diferents representacions: Què ens diu una determinada barra del diagrama? Quantes puntuacions dels estudiants representa una determinada barra? Quines podrien ser les puntuacions d'aquesta barra? [La segona barra representa les puntuacions de quatre alumnes. Les puntuacions podrien ser, per exemple, 10, 10, 10 i 10; 19, 19, 19 i 19; 10, 12, 15 i 17; o qualsevol altre grup de quatre nombres del rang 10 - 19? Quins valors podria prendre la marca de classe? Quins dels dos diagrames de caixa correspon a l'histograma?

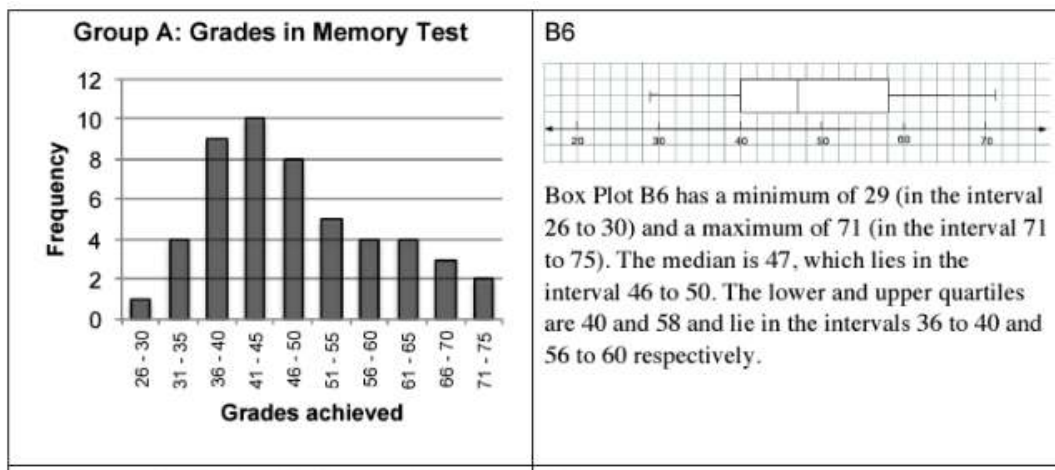


Font: [Representing Data With Grouped Frequency Graphs and Box Plots](#)
Mathematics Assessment Project

Com que possiblement l'alumnat no està familiaritzat amb el concepte i la relació dels termes mediana i quartil superior i inferior, podem explicar llavors que el quartil inferior es refereix al 1r quartil, la mediana es refereix al 2n quartil i el quartil superior es refereix al 3r quartil. Aquests valors divideixen el conjunt de dades en quatre grups de freqüències iguals. L'alumnat pot suposar que l'interval de les dades sempre va

des del valor més baix del primer interval fins al valor més alt de l'últim interval, de manera que demanar-los que pensin en el rang mínim i màxim possible de puntuacions pot ser útil per treballar les propietats d'un gràfic de freqüències agrupades.

Un cop feta la discussió inicial, passem al treball central en grups de dos o tres alumnes, en què a cada grup els repartim el conjunt de cartes retallades amb els diferents histogrames i els diagrames de caixa. Aleshores han de buscar a quin histograma correspon cada diagrama de caixa. Amb tot, alguns histogrames poden tenir més d'un diagrama de caixa que coincideixi i hi pot haver alguns diagrames de caixa que no coincideixin amb cap dels histogrames. En aquest cas, l'alumnat pot utilitzar una quadrícula en blanc per construir el diagrama corresponent.



Proposta d'emparellament histograma- diagrama de caixa.

Font: [Representing Data With Grouped Frequency Graphs and Box Plots](#)

Mathematics Assessment Project

En el treball autònom en grup, el professor ha de tenir en compte les dificultats que sorgeixen i les maneres en què es justifiquen i s'expliquen entre ells. Els alumnes comproven si la seva concordança és correcta? Se centren només en els valors màxim i mínim? Suposen que el valor de la mediana representada en un diagrama de caixa implica sempre que un alumne hagi aconseguit aquesta puntuació? Parlen de la dispersió de les dades? Cal, doncs, animar-los a utilitzar el llenguatge matemàtic correcte i fer-los preguntes per ajudar-los a raonar: Com saps que aquest diagrama de caixa podria representar les mateixes dades que aquest histograma? És interessant demanar a un altre membre del grup que respongui a la pregunta d'un company i, si tota la classe hi està d'acord, es poden escriure un parell de preguntes a la pissarra i discutir-ho breument.

Quan els diferents grups de treball acabin fent coincidir les seves targetes, cal donar l'oportunitat per comparar els diferents resultats a través d'un pòster i, en el cas que l'alumnat cregui que una targeta és al lloc equivocat, s'anima a dibuixar una fletxa al pòster per indicar cap a on creu que hauria d'anar i escriure una explicació del canvi.

Finalment, amb l'anàlisi de les diferents representacions es pot desenvolupar l'apreciació crítica dels potencials i les limitacions de les diferents maneres de resumir i representar dades.

Al web de l'NRICH també podeu trobar una activitat semblant, però en aquesta activitat cal relacionar els diagrames de caixa amb els diagrames de freqüències acumulades. L'activitat concretament és [box plot match](#).

Una bona manera de treballar les taules de freqüència de variables contínues, **saber #3.EST.DI.D**, pot ser l'estudi de l'alçada dels nois i noies de la classe: mesurem en cm les diferents alçades i les registrem en una taula agrupant les dades en intervals o classes:

Intervals d'alçades (cm)	Freqüència absoluta	Freqüència relativa	Marca de classe
150 - 154	2	2/30	152
155 - 159	5	5/30	157
160 - 164	12	12/30	162
165 - 169	7	7/30	167
170 - 174	4	4/30	172

Taula d'elaboració pròpia

Un cop creada la taula, podem discutir amb l'alumnat quines són les alçades més comunes, parlar sobre què representa la marca de classe i per què és útil per fer estimacions dins d'un interval o analitzar-ne la distribució: És simètrica, asimètrica? Hi ha alumnes molt més alts o més baixos que la resta?

L'activitat també es podria fer buscant les alçades dels diferents jugadors d'un equip de bàsquet o dividir la classe en petits grups i que cada grup faci l'estudi d'un equip de bàsquet diferent i discutir posteriorment les diferències en les alçades mitjanes i la dispersió de les dades.

17 B		JUAN NÚÑEZ 1,91 m España 20 años JFL INF	19 P		YOUSSEUPHA FALL 2,21 m Francia 29 años EUR
21 E		ÁLEX ABRINES 1,98 m España 31 años JFL	22 AP		JABARI PARKER 2,03 m EE.UU. 29 años EXT

Font: [ACB](#)

Per treballar la marca de classe, recomanem l'activitat del grup Vilatzara, [Temperatures a dues ciutats](#), en què es mostra un gràfic de barres de les temperatures de París i Nova York, però les temperatures estan donades en classes. Per tant, l'alumnat ha de fer servir la marca de classe correcta, així com utilitzar correctament les freqüències per ponderar i fer la mitjana. Una vegada obté dues mitjanes que són pràcticament iguals, ha de mirar amb més cura el gràfic per adonar-se de la dispersió de les dades.

A 3r d'ESO, donat que en cursos anteriors s'ha treballat la representació de dades en diagrames polars, histogrames i polígons de freqüència, considerem convenient introduir l'ús i la representació de dades mitjançant diagrames de caixa. Una bona proposta per treballar aquestes representacions i el **saber #3.EST.DI.E** és la que apareix a [Cubes on a boat](#) de Nuria Serra, que proposa una activitat dividida en dues parts: la primera és una adaptació de l'activitat [Bears on a Boat](#) del NCTM (descripció de l'activitat només accessible per als socis del NCTM).

L'alumnat ha de treballar per parelles o grups de màxim tres persones i fer servir un quadrat de paper d'alumini de 15 cm de costat per construir una barca, plegant el paper de la manera que vulguin, però sense

tallar-lo ni fer-hi cap forat. L'objectiu és dissenyar la barca de més capacitat possible (capacitat entesa com a major nombre de cubets que pot suportar la barca abans d'enfonsar-se, tal com s'explica a la fitxa de l'alumnat). És important no donar cap indicació més, així els dissenys de l'alumnat seran força diferents els uns dels altres i donarà més joc a parlar posteriorment de quin és el millor disseny. A continuació, l'alumnat passa per la «llacuna» i l'emplena de cubets per calcular la capacitat de la seva barca. Un cop hagin passat totes les parelles es recullen les dades i, posteriorment, l'alumnat pot introduir-les en una miniaplicació, com per exemple aquest [GeoGebra](#), per trobar el seu diagrama de caixa corresponent.



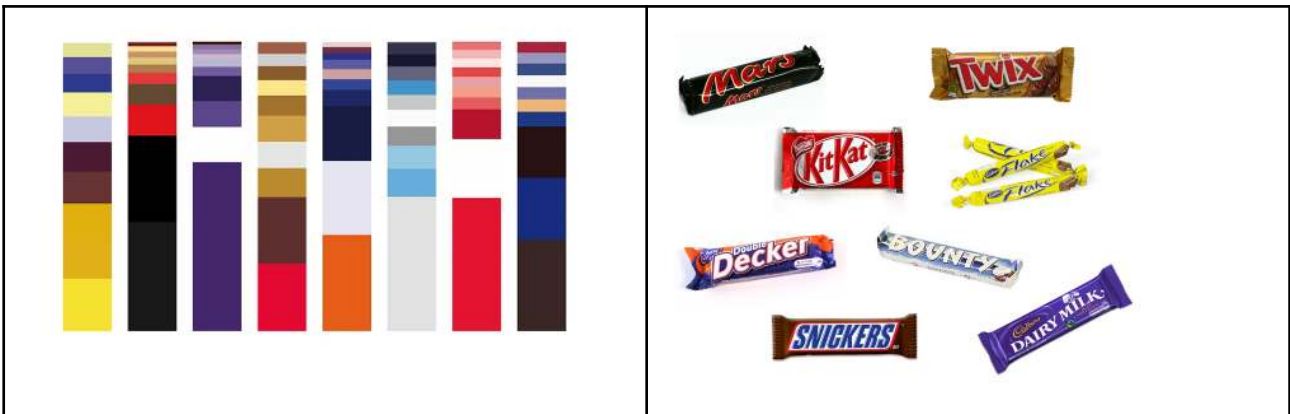
Font: [Cubes on a boat](#)

Autora: Nuria Serra

En gran grup es discuteix quin és el significat de cadascuna de les dades que apareix al gràfic i es dona sentit a les línies que formen el diagrama de caixa. A continuació, és interessant que sota la pissarra digital, on hi ha projectat el diagrama de caixa, s'ordenin totes les barques per capacitat, de més petita a més gran, i es demanarà a l'alumnat que passi a observar totes les barques per parelles. Un cop hagin passat totes les parelles, se'ls preguntarà si pensen que poden millorar-ne el disseny. La resposta gairebé segur que serà afirmativa i el professor ha de lliurar aleshores un altre quadrat de paper d'alumini i repetirem el procés. És molt important que en fer el segon diagrama de caixa no esborrin el primer, per comparar els resultats. Un cop tenim els dos gràfics, és interessant veure què es manté igual (acostuma a ser el màxim) i què canvia. Cal fer notar a l'alumnat que, la major part de vegades, el mínim del segon intent és més gran que la mediana del primer, i preguntar-nos per què passa aquest fet.

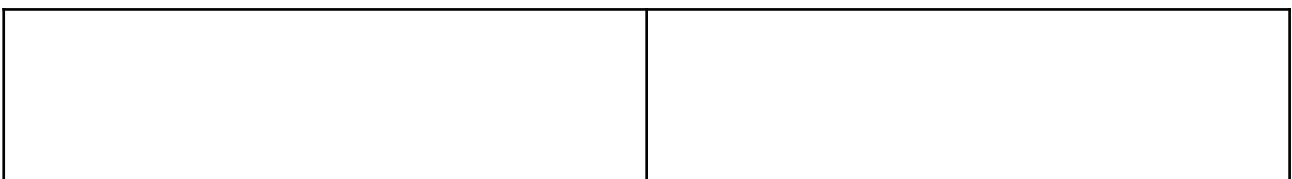
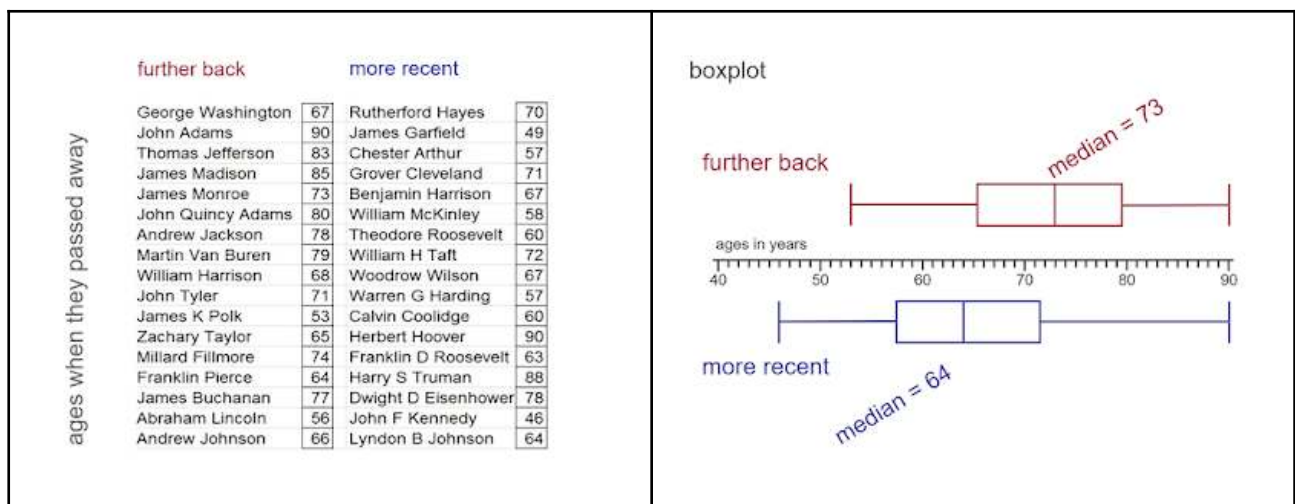
Una activitat de representació de dades a mig camí amb el disseny gràfic i amb fortes connexions amb el sentit espacial i artístic és la que presenta Don Stewart al seu [blog](#), basada en l'obra de l'artista britànic contemporani [Arthur Buxton](#), conegut pel seu treball en la visualització de dades, especialment en l'anàlisi cromàtica d'obres d'art. Buxton simplifica pintures famoses en gràfics que mostren la distribució dels colors predominants en aquestes obres. Un dels seus projectes més coneguts és la representació de les proporcions de color a les obres de pintors com Van Gogh o Monet, fent servir diagrames que redueixen les pintures a les seves composicions cromàtiques bàsiques.

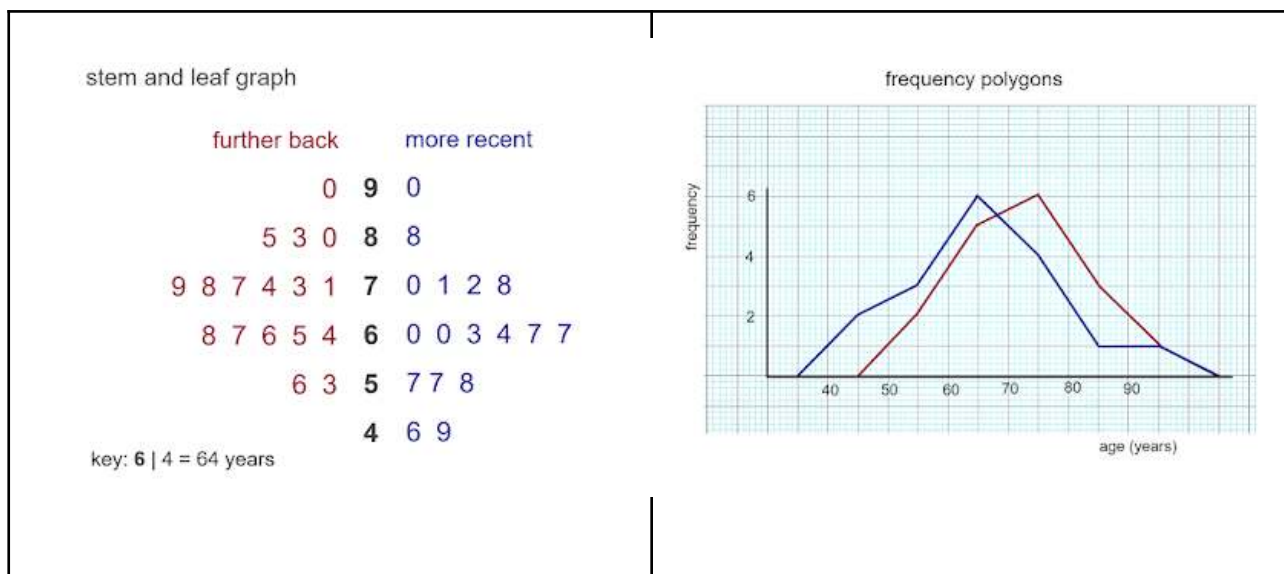
L'activitat proposada consisteix a relacionar els embolcalls llampants de xocolatines amb el seu gràfic de color corresponent i animar l'alumnat a fer el gràfic d'altres embolcalls.



Font: [bar graph and chocolate](#)
 Autors: Arthur Buxton i Don Stewart

Una altra bona activitat per a la construcció de gràfics i l'anàlisi posterior la podem trobar també al blog de [Don Stewart](#). L'activitat concretament s'anomena [comparing two data sets](#), en què s'estudia la longevitat dels presidents nord-americans de les diferents èpoques i s'anima a resoldre el problema fent servir diferents tipus de representacions.





Font: [comparing two data sets](#)

Autor: Don Steward

Per treballar el **saber #3.EST.DI.E**, també podeu fer servir l'activitat proposada a DESMOS, [Interpreting Box Plots](#), que explora els diagrames de caixa i les seves característiques i es pot utilitzar com a introducció o com a repàs.

A 3r d'ESO, l'alumnat ja hauria d'estar preparat en l'ús de fulls de càlcul per fer representacions gràfiques i tractament de dades. És interessant, per tant, ampliar l'horitzó de la programació de fulls de càlcul amb els comandaments típics per a les operacions estadístiques i treballar així el **saber #3.EST.DI.F**:

- El rang:=MAX(interval) - MIN(interval)
- La mitjana:=AVERAGE(interval)
- La mitjana ponderada: si els valors estan en un interval (per exemple, A2) i els seus pesos en un altre (per exemple, B2):=SUMPRODUCT(A2:A10, B2:B10) / SUM(B2:B10)
- La desviació típica: segons si les dades són una mostra o la població completa:
Mostra:=STDEV.S(interval)
Població:=STDEV.P(interval)
- El coeficient de variació: es calcula dividint la desviació típica per la mitjana i multiplicant per 100 per obtenir el percentatge:=(STDEV.S(interval) / AVERAGE(interval)) * 100

Cal tenir en compte que és essencial que l'alumnat entengui els conceptes estadístics per interpretar correctament els resultats i aplicar-los amb sentit crític. Els fulls de càlcul són una eina potent, però s'han d'acompanyar amb una bona comprensió de la teoria estadística per evitar conclusions errònies.

L'alumnat pot calcular fàcilment valors com la mitjana o la desviació típica amb funcions automàtiques, però, sense entendre què representen realment, pot interpretar malament les dades. Per exemple, pot confondre la mitjana amb el valor més freqüent o no captar el significat del coeficient de variació en termes de dispersió relativa. Sense entendre el significat de cada paràmetre, l'alumnat pot confondre conceptes com desviació típica, rang o coeficient de variació i interpretar malament la variabilitat de les dades. La manca de comprensió dels paràmetres estadístics restringeix la capacitat d'analitzar i contextualitzar els resultats en un escenari real. Per tant, introduïrem els comandaments del full de càlcul únicament quan l'alumnat hagi adquirit la comprensió dels coneixements necessaris, **saber #3.EST.DI.G**, **saber #3.EST.DI.H** i **saber #3.EST.DI.I**

A 1r i 2n d'ESO s'ha treballat extensament els conceptes de mitjana, moda i mediana, el concepte nou que apareix a 3r d'ESO és el quartil, **saber #3.EST.DI.G**

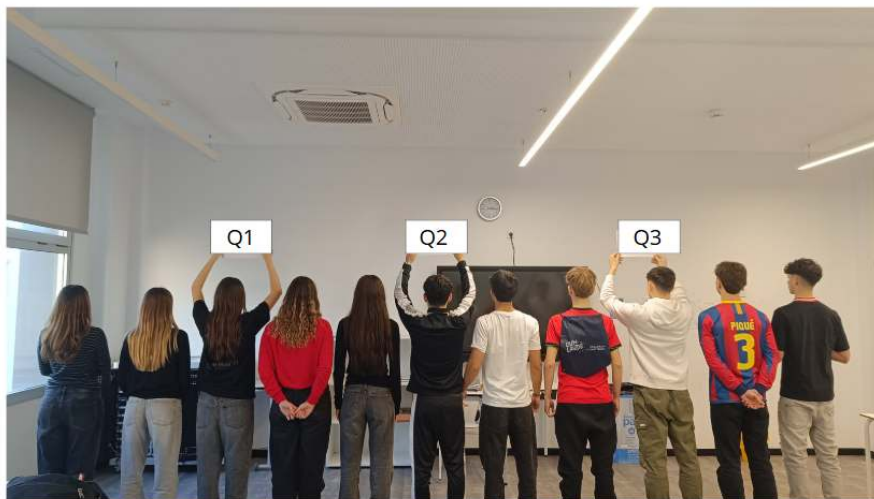
Una bona activitat per comprendre el significat dels quartils podria ser mitjançant la representació física de la distribució de les alçades de l'alumnat. Demanem als alumnes que facin una filera, ordenats de menor a major segons la seva alçada i, en el cas que hi hagi alumnes amb la mateixa alçada, es posaran l'un al costat de l'altre. Podem demanar als alumnes que s'ordenin en silenci comparant-se per parelles i intercanviant la posició si cal, repetint fins que tota la filera estigui ordenada. Realitzant aquest repte, podem aprofitar també per fer connexions en l'algoritme d'ordenació propi del pensament computacional Bubble Sort.

En funció del nombre total d'alumnes, dividirem la filera en quatre parts iguals (quartils). Si, per exemple, hi ha 20 alumnes, cada quartil tindrà 5 alumnes i assenyalarem clarament les posicions que corresponen a Q1 (el primer quartil, el 25% més baix), Q2 (la mediana, el 50%), i Q3 (el tercer quartil, el 75%).

Un cop indicats els quartils, podem reflexionar sobre què significa estar en cadascun dels quartils:

- Els que són al primer quartil (Q1) són els més baixos i representen el 25% d'alumnes amb l'alçada més baixa.
- Els que són al segon quartil (Q2) arriben fins a la mediana.
- Els alumnes del tercer quartil (Q3) tenen alçades per sobre de la mediana, però per sota del 75%.
- Els que són al quart quartil són els alumnes més alts, és a dir, el 25% amb les alçades més elevades.

Basant-nos en una activitat proposada per Don Steward també podem ordenar per separat nois i noies de la classe, fer el seu diagrama de caixa corresponent i analitzar el gràfic amb preguntes com les que es proposen a continuació:

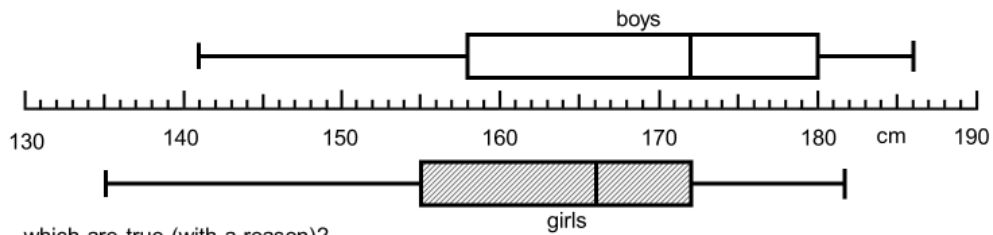


Ordenació dels alumnes de l'Institut El Joncar per alçades.

Font: elaboració pròpia.

Autora: Anna Ausina

boxplot of student's heights: boys and girls



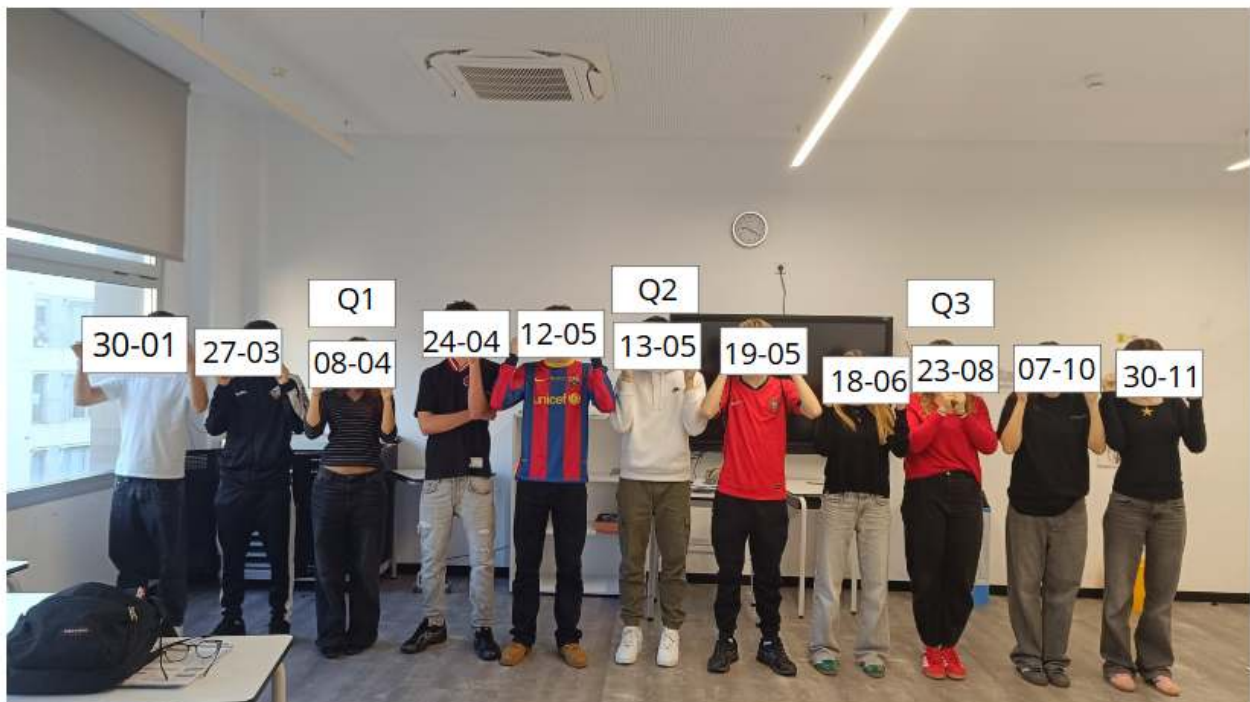
which are true (with a reason)?

- | | |
|---|---|
| 1. the girls are taller on average | 6. the tallest boy is 5cm taller than the tallest girl |
| 2. half the girls are over 165 cm tall | 7. both data sets are skewed to the left |
| 3. the girls show less spread in height | 8. half the boys are over 172 cm tall |
| 4. the boys show less spread in height | 9. $\frac{1}{2}$ the boys are as tall or taller than $\frac{1}{4}$ of the girls |
| 5. the shortest person is a girl | 10. $\frac{1}{4}$ of the girls are taller than the median boy |

Font: [boxplots of heights](#)

Autor: Don Steward

Donat que l'ordenació per alçades pot suposar problemes per a alguns dels alumnes, també poden ordenar-se per data d'aniversaris:



Ordenació d'alumnat de l'Institut El Joncar per data d'aniversaris.

Font: elaboració pròpia.

Autora: Anna Ausina

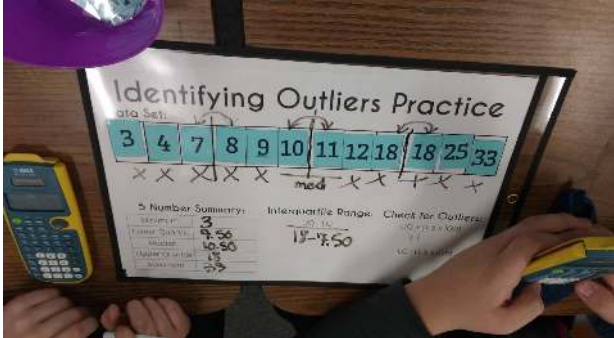
Podem treballar llavors el gràfic humà amb preguntes com: Quina seria la mediana de la nostra distribució? Qui la representa en la fila? Com podem dividir la fila en quatre parts iguals? Qui representa el primer quartil (Q1) i el tercer quartil (Q3)? Si féssim un diagrama de caixa amb aquestes dades, on situaríem els bigotis? I els extrems? Hi ha algun valor atípic (per exemple, si hi ha un sol alumne amb data d'aniversari molt allunyada de la resta)? Com quedaria la longitud de la caixa en un diagrama? És simètrica o està més carregada cap a un costat?

Després podem passar a dibuixar el corresponent gràfic i fer-nos més preguntes, com ara per què l'alumnat ha nascut més en una època de l'any que en una altra? Podem dir que la distribució és uniforme? Si féssim aquest experiment en altres classes, creus que el resultat seria similar? Podem calcular la moda d'aquest conjunt de dades? (Si hi ha mesos o dies repetits).

També podem aprofitar i comparar les dues distribucions, la de les alçades i la dels aniversaris: Sembla que hi hagi relació entre la data de naixement i l'alçada? Podríem pensar que els alumnes nascuts a principi d'any són més alts? Si féssim aquest estudi en diferents cursos (per exemple, de 1r a 4t d'ESO), creus que trobaríem diferències en la distribució de les alçades? I en les dates d'aniversari?

Després d'introduir la idea de quartil podem preguntar l'alumnat si poden pensar en altres contextos en què es podrien aplicar quartils (per exemple, en notes, ingressos o altres mesures).

Per altra banda, com que el càlcul de quartils pot resultar complicat per a una part del nostre alumnat, Sarah Carter proposa en l'entrada al seu blog [Dry Erase Workmat for Finding Five Number Summary, IQR, and Outliers](#) una plantilla esquemàtica per ajudar al càlcul de quartils i una pràctica basada en l'extracció de nombres aleatoris:



Identifying Outliers Practice

Data Set:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

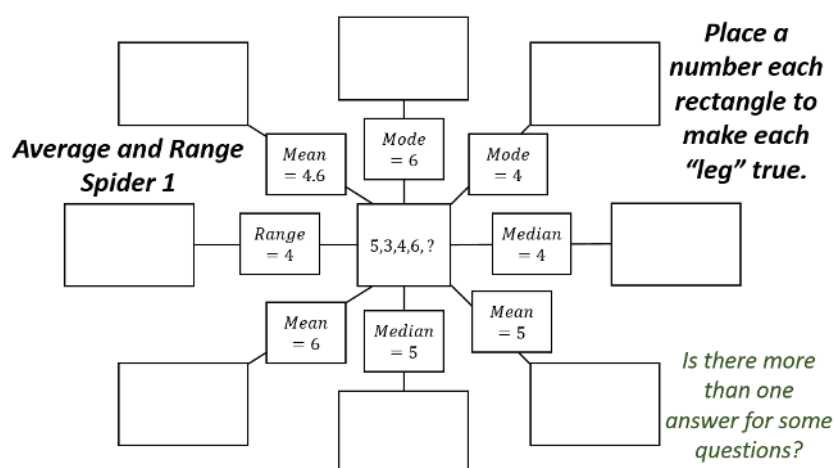
5 Number Summary: <table border="1" style="width: 100%;"> <tr><td>Minimum</td><td></td></tr> <tr><td>Lower Quartile</td><td></td></tr> <tr><td>Median</td><td></td></tr> <tr><td>Upper Quartile</td><td></td></tr> <tr><td>Maximum</td><td></td></tr> </table>	Minimum		Lower Quartile		Median		Upper Quartile		Maximum		Interquartile Range: <table border="1" style="width: 100%;"> <tr><td>UQ - LQ</td><td></td></tr> </table>	UQ - LQ		Check for Outliers: <table border="1" style="width: 100%;"> <tr><td>UQ + (1.5 x IQR)</td><td></td></tr> <tr><td>LQ - (1.5 x IQR)</td><td></td></tr> </table>	UQ + (1.5 x IQR)		LQ - (1.5 x IQR)	
Minimum																		
Lower Quartile																		
Median																		
Upper Quartile																		
Maximum																		
UQ - LQ																		
UQ + (1.5 x IQR)																		
LQ - (1.5 x IQR)																		

Font: [Dry Erase Workmat for Finding Five Number Summary, IQR, and Outliers](#)

Autora: Sarah Carter

Per altra banda, un recurs d'ajuda per al càlcul de quartils és la [calculadora alcula](#), que pot fer-se servir per comprovar els càlculs.

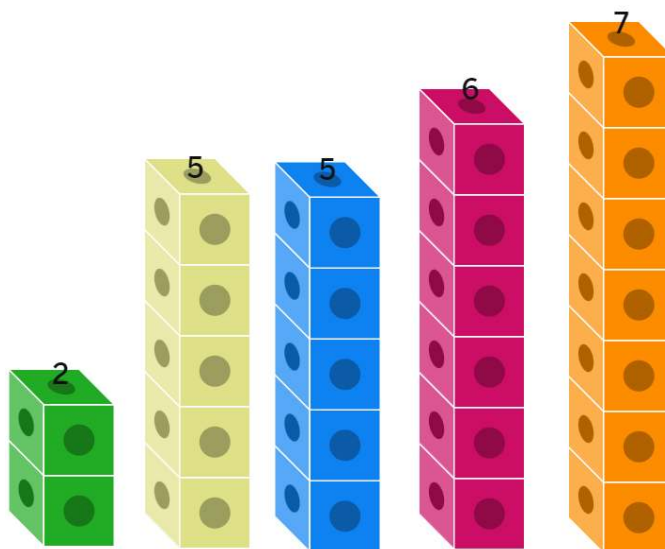
Si es desitja repassar els conceptes de mitjana, mediana i moda també podem trobar al blog de Sarah Carter el [Mean, Median, Mode, and Range Spider Puzzles](#):



Font: [Mean, Median, Mode, and Range Spider Puzzles](#)

Autora: Sarah Carter

Es pot aprofundir perfectament en el treball al voltant de la mitjana, mediana, moda i rang, fent l'activitat ja citada a 2n d'ESO [Unequal averages](#) del web NRICH, que parteix d'un conjunt de 5 nombres que compleixen que la mitjana és igual a la mediana, a la moda i al rang i repta l'alumnat a trobar altres conjunts de nombres que compleixin aquesta mateixa propietat.



Conjunt de 5 nombres que compleixen que la mitjana=moda=mediana=rang

Font: elaboració pròpia.

L'ús de representacions visuals (dibuixar quadrets a la llibreta) o l'ús de materials manipulables com policubs, pot ser un bon suport per ajudar l'alumnat a ser sistemàtic i no deixar-se cap possibilitat.

L'activitat s'amplia buscant un conjunt de nombres que poden o no complir les propietats següents:

- A. Moda < Mediana < Mitjana
- B. Moda < Mitjana < Mediana
- C. Mitjana < Moda < Mediana
- D. Mitjana < Mediana < Moda
- E. Mediana < Moda < Mitjana

F. Mediana < Mitjana < Moda

Una activitat per treballar inferències comparatives sobre dues poblacions i el càlcul i la interpretació dels paràmetres de dispersió estadístics, **saber #3.EST.DI.H**, és l'activitat proposada a [Mathematics Assessment Project](#), anomenada [Comparing Data Using Statistical Measures](#). Com és habitual en la metodologia de la Universitat de Nottingham, l'alumnat comença fent una tasca individual a casa i, donades un conjunt de dades corresponents al temps que necessita per desplaçar-se de la feina a casa, ha de donar arguments a favor del desplaçament en bicicleta o en cotxe.

Getting James to Work

James wants to get to work as quickly and reliably as possible in the mornings.

He tries three different transport methods:

- cycle all the way
- drive all the way
- walk to the railway station, take the train, and walk from the station.

He tries each method several times and records how many minutes the entire journey takes:

bicycle	28	24	25	29	25	26	26	23	29	25
car	19	21	32	57	31	27	21	24		
walk-train-walk	21	24	31	26	24	30				

Look carefully at James' results.

1. Use the data to make a case for why he should travel to work by bicycle.

2. Use the data to make a case for why he should travel to work by car.

Font: [Comparing Data Using Statistical Measures](#)
Mathematics Assessment Project

Un cop recollida l'activitat el professor la retorna corregida als alumnes amb preguntes que afavoreixin la seva reflexió i la millora de la tasca. A l'activitat també hi ha exemples de les possibles preguntes que podem fer a l'alumnat:

Tasca de l'alumnat	Preguntes que pot fer el professor
• Un alumne ignora el valor atípic de les dades del cotxe. Per exemple: L'estudiant escriu que el temps mitjà amb cotxe és de 29 minuts.	• Un dia de cotxe va ser molt diferent de tots els altres. Quin? Què podria haver provocat això? Què hem de fer amb aquest valor?

• L'alumnat justifica els desplaçaments en bicicleta i en cotxe fent comparacions raonables.	• Quins altres factors, a part d'aquestes dades, poden ser importants que James tingui en compte a l'hora de decidir com anar a treballar?
--	--

Abans de tornar-los el full fet a casa, es proposa discutir sobre 4 conceptes estadístics: mitjana, mediana, rang i valor atípic i treballar altre cop, ara en grups, sobre el problema de James.

Aparcarem el problema de James per a més endavant, és hora de treballar en grup el problema d'arribada a la feina de Raj I i l'arribada a la feina de Raj II, en què l'alumnat ha de completar les dades que falten a la taula tenint en compte una sèrie d'informacions:

- Els temps mitjans en cotxe i en bicicleta són els mateixos.
- El temps mitjà del cotxe és de 23 minuts, mentre que el temps mitjà de la bicicleta és de 25 minuts.
- El rang de temps de bicicleta és de 6 minuts, mentre que el rang de temps de cotxe és de només 5 minuts, si exclou el valor atípic.
- Conclusió: Raj hauria d'anar amb cotxe.

Completeu la taula:

Bicycle times	25	22	26	23	28	23	25	27	24	27
Car times										

Font: [Comparing Data Using Statistical Measures](#)
Mathematics Assessment Project

Un cop resolta la taula, els diferents grups s'intercanvien les taules, calculant la mitjana, la mediana, el rang i buscant els possibles valors atípics per comparar així les distribucions de dades. Tots els equips han arribat a la mateixa conclusió de com ha d'anar Raj a la feina? És un bon moment per introduir la desviació típica dels diversos conjunts de dades.

En una discussió a tota la classe, en funció de com ha anat la lliçó, animeu els alumnes a parlar sobre el que han après, les estratègies que han utilitzat i/o quines diferències han sorgit durant la comparació de descripcions i conclusions:

- Amb quina mesura heu treballat primer? Per què ha estat això? Llavors què heu fet?
- Algú ha utilitzat una estratègia diferent?
- Quines dificultats heu trobat? Heu superat aquestes dificultats? Com?

Animeu també l'alumnat a reflexionar sobre les decisions que van prendre en generar les dades, per exemple, els estudiants que treballen amb les mateixes descripcions poden haver optat per utilitzar un nombre contrastat de valors de dades per completar la taula:

- Sara, quins valors de dades heu utilitzat per completar el Cotxe/Horaris de bicicleta per a A1/B1?
- Mateu, quins valors tenies per a A1/B1?
- Els dos conjunts de dades coincideixen amb la descripció? Per què podem tenir diferents valors de dades que compleixin la mateixa descripció?
- Hem de completar la taula de dades amb 10 valors? Per què/Per què no?

Retorneu la tasca de James amb les preguntes individuals i animeu-los a ampliar les seves reflexions un cop fetes les activitats de la tasca de Raj.

	Bicycle	Car	Walk-train-walk	Car (with outlier omitted)
Mean	26	29	26	25
Median	25.5	25.5	25	24
Range	6	38	10	13
Standard Deviation <i>(correct to 2 decimal places)</i>	2.05	12.27	3.85	5.13
Mean Absolute Deviation <i>(correct to 2 decimal places)</i>	1.6	8.25	3	4.29

Font: [Comparing Data Using Statistical Measures](#)
Mathematics Assessment Project

L'alumnat ha d'analitzar en grup altre cop la tasca de James. Donada la petita quantitat de dades i la similitud dels valors mitjans, els estudiants poden observar que no hi ha gaire diferència i hi ha poca base per poder arribar a una conclusió ferma.

El cas d'anar en bicicleta podria basar-se en el fet que la mitjana és la (conjunta) més petita, juntament amb el fet que la difusió de les dades és menor. Això vol dir que en James pot estar més segur del temps que trigarà a posar-se a treballar, ja que els valors són més coherents. L'alumnat també pot comentar sobre el cost més barat i els beneficis ambientals i de fitness del ciclisme, la facilitat amb què pot superar els embussos de trànsit i la possibilitat que després de setmanes d'anar en bicicleta a la feina pugui fer el viatge encara més ràpidament, ja que es posa més en forma. No obstant això, aquests no són arguments basats en les dades.

El cas d'anar en cotxe d'entrada sembla feble, ja que la mitjana és superior a la dels altres mitjans de transport i les dades també estan disperses, la qual cosa fa que el temps de trajecte sigui molt variable i aquest mètode sigui bastant poc fiable. Tanmateix, gran part d'això és causat per l'únic valor atípic de 57 minuts. Aquest valor pot ser útil per introduir el concepte Cigne Negre, que fa referència a esdeveniments

extremadament improbables, que no poden ser anticipats mitjançant la predicció estadística i, quan ocorren, tenen un impacte molt significatiu. Es pot deure a una catàstrofe o un canvi radical en el decurs dels esdeveniments i que sovint tenen conseqüències enormes, com per exemple la crisi financera global de 2008, quan els experts van ser incapaços de predir-la i, quan va succeir, els seus efectes van ser devastadors per a l'economia mundial. Un altre exemple podria ser l'aparició de la pandèmia de covid-19.

En el cas del problema d'anar en cotxe, el Cigne Negre, potser és causat per un embús de trànsit estrany. Sense saber amb quina freqüència es produeixen aquests esdeveniments, és possible que els estudiants no estiguin segurs de què cal fer amb aquesta dada. Si l'ometem, s'obtenen els resultats a la columna de la dreta de la taula anterior, donant el temps mitjà més petit al viatge en cotxe. No obstant això, encara hi ha el risc no quantificat del temps de viatge molt llarg ocasional. Tot i que no hi ha una regla clara sobre què cal fer amb els valors atípics, els estudiants han de ser conscients del problema i, sens dubte, haurien de comentar un valor atípic clar com aquest.

Es proposa llavors l'avaluació individual de l'alumnat a través de la tasca Running Times que es pot fer a classe o a casa.

Per estudiar la dispersió de dades Don Stewart també proposa l'activitat d'ànecs de dutxa següent, amb el títol [spread](#):

spread outness



- (a) five people were asked how many ducks they have in their bath
their answers were: 6 , 3 , 6 , 4 , 1
- (b) five more people were asked how many ducks they have in their bath
their answers were: 8 , 3 , 1 , 4 , 4
- (c) five more people were asked: 4 , 0 , 8 , 4 , 4
- (d) five more people were asked: 3 , 7 , 3 , 5 , 2

which of these
sets of five
people had the
most spread out
results?

try to rank these sets of results: most spread out to least spread out

Font: [spread](#)
Autor: Don Stewart

Les desviacions estàndard (2 decimals) són força properes:

- (a) 1,90
- (b) 2,28
- (c) 2,53
- (d) 1,79

així que classificar els ànecs en un ordre no és una tasca tan fàcil, donat que els rangs donen un ordre de classificació raonable, però no distingeixen entre el cas (a) i (d), tots dos de rang 5.

L'activitat resulta interessant perquè aquests quatre petits conjunts de dades comparteixen la mateixa mitjana i la mateixa desviació absoluta mitjana. S'espera que l'alumnat reflexioni sobre la necessitat de la desviació estàndard que, a més de convertir en positives les desviacions negatives, amplifica les diferències per donar més pes a les variacions més grans.

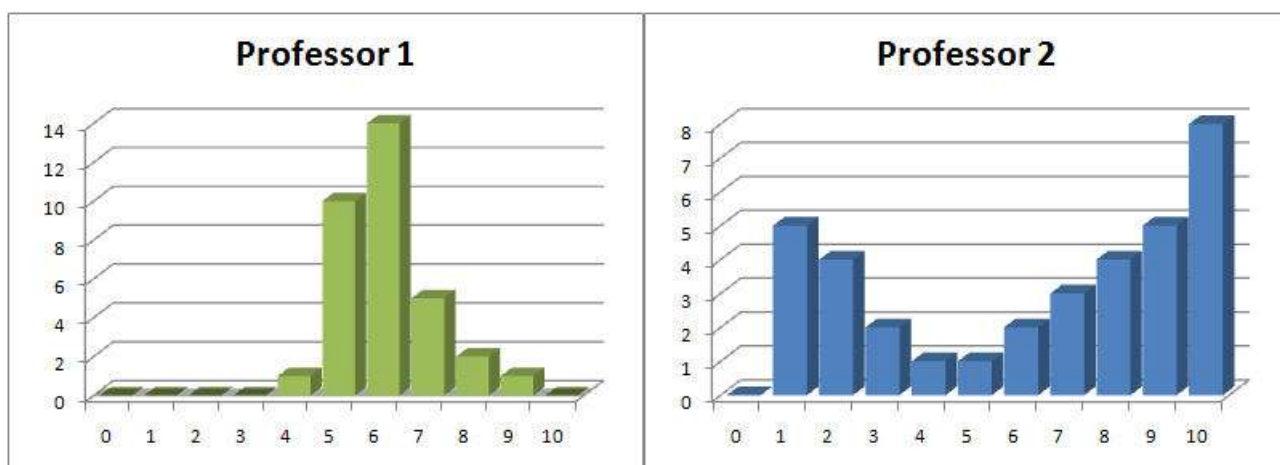
El grup Vilatzara també proposa dues activitats per treballar el concepte de desviació, **saber #3.EST.DI.H.** A l'activitat [Sortida de cap de setmana](#) es presenta una situació basada en el viatge que fan uns amics un cap de setmana i en tornar han de passar comptes. S'espera que el concepte de mitjana aparegui de manera automàtica i que els deutes o el que han de recuperar es calculi com la distància a la mitjana, mantenint el signe corresponent. A l'hora de portar l'activitat a classe, es demana que cada grup faci la representació que cregui més convenient i expliqui el seu gràfic. S'aconsella afrontar l'activitat sense presentar prèviament cap definició de desviació i al final formalitzar-la.

Un cop aconseguida l'activitat de sortida de cap de setmana, per introduir el concepte de desviació típica podem portar a terme a classe l'activitat [La mida de les peces](#). L'activitat ens presenta un taller amb dues màquines amb les mateixes característiques tècniques i el mateix preu, però cal triar la que pugui construir un cilindre més a prop d'un diàmetre de 12,6 cm. En fer els càlculs, l'alumnat s'adona que els dos grups de dades tenen la mateixa mitjana, la qual cosa els fa equivalents. Necessitem llavors algun indicador que ens permeti discriminar una de les dues màquines i escollir la més adient. L'alumnat ha de fer una transferència d'informació respecte al que s'ha treballat a l'activitat [Sortida de cap de setmana](#), però, en aquest cas, es comprova que la mitjana de les desviacions no aporta cap informació perquè la suma de les desviacions és nul·la; per tant, el professor haurà d'intervenir per preguntar possibles solucions perquè els signes no tinguin aquest efecte. La resposta s'ha de reconduir a les dues opcions: la de tractar les desviacions en valor absolut i la d'eleva al quadrat les desviacions. En cas de no sortir, elevar al quadrat i després fer l'arrel quadrada, és important comentar-ho a classe, i preparar la presentació de la fórmula de la desviació.

L'activitat s'amplia amb una segona part on s'augmenta la mida de la mostra i on l'alumnat s'ha d'adonar que la diferència en la mida de les mostres no afecta la decisió a l'hora d'escollir la màquina, i una tercera part on les dues màquines tenen mitjana diferent i on caldrà reflexionar sobre altres aspectes, no necessàriament estadístics (per exemple, si és preferible que les peces pequin per defecte que per excés).

Per treballar el **saber #3.EST.DI.H.**, també hi ha dues activitats DESMOS que poden servir per treballar a classe: **Cronómetro humano** que permet treballar la dispersió de dades i **Cronómetro humano 2**, que analitza la dispersió de dades a partir de la desviació mitjana.

Una altra activitat per treballar el **saber #3.EST.DI.H.** és examinar dos diagrames de barres que representen la distribució de notes dels dos professors diferents com els que es mostren a continuació:



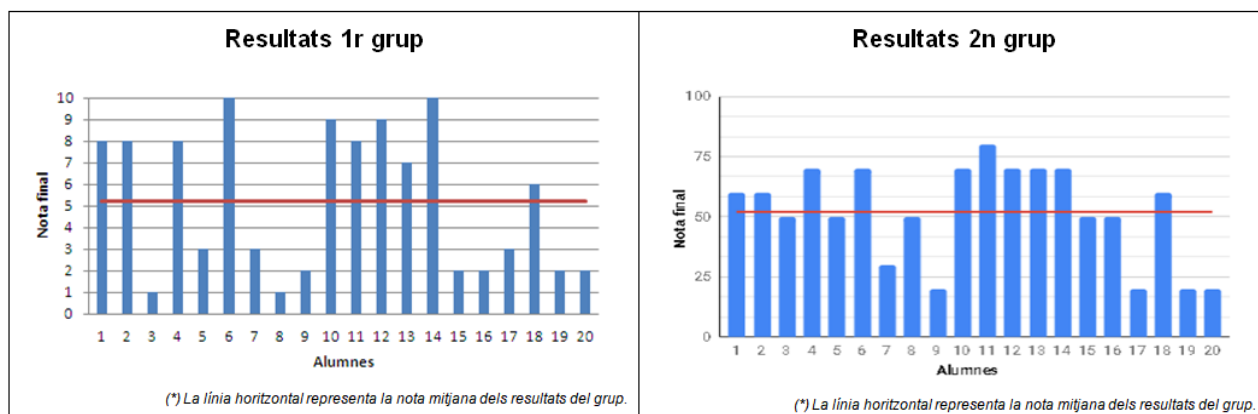
Font: imatge elaborada per Raül Fernández

Podem proposar a l'alumnat que identifiqui si les notes tendeixen a concentrar-se en un rang específic o si estan més distribuïdes. Podem determinar la mitjana de les notes de cada professor i calcular la desviació estàndard per veure quin professor té una distribució més homogènia o més dispersa. Podem fer reflexionar el nostre alumnat sobre quin professor té una distribució de notes més uniforme? Quin tendeix a posar notes més altes o més baixes? Amb quin professor preferiríeu fer classe? Preferiríeu un professor que posés notes més variades o un amb una distribució més estable? Creieu que un professor amb una variació alta de notes és més objectiu o més subjectiu en l'avaluació?

Per introduir i ampliar el concepte de coeficient de variació, **saber #3.EST.DI.I**, el grup Vilatzara ens presenta dues activitats molt riques.

L'activitat [La població de les comarques](#) presenta en forma de taula el nombre d'habitants en les diferents poblacions d'una mateixa comarca. Per afirmar que la població d'una comarca és més dispersa que la de l'altra, que és el que ens demana l'activitat, necessitarem comparar la desviació respecte a la seva mitjana, que en aquest cas és diferent i, per tant, aquesta activitat ens permet introduir el concepte Coeficient de Variació.

Per comparar diferents distribucions de dades, també podem portar a terme a l'aula l'activitat [On hi ha més dispersió?](#), en la qual tenim les dades de les notes de dos grups de diferents països: en un les notes estan en escala de 0 a 10, i en l'altre, en escala de 0 a 100.



Font: [On hi ha més dispersió?](#)

Autors: Grup Vilatzara

A la vista dels gràfics de barres, el primer grup presenta més dispersió que el segon; tanmateix, si calculem els paràmetres de dispersió usuals (variància, desviació mitjana i desviació típica), no reflecteixen aquest fet. L'objectiu de l'activitat és que l'alumnat s'adoni que els paràmetres de dispersió usuals només serveixen per comparar mostres que han fet servir el mateix sistema de mesura per quantificar les dades. Si no és així, cal utilitzar un nou paràmetre de dispersió: el coeficient de variació.

Una activitat per treballar el **saber #3.EST.DI.1** i que permet als estudiants comprendre conceptes estadístics com la desviació estàndard i el coeficient de variació en un context real d'inversió i mercats financers, pot ser analitzar la dispersió del valor de diverses criptomonedes durant un any mitjançant el càlcul de la desviació estàndard i el coeficient de variació per intentar entendre la seva volatilitat. Podem preguntar-nos quina de les diferents criptomonedes té més risc d'inversió o com la volatilitat pot ser un factor positiu o negatiu per als inversors i per què. Podeu trobar les dades a [CoinMarketCap](https://coinmarketcap.com). L'alumnat pot obtenir el preu mensual d'una criptomoneda durant un any (per exemple, Bitcoin, Ethereum o una altra de popular), organitzar les dades en una taula amb els mesos i els valors corresponents i calcular el coeficient de variació: un CV baix indicarà poca variabilitat i una criptomoneda estable, mentre que un CV alt indica una volatilitat alta i una inversió de risc més elevat.

Inferència

Sabers

- A. Disseny d'investigacions per donar resposta a una pregunta, repte científic o situació quotidiana. **[ESS]**
- B. Reconeixement en contextos no matemàtics i d'altres matèries de situacions en què desenvolupar un estudi estadístic. **[ESS]**
- C. Tipus de mostreig: simple, aleatori sistemàtic i aleatori estratificat. **[AMP]**
- D. Elecció de mostres significatives d'una població a fi de portar a terme un estudi estadístic.
- E. Formulació de les preguntes adequades per conèixer les característiques d'una població.
- F. Recollida i organització de la informació. **#EST.DI**
- G. Anàlisi dels resultats per identificar patrons i tendències.
- H. Interpretació i relació dels resultats obtinguts amb els objectius de l'estudi.
- I. Reflexió sobre l'ús ètic de les dades estadístiques i la responsabilitat en la interpretació i presentació de dades. **#SOE.EQ**
- J. Elaboració d'un informe on s'expliqui la metodologia emprada en l'estudi estadístic plantejat i amb els seus resultats i conclusions.

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

Després d'haver consolidat a 2n d'ESO les bases del disseny d'investigacions i estudis estadístics, a 3r d'ESO es fa un pas més enllà per ampliar els horitzons analítics. En aquest nivell, l'alumnat ha d'aprofundir en estudis més complexos que requereixen una comprensió més detallada de les dades, especialment pel que fa a la comparativa de diversos subgrups o conjunts d'informació.

Aquesta ampliació és possible gràcies a la introducció de conceptes clau treballats en el bloc de distribució, com la desviació típica i el coeficient de variació. Aquests elements permeten analitzar amb més precisió la dispersió i la variabilitat de les dades, cosa essencial per avaluar la fiabilitat i la comparabilitat dels resultats obtinguts. La inferència estadística esdevé, així, una eina fonamental per interpretar les dades de manera crítica i treure conclusions amb rigor.

Un altre aspecte central és l'aplicació d'aquest coneixement fora del context matemàtic estricte. A 3r d'ESO amb l'aparició de les assignatures optatives, considerem essencial que l'alumnat desenvolupi la capacitat de reconèixer situacions en altres matèries com per exemple ciències socials, física i química o emprenedoria, en què seria pertinent plantejar un estudi estadístic. A més, el treball per projectes esdevé una eina clau per aprofundir en aquests coneixements, ja que permet a l'alumnat aplicar l'estadística a contextos reals mitjançant l'exploració, la recerca i la resolució de problemes interdisciplinaris. Això contribueix a fer que l'aprenentatge sigui més transversal i connectat amb la realitat, i afavoreix la transferència de competències entre disciplines.

En definitiva, el treball de la inferència a 3r d'ESO no només enriqueix la formació estadística de l'alumnat, sinó que també els prepara per afrontar amb èxit situacions complexes que requereixen una anàlisi crítica i fonamentada, tant dins com fora de l'àmbit acadèmic.

Comentaris sobre les connexions

La relació entre la reflexió sobre l'ús ètic de les dades estadístiques i la responsabilitat en la interpretació i la presentació de dades està profundament vinculada amb l'educació socioemocional, especialment pel que fa a abordar i qüestionar idees preconcebudes i estereotips. **#SOE.EQ.C**

La reflexió sobre l'ús ètic de les dades estadístiques implica ser conscient que les dades no són objectives, sinó que poden ser manipulades o interpretades de manera parcial per reforçar narratives esbiaixades. Aquesta manipulació pot ocórrer en diverses etapes del procés, des de la selecció de les dades fins a la manera en què es recullen, organitzen o presenten. Les decisions sobre quines dades recollir, quins grups incloure o excloure, i com representar visualment els resultats poden influir considerablement en les conclusions que es prenen. Això és especialment rellevant en la interpretació i la presentació de dades, ja que un ús irresponsable pot perpetuar desigualtats o transmetre missatges incorrectes que alimentin prejudicis, com els estereotips de gènere o les suposades diferències en habilitats matemàtiques innates entre grups. Per tant, és essencial que l'alumnat com a futur usuari de dades sigui crític i responsable en el maneig de la informació per evitar la distorsió de la realitat i assegurar-se que els resultats reflecteixin amb precisió els fets.

Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

Tot i que al **saber #3.EST.IN.C**, el tipus de mostreig: simple, aleatori sistemàtic i aleatori estratificat es considera un saber d'ampliació, a 3r d'ESO és convenient continuar fent activitats orientades a treballar el concepte de mostreig i a reflexionar sobre les dificultats que pot implicar aconseguir un mostreig no esbiaixat. Aquest enfocament ajuda a consolidar la comprensió de com els diferents tipus de mostreig afecten la representativitat de les dades i afavoreix una anàlisi estadística més rigorosa i crítica.

Recursos i activitats

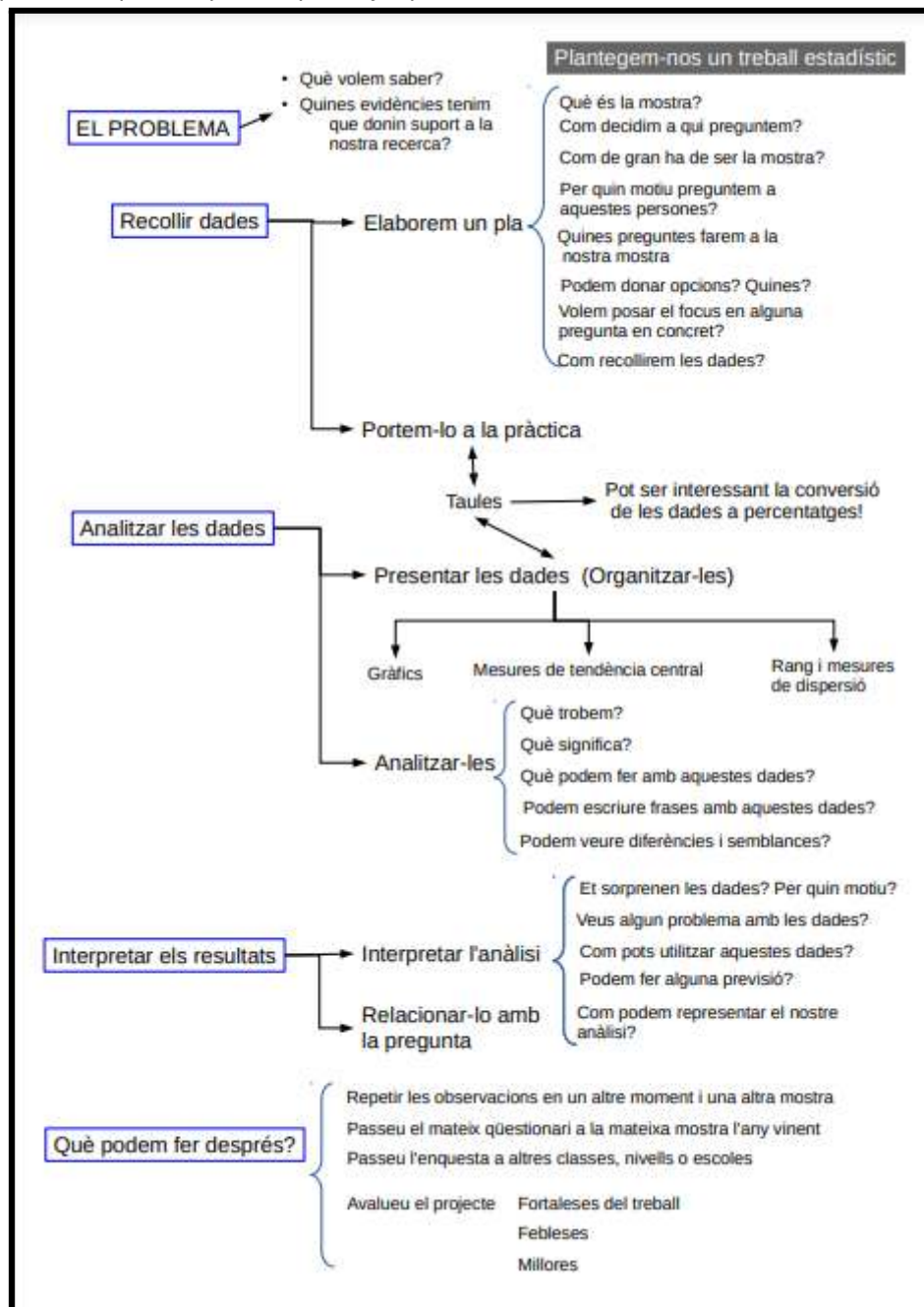
Recursos i activitats generals per al bloc de sabers

Un dels recursos que cal tenir en compte per treballar estadística a l'aula és sense dubte el lloc del grup Vilatzara, [l'estadística, més enllà dels paràmetres](#), que fa una proposta per treballar l'estadística per a cadascun dels nivells, ordenats seqüencialment i, a més a més, en cadascun dels nivells trobareu una proposta per desenvolupar un projecte.

Recursos i activitats per treballar sabers concrets

#IN.A

Per tal d'introduir el disseny d'investigacions a l'aula, **saber #3. EST. IN. A**, Lluís Mora presenta en forma de pregunta les qüestions que ens podem plantejar per fer un estudi estadístic:



Font: [Treball estadístic](#)

Autor: Lluís Mora

Per altra banda, a l'ARC, podeu trobar una proposta de Raül Fernández per a la realització d'un [Estudi estadístic: l'alimentació i la salut](#), en el qual es treballen les diferents fases de l'estudi estadístic: el disseny de l'estudi i la definició dels seus objectius demanant a l'alumnat que triï 6 variables d'estudi, de les quals 2 han de ser qualitatives, 2 quantitatives discretes i 2 de quantitatives contínues, la recollida de les dades a través d'un [formulari](#), l'organització i el tractament de les dades obtingudes i l'anàlisi dels resultats obtinguts per extreure'n conclusions. Si no es disposa de prou temps per dur a terme l'estudi complet, a l'ARC trobareu el fitxer **MP_exemples.zip** on consten les dades en brut de l'enquesta real portada a terme per l'alumnat i les taules creades, que permet treballar l'organització i el tractament de dades i l'anàlisi dels resultats obtinguts per extreure'n conclusions.

El grup Vilatzara també fa una proposta de disseny estadístic per a 3r d'ESO amb fortes connexions amb altres àmbits i fàcilment convertible en una situació d'aprenentatge: l'estudi de la fiabilitat de les dades d'etiquetatge de l'envàs dels productes que consumim. En l'activitat [Control de qualitat](#) es pretén convidar l'alumnat a iniciar-se en el control de qualitat de les empreses i, a través d'un estudi estadístic, esbrinar si com a consumidors ens enganyen amb el contingut d'un refresc o d'una bossa de patates respecte a la referència que apareix a l'etiqueta del producte.

Un altre recurs per treballar el disseny d'investigacions estadístiques, **saber #3.EST.DI.B.**, és el concurs [Planter de sondeigs i experiments](#) que any rere any convoca la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la UPC, la Facultat d'Economia i Empresa de la UB i la Facultat de Ciències de la UAB. Adreçat a estudiants d'ESO i batxillerat, té com a objectiu principal despertar en els alumnes la curiositat per l'estadística com a eina fonamental en la recerca, tant en ciències experimentals com en ciències socials i, per tant, ens servirà per treballar el saber **#3.DI.B.**

Concurs per a grups d'alumnat d'ESO i batxillerat:

<https://www.youtube.com/watch?v=tu-WJBCLALU&t=12s>

Al web podeu trobar els [guanyadors del concurs](#) des de l'any 2010 en les diverses categories, 1r-2n d'ESO, 3r-4t d'ESO i batxillerat i, sens dubte, és una autèntica font d'inspiració per obrir la porta al treball en l'estadística a l'aula.

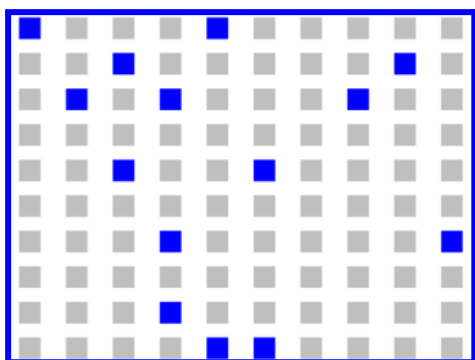
També hi ha una de les activitats amb fortes connexions amb l'estadística i la biologia a [La batalla dels becs](#) adaptada per Victòria Carbó de la «Batalla de los picos» de Judy Scotchmoor i que es troba a Nclark amb el títol [Evolution](#). Aquesta proposta forma part de les activitats usuals que fan els nostres companys i companyes de l'àmbit de les ciències naturals, inspirada en la competència pels recursos naturals, i ajuda l'alumnat a entendre com les característiques físiques poden determinar l'èxit d'una espècie per obtenir aliment. Vista des de la perspectiva de l'estadística, permet recollir, analitzar i interpretar dades per extreure conclusions sobre la relació entre adaptació i competència. L'enfocament estadístic introdueix conceptes com la distribució de freqüències, la mitjana, la desviació estàndard, i la comparació de grups, així que quadra amb els sabers marcats per a 3r d'ESO.

Des del punt de vista de la biologia podem dir que els ocells tenen becs adaptats a diferents tipus d'aliment (ex: llavors, insectes, fruita). Aquesta diversitat és clau per a la supervivència i evita la competència directa. Quan els recursos són limitats, només els que tenen l'adaptació més eficient poden accedir-hi. Per representar diferents ocells amb becs adaptats a recursos concrets i observar quins tenen més èxit en condicions de competència, farem servir eines que simulen formes de becs (pinces, culleres, palets, agulles d'estendre roba, etc.) i per **als recursos**, diversos tipus d'aliments o materials que simulin diferents menes de menjar (llavors petites, trossos de paper, clips, boletes de plastilina, macarrons, etc.).

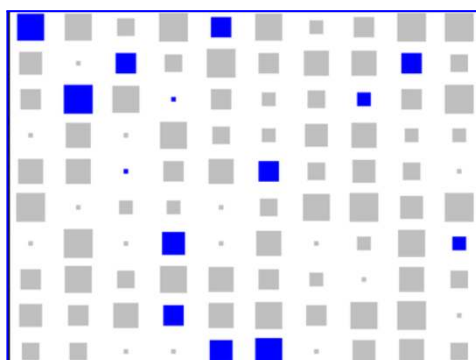


Font: [La batalla dels becs](#)
Autors: CDEC-ARC

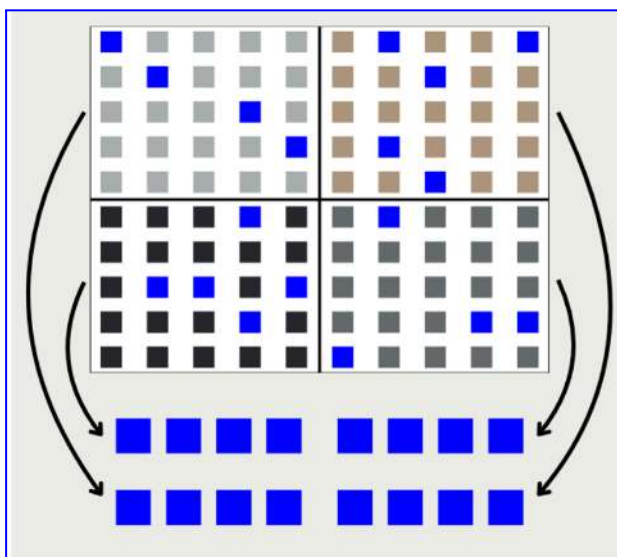
Podem demanar a l'alumnat que relacioni l'explicació del tipus de mostreig amb el model visual corresponent.



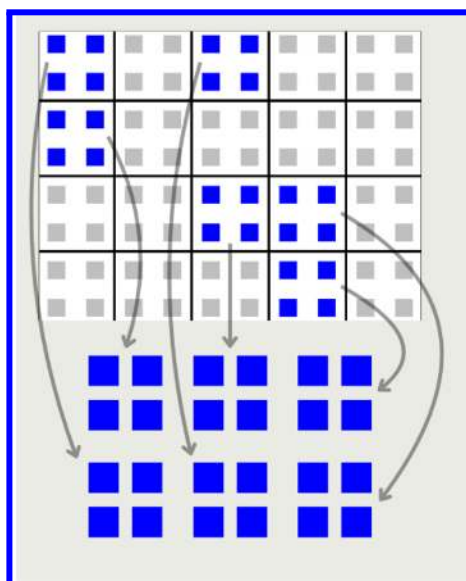
Mostreig aleatori simple: podem escollir cada unitat de la població de manera que tots els elements a escollir tinguin la mateixa probabilitat.



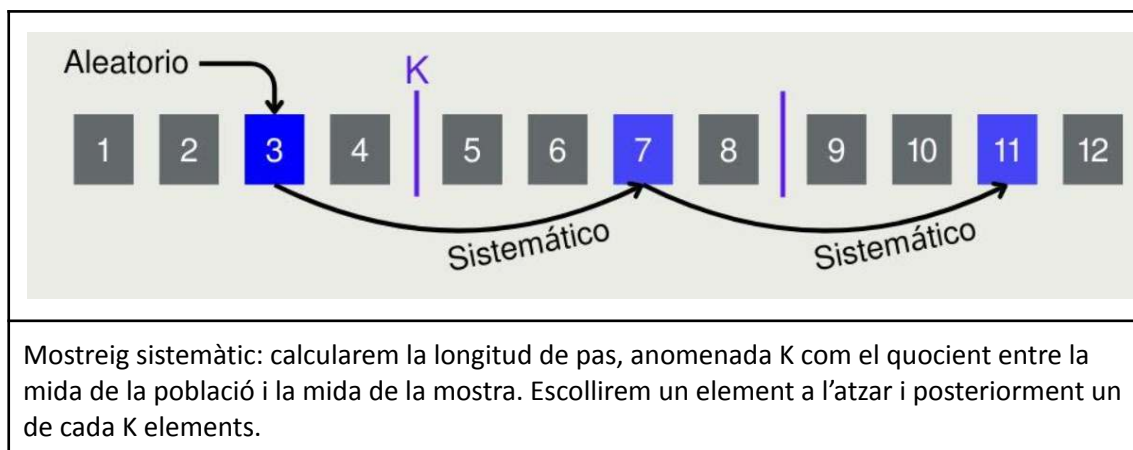
Mostreig amb probabilitats desiguals: seleccionem les unitats de manera que les unes tinguin major probabilitat d'aparèixer que les altres (per exemple per mida).



Mostreig estratificat: dividim la població en grups compostos anomenats estrats que siguin molt similars entre si. Després traiem una mostra aleatòria de cadascun d'aquests grups i les ajuntem per constituir la mostra final d'estudi.



Mostreig per conglomerats: dividim la població en grups formats per elements molt distints. Després seleccionem uns quants d'aquests grups a l'atzar i la unió d'aquests grups configurarà la mostra final.



Font: @Picanumeros

Per treballar el **saber #3.EST.IN.C** i aprendre a aplicar tècniques de mostratge per estimar la mitjana poblacional a partir d'una mostra limitada, podem proposar el problema següent: «Tenim 10 granges amb 25 vaques a cada granja. La mitjana de TOTES les vaques (poblacional) és de 500 kg. Ets un veterinari que fa les visites a les granges i vols estimar la mitjana, però només pots mesurar 20 vaques en total. Quina estratègia seguiràs?»

Proporcionem a l'alumnat les [dades simulades dels pesos de les vaques](#) i fem grups de treball i que cadascun dels grups s'encarregui de fer un mostratge diferent:

- Mostratge aleatori simple: seleccionar 20 vaques a l'atzar de tota la població.
- Mostratge estratificat: escollir un nombre fix de vaques de cada granja per assegurar representativitat.
- Mostratge sistemàtic: mesurar una vaca cada X posicions dins de cada granja.
- Mostratge a conveniència: la vaca més pesada i la menys pesada de la granja.

Cada grup presentarà la seva estratègia i la seva mitjana mostral i es poden comparar les diferències entre les estimacions i la mitjana poblacional (500 kg) i discutir a classe quina estratègia ha donat un resultat més precís i per què i com afecta el tipus de mostratge a la precisió de l'estimació.

Una altra manera de treballar el tipus de mostreig, **saber #3.EST.IN.C**, és fer una dinàmica QQT, sigles de l'anglès Quiz -Quiz-Trade, en què la idea de QQT és crear targetes didàctiques amb una pregunta en un costat i la resposta al darrere. Cada estudiant rep una targeta i uns minuts per revisar-la per assegurar-se que s'entén la pregunta i la seva resposta. Després, tot l'alumnat es posa dret i s'aparella. L'estudiant A qüestiona l'estudiant B usant el problema de la targeta; després l'estudiant B fa el mateix. Un cop tots els estudiants han contestat les preguntes, intercanvien les targetes i van a buscar un nou company o companya. Una altra opció a l'hora d'organitzar la classe és treballar en cercles concèntrics, es fan les preguntes, s'intercanvien les targetes i després es fa la rotació.

Per recopilar informació per a un projecte de ciències, un estudiant enquesta els altres estudiants que seuen a prop de cada classe. Resposta: Mostreig aleatori dins de la classe.	Cada nit, l'estació de televisió local té una pregunta d'enquesta ràpida i pregunta als espectadors que truquin o enviïn missatges de text per votar. Resposta: Mostreig aleatori dins del conjunt dels espectadors.
--	---

Per determinar el suport a una nova iniciativa de la ciutat, l'alcalde de la ciutat selecciona D barris de la ciutat a l'atzar i després, amb un mapa aeri, selecciona 20 habitatges dins de cada veïnat per incloure'ls a la mostra. Resposta: Mostreig estratificat	Una escola vol fomentar una participació més gran de les famílies, per la qual cosa envia a casa una enquesta i demana a cada estudiant que la completi i la torni al mestre del seu fill. Resposta: Mostreig aleatori
Un gran hospital vol enquestar els pacients recents per determinar el temps d'espera a la sala d'emergències. L'administrador de l'hospital genera una llista de pacients aleatoris a partir dels registres d'emergència dels darrers 6 mesos i fa que el personal es comuniqui amb cadascun dels pacients seleccionats. Resposta: Mostreig per conglomerats.	Es va lliurar una enquesta sobre els hàbits d'estudi dels estudiants als primers 100 estudiants d'infermeria que van ingressar a la cafeteria durant el dinar. Resposta: Aleatori, independent de l'edat dels estudiants.
Un investigador selecciona a l'atzar 25 expedients de cada districte d'un departament de policia urbà per estimar l'edat mitjana dels delinqüents. Resposta: Mostreig per conglomerats.	Una oficial de control de qualitat d'una gran cadena de supermercats necessita determinar si un enviament de fruita és apte per a la compra. Ella selecciona els 3 palets a prop de la porta per inspeccionar-les a la recerca de macadures i maduracions. Resposta: Mostreig estratificat donat que els palets se suposa que estan endreçats per tipus de producte.

El càlcul del nombre de persones en una manifestació és un exemple fantàstic per treballar estadística i concretament el **saber #3.EST.IN.D** i fomentar el pensament crític a l'aula. A més, aborda un tema rellevant i que genera debat, cosa que pot motivar molt l'alumnat. Podem començar l'activitat presentant dues notícies amb estimacions diferents d'assistència a una manifestació (exemple: «Segons la policia, 20.000; segons els organitzadors, 80.000») i reflexionar sobre per què hi ha tanta diferència en les dades i quines implicacions pot tenir inflar o reduir xifres. A [Quantes persones es manifesten?](#) trobareu una proposta d'Anton Aubanell per calcular, a través d'una fotografia aèria, el nombre de persones en una manifestació: cal per a això seleccionar una petita zona quadrada o rectangular per fer l'estudi i el comptatge de persones a la zona escollida i extrapolar el resultat a tota la fotografia a partir de la proporció entre les àrees respectives. També podeu trobar el càlcul de les persones en una manifestació al capítol [Tots a la mani](#) de la

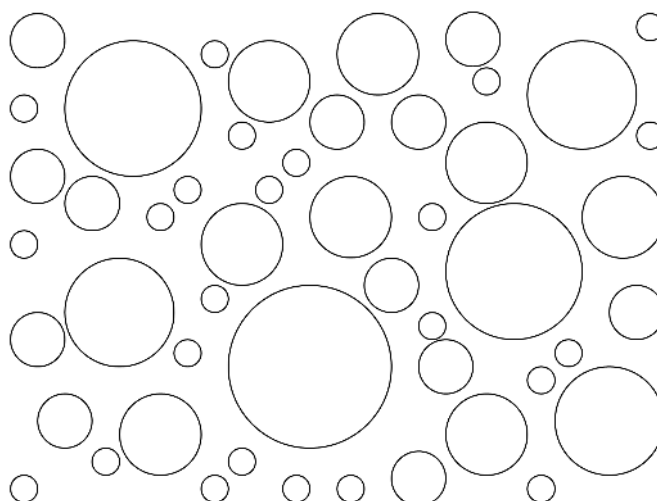
sèrie Àlia de TV3, on una noia aficionada a les matemàtiques es troba en diferents i divertides situacions de la vida quotidiana que resol emprant eines i raonaments matemàtics. Associat al vídeo de cadascun dels capítols, podeu trobar el document de [Suport didàctic](#) generat pel CREAMAT i que dona idees per treballar-ho a l'aula.

Una bona activitat per reflexionar sobre el procés de mostreig la podem trobar en un dels mòduls del MMACA. La proposta d'aquest mòdul consisteix a treure i pesar 10 pedres d'una mostra de 100 còdols de mides diferents. En els diversos intents que fan els visitants, les pedres més visibles queden normalment sobrerrepresentades i l'estimació del pes mitjà queda, en la majoria dels visitants, per sobre del real. A partir d'aquesta constatació és interessant la reflexió sobre la necessitat d'un procediment aleatori, lliure de qualsevol subjectivitat, per tal d'aconseguir que la mostra sigui representativa.



Font: NOUBIAIX 97
Autor: Enric Brasó

Per portar una activitat semblant a l'aula, podem utilitzar en lloc de pedres circumferències de diàmetres diferents, això és el que proposa [Don Steward](#) al seu blog. L'activitat concretament s'anomena [Sampling circles](#). En la proposta es demana que l'alumnat esculli 5 cercles a l'atzar per calcular la mitjana del seu diàmetre. Després de fer els càlculs en parelles, es posaran en comú i es mostrarà que el resultat real és una mitjana de 2 cm, i el que normalment cal esperar a l'aula és que els resultats siguin, en general, superiors i, per tant, podem plantejar-nos com millorar el procés de mostreig. Una opció podria ser amb els ulls tancats escollir els 5 cercles, però els resultats també serien molt esbiaixats, així que podríem buscar alternatives com numerar els cercles i utilitzar els generadors de nombres aleatoris del full de càlcul.



Font: [Sampling circles](#)

Autor: Don Steward

Caldrà insistir a l'alumnat que repetir la mesura quan es fa un mostreig de dades és una pràctica fonamental per garantir la qualitat i la fiabilitat dels resultats estadístics, perquè una única mesura pot ser poc representativa de la realitat. Quan es repeteix la mesura i es calcula la mitjana, s'obté una estimació més robusta i propera al valor real, les repeticions ajuden a identificar dades que s'allunyen significativament de les altres (valors aberrants o *outliers*), que podrien ser causats per errors en la recollida o per fenòmens inesperats.

Una bona connexió històrica amb errors en el mostreig de dades, **saber #3.EST:DI.E**, que tenim en les eleccions presidencials dels Estats Units de 1936, quan el republicà *Alf Landon* va competir contra el demòcrata *Franklin D. Roosevelt*. Un error de predicció famós es va produir quan la revista *Literary Digest* va pronosticar que Landon guanyaria per un marge significatiu. Aquest error va passar a la història com un dels errors de predicció més grans en les eleccions nord-americanes.

Vídeo de les eleccions de 1936: <https://www.youtube.com/watch?v=R2vhjC5qCQk>

En contrast, el Dr. George Gallup, fundador de l'Institut Gallup, va fer servir una mostra molt més petita, però representativa de només 50.000 persones seleccionades de manera científica. La seva enquesta va predir correctament la victòria aclaparadora de Roosevelt.

Podem estudiar a classe les causes de l'error:

1. **Mostra esbiaixada:** *Literary Digest* va utilitzar una mostra de persones contactades a través de telèfons i registres d'automòbils per recollir les dades. Durant la Gran Depressió, no tothom podia permetre's un telèfon o un cotxe, de manera que aquesta mostra estava esbiaixada cap a persones de classe mitjana o alta, que eren més propenses a votar pels republicans.
2. **Grandària de la mostra versus representativitat:** tot i que *Literary Digest* va enquestar més de 2,4 milions de persones, la grandària de la mostra no va compensar el fet que no era representativa de la població general. Això va generar una predicció molt allunyada de la realitat.
3. **Errors metodològics:** l'enquesta va ser completada principalment per persones que estaven motivades per participar-hi, fet que sovint introdueix un altre tipus de biaix conegut com a biaix de resposta. Això va contribuir a sobrevalorar el suport a Landon.

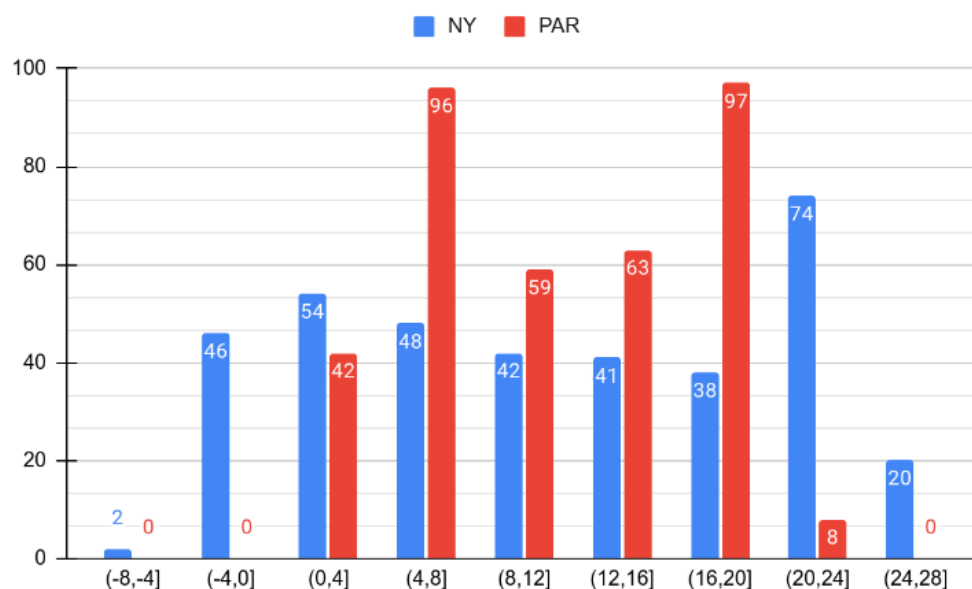
Finalment, Roosevelt va guanyar de manera aclaparadora amb el 60,8% del vot popular i una victòria en 46 dels 48 estats, un dels marges més amplis de la història dels Estats Units. Aquest error va demostrar la importància de tenir una mostra representativa i va ser un punt d'inflexió en l'ús de tècniques d'enquestes més sofisticades.

A classe podem treballar el **saber #3.EST.IN.E** a través de l'activitat de l'NRICH, [Com està el clima?](#), en què es proporciona a l'alumnat un full de càlcul amb les dades meteorològiques recollides per tres ciutats diferents: Shawbury, Eastbourne i Nairn. S'anima llavors l'alumnat a fer-se preguntes que poden donar lloc a estudis estadístics. També pot resultar interessant fent l'estudi de les dades de les nostres estacions meteorològiques publicades de [METEOCAT](#). Es podran comparar els resultats de les diferents estacions meteorològiques, comparar diferents mesos de l'any de diferents estacions o com ha canviat la temperatura i les precipitacions al llarg dels anys; dins dels recursos per a professorat també es poden trobar [fulls d'ajuda](#) fets per Don Stewart per orientar l'alumnat en el tractament de dades.

Treballar les dades agrupades en intervals és un pas natural per aprofundir en l'organització i l'anàlisi de dades a 3r d'ESO, **saber #3.EST.IN.F**. Aquest tipus de treball permet a l'alumnat gestionar conjunts de dades més grans i complexes i entendre conceptes més avançats com les distribucions de freqüència i les seves aplicacions pràctiques.

Una bona activitat per fer taules de dades a través de dades o d'un gràfic és la del grup Vilatzara, [Temperatures a dues ciutats](#): en aquesta activitat es demana en quina de les dues ciutats, Nova York o París, les temperatures són més disperses.

Si optem per donar les dades en forma de gràfic, que és interessant per treballar l'organització de dades i també la lectura de gràfics del **saber #3.EST.DI.A**, la primera dificultat que pot tenir l'alumnat és entendre que les temperatures estan agrupades en intervals i que es necessita la marca de classe per poder fer els càlculs.



Font: [Temperatures a dues ciutats](#)

Autors: Grup Vilatzara

Un cop resolt el problema de la identificació de les marques de classe per als diferents intervals, el repte següent que pot sorgir entre l'alumnat és el càlcul de la mitjana. Per facilitar aquest procés, els proposarem elaborar una taula per organitzar les dades de manera clara i ordenada.

És probable que els estudiants tendeixin a sumar totes les marques de classe i calcular la mitjana directament. Però, què representa aquesta mitjana? Estem parlant de la mitjana de 10 dades? O, en realitat, el que volem calcular és la mitjana de la temperatura al llarg dels 365 dies de l'any? Amb aquestes preguntes, podem guiar l'alumnat cap a una comprensió més precisa i a fer el càlcul correcte de la mitjana.

En aquesta activitat si es calcula la diferència de la marca de classe i la mitjana dels valors, la dispersió no és gaire significativa; sí que surten més disperses les de NY, però haurem de fer recapacitar sobre què passa amb els signes negatius i la necessitat de desviació mitjana o estàndard.

Basant-nos en la proposta de Carmen Batanero i Juan Godino que apareix en el capítol 2.6 de la seva obra *Estocástica y su didáctica para maestros* (Batanero & Godino, 2001b), on es fa un histograma associat al nombre de pessetes que porta l'alumnat a la butxaca, podem proposar l'activitat Quants euros portem a la cartera?.

Podem reflexionar inicialment sobre si la quantitat que portem pot variar molt i què ens interessa saber (ex: mitjana, moda, grans diferències a la classe); d'aquesta manera cada alumne comprova la quantitat d'euros que porta a la cartera (en metàl·lic) i s'anoten les dades de manera anònima en un full compartit o un registre digital. L'alumnat agrupa les dades recollides en intervals, per exemple:

- 0-5 €
- 6-10 €
- 11-20 €
- 21-50 €
- Més de 50 €
- Es construeix una taula amb l'estructura següent:

Interval (€)	Freqüència absoluta (f)	Marca de classe (x)	Freqüència relativa (%)
0-5			
6-10			
...			

Podem aprofitar l'activitat per reflexionar sobre quants intervals cal agafar i quina longitud haurien de tenir i com pot afectar això els resultats obtinguts.

A partir de la taula podem calcular la mitjana ponderada utilitzant les marques de classe, identificar la moda, reflexionar si la distribució de les dades és uniforme o està més concentrada en alguns intervals.

Seria interessant també comparar els resultats amb altres classes o amb altres grups d'edat i comparar la desviació estàndard d'aquest grup amb altres grups o reflexionar sobre com la dispersió de les dades pot canviar si es consideren altres situacions, com dies laborables respecte als caps de setmana.

Per treballar l'anàlisi dels resultats en la identificació de patrons i tendències, **saber #3.EST.IN.G**, sense necessitat de fer tot un estudi estadístic, us proposem la tasca de NRICH, [Which-list-which](#), un problema en el qual dos alumnes que recollien dades han oblidat etiquetar de quin tipus d'estudi es tracta. Alice recollia dades meteorològiques, Charlie recollia pesos i la resta de llistes de dades no sabem si es tracta de les d'Alice o les de Charlie.

L'alumnat acostuma a pensar que calcular la mitjana els dona tota la informació que necessiten saber sobre un conjunt de dades. En aquest problema, les dades s'especifiquen de tal manera que calcular mitjanes no és suficient per distingir entre els conjunts, però observar la forma de les distribucions permet veure clarament les diferències. Per comparar les distribucions, podem animar l'alumnat a utilitzar tècniques estadístiques com a diagrames de tall i fulla, diagrames de caixa i bigotis i gràfics de barres o histogrames o calcular el rang o la desviació mitjana o estàndard.

#IN.H Interpretació i relació dels resultats obtinguts amb els objectius de l'estudi. **[ESS]**

Una bona activitat per treballar la interpretació dels resultats d'un estudi i relacionar-los amb els seus objectius, **saber #3.EST.IN.H**, és treballar en contextos com ara el màrqueting, la producció, la logística i la gestió empresarial. El grup Vilatzara, a l'activitat [La mida de les peces](#) fa una proposta d'activitat on s'han d'escollir dues màquines per a la producció de peces i amb la complexitat que totes dues tenen les mateixes característiques tècniques i costen el mateix. Per això s'ha decidit fer-los una prova construint amb cada màquina sis peces i així mesurar l'amplada de cada peça fabricada.

Quan es fa l'estudi de les dades, s'arriba a la conclusió que totes dues màquines produeixen peces que tenen la mateixa mitjana, i caldrà fer una sèrie de preguntes i activitats que portin a reflexionar l'alumnat sobre la importància de la variabilitat i la consistència en els resultats per treballar també així el **saber #3.EST.DI.H**.

Us proposem les preguntes següents per a la interpretació de les dades i perquè l'alumnat acabi discriminant quina màquina és l'adequada tenint en compte el corresponent càlcul de la desviació:

Comprensió de la mitjana:

- Què significa que dues màquines tinguin la mateixa mitjana? Quins resultats concrets esperaries de cada màquina?
- Si la mitjana de les peces produïdes per les dues màquines és la mateixa, vol dir que les dues màquines són iguals en qualitat o rendiment?

Aquestes preguntes ajuden els alumnes a adonar-se que la mitjana només descriu una tendència central, però no captura la variabilitat en les dades.

Introducció a la variabilitat:

- Imagina que observes que una de les màquines produeix algunes peces molt per sobre de la mitjana i altres molt per sota. Com creus que això afectaria la qualitat del procés?
- Què passaria si una altra màquina produeix peces gairebé idèntiques en cada passada? Quina màquina consideraries més consistent?

Aquestes preguntes poden dur els estudiants a reconèixer que, tot i que les dues màquines poden tenir la mateixa mitjana, la dispersió dels resultats (la variabilitat) pot ser molt diferent.

Importància de la dispersió:

- Si tinguéssim dues màquines amb la mateixa mitjana, però una té molta més variabilitat que l'altra, quina màquina consideraries millor per a un procés de producció on la precisió és important?
- Per què creus que és important conèixer no només la mitjana, sinó també quanta variabilitat hi ha en els resultats?

Aquestes preguntes poden portar l'alumnat a pensar en la importància de mesurar no només la mitjana dels resultats, sinó també com es distribueixen al voltant d'aquesta.

Desviació mitjana com a eina de mesura:

- Si volguéssim comparar la consistència entre les dues màquines, quina mesura creus que podríem utilitzar per saber quina té més estabilitat en els seus resultats?
- Com creus que podem calcular la fiabilitat d'un procés de producció?

Aquestes preguntes guien l'alumnat cap a la idea que la desviació mitjana és una mesura que pot ajudar a quantificar la variabilitat i la consistència dels resultats, aspectes que no es reflecteixen només amb la mitjana.

Dificultats en el càlcul de la desviació mitjana o desviació estàndard

- Com podríem evitar que les desviacions positives i negatives es cancel·lin entre elles quan les sumem?
- Si volguéssim obtenir una mesura que indiqués l'efecte mitjà de les desviacions respecte a la mitjana, què podríem fer amb aquestes desviacions?
- Com podríem calcular una mitjana de les desviacions?
- Quines dificultats comporta fer valors absoluts? Per què sembla més pràctic fer quadrats?
- Què passaria si, en lloc de sumar les desviacions directament, les elevéssim al quadrat per evitar que es cancel·lin? Què ens aportaria això? Com es modificarien les unitats de mesura en elevar al quadrat? Què podem fer per tenir les unitats de mesura correctes?

En la mateixa línia, el grup Vilatzara també proposa l'activitat [La durada de les piles](#), en què una cooperativa de ferreteries rep dues ofertes de dos fabricants diferents per a un mateix model de pila.

Les piles dels dos fabricants costen el mateix. Per tant, el preu no és un factor decisiu i altre cop la durada de les dues piles presenta la mateixa mitjana, la qual cosa les fa pràcticament equivalents. Si es representen les freqüències en un diagrama de barres ja es veu que no ho són tant, d'equivalents, i aquesta diferència es quantifica amb la desviació (en aquest cas, poc importa si es tracta d'una desviació mitjana o d'una d'estàndard). Convé interpretar la poca dispersió com una mesura de la regularitat o la fiabilitat del producte. L'objectiu és aplicar el càlcul de la desviació per complementar la informació del paràmetre de centralització i escollir la cooperativa més adient.

Partint de l'activitat de la durada de les piles del grup Vilatzara podem treballar el **saber #3.EST.IN.H**, tot dissenyant un estudi estadístic per comparar la duració de diverses marques de piles i determinar quina ofereix més bon rendiment respecte al preu. Per portar a terme la nostra investigació, necessitarem piles de diferents marques, dispositius que consumeixin energia de manera constant com llanternes led, joguines electròniques, ràdios petites, etc. i un cronòmetre o una càmera per registrar el temps d'ús.

Registrant el temps total de funcionament i repetint el procés amb totes les piles de cada marca, podem calcular la mitjana de duració de les piles de cada marca, la desviació estàndard per veure la variabilitat entre piles de la mateixa marca i el coeficient de variació per comparar la dispersió entre marques.

Per fer una reflexió sobre l'ús ètic de les dades estadístiques, **saber #3.EST.IN.J**, us proposem treballar el paper de les dades estadístiques durant la pandèmia de la covid-19. Podem començar la classe amb una breu explicació sobre el paper de les dades estadístiques durant la pandèmia de la covid-19, com els mitjans de comunicació pretenien informar la població i com les dades van servir per prendre decisions polítiques i sanitàries.

Per introduir el concepte de l'ús ètic de les dades i els riscos de la seva mala interpretació, podem parlar de les maneres de manipular les dades com a manipulació gràfica (escales, omissions, unitats, etc.), la selecció esbiaixada de dades o la simplificació excessiva que indueix a errors. Posteriorment, podem dividir l'alumnat en grups de treball de tres o quatre alumnes; podem assignar a cada grup una notícia diferent basada en exemples reals que han d'analitzar: un grup pot analitzar un [gràfic amb escales mal ajustades](#) que exageren l'augment de casos; l'altre un titular alarmista basat en un percentatge fora de context; l'altre una notícia que compara dades sense explicar diferències en la metodologia i l'altre un exemple de [bona pràctica](#) (gràfic clar, amb notes explicatives). Podem demanar a cada grup identificar quin aspecte de l'ètica i la responsabilitat es veu compromès (o respectat) i discutir l'impacte potencial que tindria aquest ús de dades en la societat (desinformació, pànic, confiança, etc.).



Exemple de 3 portades de diari en les quals les xifres de recuperats destacades pels tres mitjans queden eclipsades per les imatges de portada escollides.

Font: *Revista de Comunicación y Salud*, 2020

Cada grup pot presentar el seu treball analitzant i explicant què es va fer bé o malament en el tractament de les dades i quines recomanacions faria per millorar la presentació o interpretació de les dades corresponents i, d'aquesta manera, iniciar un debat de com podem evitar la manipulació estadística, quina responsabilitat tenen els mitjans, les autoritats i la ciutadania en la interpretació de dades i com podem educar millor la població per entendre les estadístiques; finalment, es pot fer un tancament amb la proposta d'una guia de bones pràctiques de tractament de les dades.

David Spiegelhalter, expert en la interpretació estadística i la comunicació de resultats i un dels estadístics més destacats, ha defensat la **comunicació clara i comprensible de les dades i resultats estadístics**. En particular, destaca la importància d'adaptar la presentació de les dades al públic objectiu i de fer servir una narrativa que contextualitzi les dades per donar-los sentit. Alguns punts clau sobre el que Spiegelhalter ha expressat respecte als informes estadístics i que ens serviran per treballar el **saber #3. EST. IN. J** i que caldria tractar a l'aula són:

- La claredat i el context: els informes estadístics han d'evitar el llenguatge excessivament tècnic quan el públic no és expert. Per ell, és fonamental proporcionar context i explicar per què els resultats són importants, fent connexions amb problemes pràctics o socials i tenint clar a quin públic van dirigits. Per exemple, en lloc de fer servir «el 35% dels projectes acaben en fracàs» es podria dir

«aproximadament 1 de cada 3 projectes acaba en fracàs», ja que aquesta expressió beneficia la comprensió pel gran públic.

- La importància de la transparència: l'informe no només ha de contenir els resultats, sinó també com s'han obtingut. Això inclou explicar les assumpcions fetes, els models utilitzats i les possibles limitacions. Això ajuda a garantir la confiança en les conclusions.
- La visualització efectiva: Spiegelhalter és un defensor fervent de l'ús de gràfics i visualitzacions clares en els informes estadístics. Ha destacat que les representacions visuals ben fetes poden facilitar enormement la comprensió, però també ha advertit contra l'ús enganyós o excessiu de gràfics sense context.
- La comunicació ètica: cal tenir en compte que els informes estadístics poden influir en les decisions públiques i personals; per tant, és fonamental evitar biaixos i manipular resultats per donar suport a una narrativa predefinida.

Un web interessant per treballar estadística i per consultar informes estadístics és el d'Open Data Barcelona, on fins al 2021 es va organitzar un concurs per a l'alumnat de 3r, 4t d'ESO i cicles formatius. El [Repte Barcelona Dades Obertes](#) tenia com a objectiu visibilitzar el portal de **dades obertes de l'Ajuntament de Barcelona** i animar la ciutadania a explorar-lo, entenent el seu potencial com a font d'informació pública. Pretenia que l'alumnat o bé en grups o bé individualment treballés amb dades reals de la ciutat fent anàlisis demogràfiques, econòmiques, urbanístiques, de mobilitat, d'accidentalitat, etc.

Al web trobareu els informes estadístics de l'alumnat de 3r i 4t d'ESO guanyadors de les diferents edicions i els vídeos divulgatius dels diferents estudis.

Predictibilitat i incertesa

Sabers

- A. Reconeixement d'esdeveniments dependents i independents, compatibles i incompatibles. **[ESS]**
- B. Reconeixement d'esdeveniments no equiprobables. **[ESS]**
- C. Utilització de recursos digitals (fulls de càlcul, calculadores, GeoGebra...) per a la simulació i el càlcul de probabilitats. **#ALG.PC**
- D. Càlcul de probabilitats en casos donats utilitzant tècniques de recompte. **#NUM.CO**
- E. Coneixement i valoració de l'origen de la teoria de probabilitat com, per exemple, les cartes de Fermat i Laplace (cartes 1494).
- F. Interpretació racional i equilibrada de situacions en què intervé l'atzar. **#SOE.CE**

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

A 3r d'ESO ja es poden abordar situacions més complexes perquè ens trobem amb situacions no equiprobables i esdeveniments compostos en què hem de tenir en compte la dependència o independència entre els diferents esdeveniments.

La utilització de recursos digitals ens permet dur a terme simulacions que poden servir com a complement de les activitats experimentals i que poden donar una primera aproximació o corroborar els resultats obtinguts.

Per altra banda, és important anar fent una revisió dels orígens de la teoria de la probabilitat per ser conscients de com s'ha arribat als coneixements actuals.

Finalment, i en un món on els jocs d'atzar tant físic com en línia prenen força, cal ser conscients de com funcionen i quina és la probabilitat de sortir-ne beneficiats.

Comentaris sobre les connexions

El fet d'utilitzar els recursos digitals per fer simulacions ens connecta directament amb el sentit algebraic amb l'ús de variables i funcions. Per altra banda, els jocs i les situacions en què intervé l'atzar estan agafant molta força entre els adolescents i cal que siguin capaços d'analitzar-los i fer una interpretació del que pot passar amb una actitud responsable i racional, cosa que connecta directament amb el sentit socioemocional.

Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

Després del treball fet a 1r i 2n d'ESO, a 3r d'ESO es considera essencial que l'alumnat reconegui els esdeveniments dependents i independents, així com la seva compatibilitat i també que sigui capaç de diferenciar situacions equiprobables i no equiprobables.

Recursos i activitats

A propòsit del **saber #3. EST.PI.A**, és important posar exemples diferents a l'alumnat on quedi clara la diferència entre esdeveniments dependents i independents, degut al fet que en el primer cas la dependència modifica la situació inicial en les diferents situacions que es van donant a posteriori.

Un primer exemple podria ser (tal com proposa Martin Gardner al seu llibre *Matemática para divertirse*): «Un dau comú (com els que es fan servir en jocs d'atzar) té sis cares, de manera que la probabilitat que n'aparegui alguna és un sobre sis, o $1/6$. Suposem que llancem un dau nou vegades. Cadascuna cau amb la cara de l'1 cap amunt. Quina és la probabilitat que la cara de l'1 torni a aparèixer a la tirada següent? És més d' $1/6$ o continua sent $1/6$?».

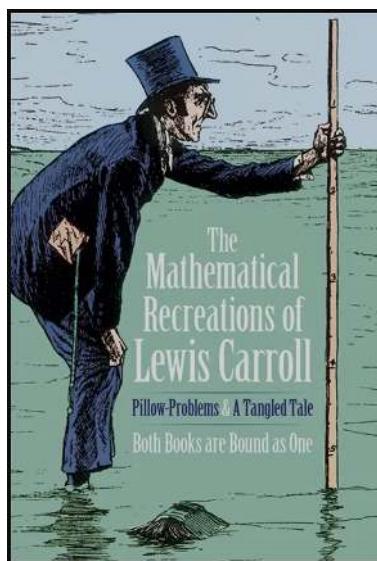
Si sabem positivament que el dau no està carregat, llavors no importa quantes vegades se'l llanci ni què és el que apareix, la probabilitat del llançament següent continuarà sent d' $1/6$ per a cadascuna de les sis cares. Un dau no té manera de recordar les tirades anteriors!

Per tant, es tracta d'esdeveniments independents entre si i el que ha passat en el cas anterior no incideix en el següent.

Una situació anàloga seria fer extraccions d'una bossa amb 6 boles numerades de l'1 al 6 en què cada vegada reposem la bola extreta.

Però seria diferent si després de cada extracció no reposem la bola extreta, perquè l'extracció següent quedaria condicionada pel que ha passat en les extraccions anteriors i, per tant, sí que hi hauria dependència.

Un altre exemple clàssic i curiós pot ser una de les situacions proposades als Pillow Problems per Lewis Carroll (1895):



Dover Books, New York, 1958

Font: *The Mathematical Recreations of Lewis Carroll*

Autor: Lewis Carroll

Situació 5: «Una bola continguda en una bossa pot ser blanca o bé negra. S'afegeix a la bossa una segona bola blanca, s'agita la bossa i se n'extreu a l'atzar una bola, que és blanca. Quina probabilitat hi ha ara que en extreure l'altra bola, també sigui blanca?»

Es podria demanar a l'alumnat que fes una primera conjectura per veure què en pensen i després dividir la classe en petits grups per fer l'activitat experimentalment a veure a quin resultat arriben i si s'ajusta a la seva conjectura. Després, es poden agrupar els resultats obtinguts per tots els grups i discutir en gran grup el resultat obtingut.

A continuació, es pot revisar conjuntament el raonament proposat per arribar a la solució de Lewis Carroll. Carroll en la seva anàlisi de la solució diu: «A primera vista podria semblar que l'estat de la bossa *després* d'aquestes operacions ha de ser necessàriament idèntic al que tingués *abans* d'introduir la bola blanca: la probabilitat seria ara idèntica a la probabilitat inicial, és a dir, $1/2$. Però això és un error.»

Carroll demostra que en realitat la probabilitat que la bola encara continguda a la bossa sigui blanca és de $2/3$.

Pensem en la situació dintre de la bossa i diferenciem la bola blanca (B1) que ja era a la bossa amb la bola blanca (B2) que hem introduït a posteriori.

Després de treure la primera bola blanca hi ha tres situacions possibles totes equiprobables:

Dintre de la bossa	Fora de la bossa
B1	B2
B2	B1
N	B2

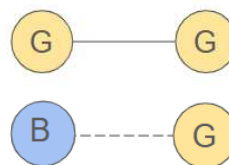
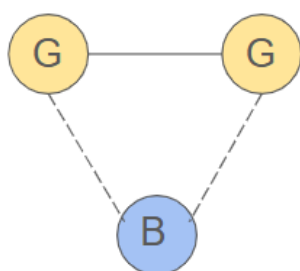
Per tant, la probabilitat d'extreure una segona bola blanca és de $\frac{2}{3}$. En aquest cas, el fet d'haver introduït una bola blanca i després haver-ne tret una, sí que modifica la situació inicial i ens canvia les probabilitats de la segona extracció respecte a les probabilitats inicials si no l'haguéssim introduït.

De vegades reconèixer esdeveniments no equiprobables no és tan senzill, **saber #3.EST.PI.B**. Ja hem explicat el cas de la cursa de cavalls a 1r d'ESO en què es tiren dos daus i se sumen els resultats per fer avançar el cavall corresponent. També el cas de sortejos per lletra que clarament beneficia els uns o perjudica els altres en funció de la distribució dels valors existents.

Ara veurem un exemple que inicialment sembla molt clar, però que no ho és tant, extret del llibre *Las probabilidades en la escuela*, de Glaymann i Varga.

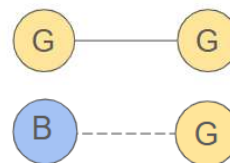
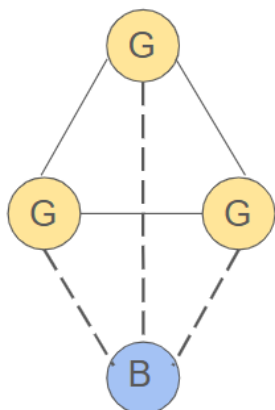
Posem en una bossa dues boles grogues i una bola blava. Traiem dues boles a la vegada. És més probable treure dues boles grogues que una bola blava i una de groga?

D'entrada, pot semblar que és més probable treure dues boles grogues, però representem la situació i veurem que no és així, justament és al contrari.



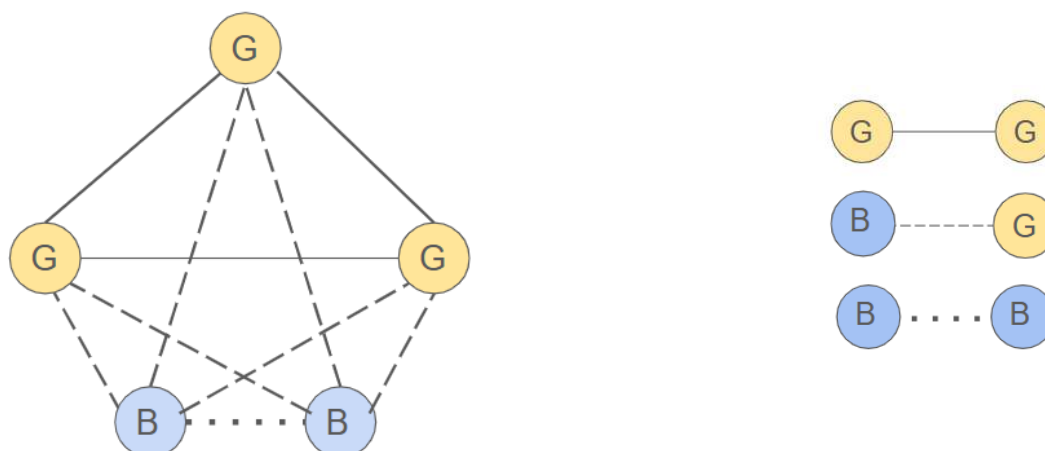
Com podem veure, la probabilitat de treure una bola blava i una de groga és de $\frac{2}{3}$ i de treure dues boles grogues és d' $\frac{1}{3}$.

I què passa si posem tres boles grogues i una bola blava? En aquest cas si ho representem:



podem observar que les probabilitats són iguals de treure 2 boles grogues que una de groga i una de blava.

Es poden seguir proposant situacions semblants, per exemple amb 3 boles grogues i 2 de blaves. Com quedaran les probabilitats ara? Si ho tornem a representar:



com podem comprovar, tenim tres possibles situacions: dues boles grogues, dues boles blaves i una de groga i una de blava. Per tant, tenim una probabilitat del 0,3 de treure dues boles grogues, una probabilitat del 0,1 de treure dues boles blaves i una probabilitat del 0,6 de treure una bola blava i una bola groga.

En aquest cas, la representació és clau per poder calcular les probabilitats associades a cada cas.

Al web de l'NRICH podem trobar una activitat molt semblant: [In a box](#)

Un altre exemple podria ser presentar una situació en què es demana a l'alumnat que proposi el cas que tingui la màxima probabilitat a favor seu, com per exemple aquesta adaptació del problema titulat «La bola o la vida» de Glaymann i Varga.

Aquesta és la història del senyor que, cansat del seu astròleg i de les seves vanes promeses, decideix fer-lo acomiadar. Però, bon príncep en el fons, li dona una darrera oportunitat. Autoritza l'astròleg a repartir quatre boles, dues de blanques i dues de negres, entre dues urnes. El senyor tria una de les urnes i treu una bola: si és negra l'astròleg és acomiadat, si no, es manté al seu lloc.



Com posarà l'astròleg les boles a les urnes per assegurar la màxima probabilitat de salvar-se?

Nota: S'han de repartir totes les boles i a cada urna hi ha d'haver com a mínim una bola.

Podem deixar l'alumnat que experimenti amb el material i demanar-li que construeixi els diagrames d'arbre que ens donen les diferents situacions per comprovar que la millor opció és col·locar una bola blanca a una de les urnes i la resta a l'altra.

A continuació, es poden plantejar als alumnes dues variants del mateix problema que ens permeten fer generalitzacions de la situació:

- 1 si prenem dues urnes, n boles blanques i n boles negres? Si anomenem p_n la probabilitat de salvar-se amb 2 urnes i n boles de cada color, què passa quan n creix?

b) I si prenem q urnes, n boles blanques i n boles negres?

Finalment, una activitat molt interessant és la proposada pel Grup Matgi al seu Taller [Tema 13: Estadística i probabilitat](#) titulada Fem el nus, que és aconsellable dur a classe en forma de teatralització i fer l'activitat experimentalment:

Keekerik es una terra imaginària en què la gent té un ritu interessant per a les parelles que es volen casar.

Wandalina y Gerik es volen casar, de manera que han d'anar a la casa de la reina Katalana per fer aquest ritu. L'adequació per casar-se dependrà de l'atzar.

La reina els dona la benvinguda i mostra sis cordes idèntiques. La reina dona les cordes a Wandalina, que les subjecta fermament a la mà.



Font: Grup MatGi

La reina demana al Gerik que s'hi acosti i li diu que lligui dos dels extrems que sobresurten per damunt de la mà de Wandalina. Després en lliga dos més i, finalment, la darrera parella. Els sis extrems inferiors encara estan per lligar.



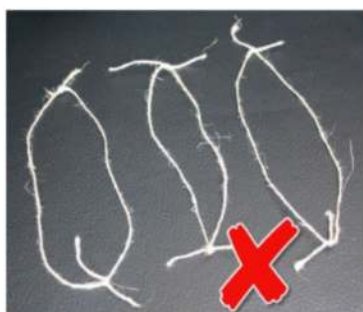
Font: Grup MatGi

Ara la reina Katalana s'aproxima i fa el darrer pas. Ella no sap quina corda de les que apareixen per sota correspon a les de dalt. En tria dues a l'atzar i les lliga, i fa el mateix amb les altres dues parelles.

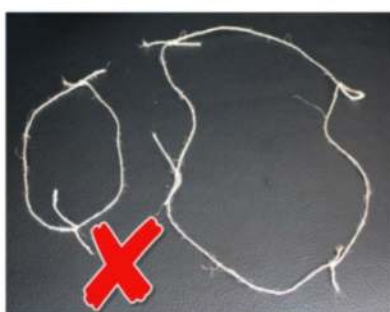


Font: Grup MatGi

Ara Wandalina té sis cordes a la mà, amb tres nusos per damunt i tres per sota. Quan despleguen les cordes pot passar que:



No es casen



No es casen



Es casen

Font: Grup MatGi

A priori quants creieu que tenen més probabilitats de casar-se que de no casar-se? Quants les mateixes de casar-se que de no casar-se? I, finalment, quants més de no casar-se que de casar-se?

El fet de creure que les tres situacions presentades són equiprobables pot portar a error i que la majoria de l'alumnat respongui que amb aquest ritu tenen més probabilitats de no casar-se que de fer-ho. Després de l'experimentació potser una part de l'alumnat pot variar la seva predicció i finalment en fer el raonament que ens porta a calcular la probabilitat teòrica de casar-se s'observa que les situacions no són equiprobables i que, per molt poc, guanya la probabilitat de casar-se, que és de 8/15 i la de no fer-ho de 7/15.

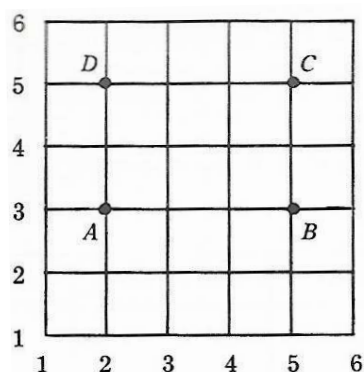
Una de les oportunitats que ens permeten aprendre a utilitzar la potència dels recursos digitals és fent simulacions de situacions en què intervé l'atzar, **saber #3. EST.PI.C.** L'ús de les eines digitals pot utilitzar-se com a complement de l'activitat feta experimentalment.

Per exemplificar-ho es proposa l'activitat següent, extreta del capítol de simulacions del mateix llibre de Glaymann i Varga que també es pot abordar experimentalment o teòricament:

Rectangles aleatoris

Tenim una quadrícula 5 x 5 on els quadres són determinats per parelles (x,y) de nombres naturals ($1 \leq x \leq 6$ i $1 \leq y \leq 6$).

Per exemple, donats els punts A i C de coordenades (2,3) i (5,5) respectivament, construïm el rectangle ABCD de diagonal AC.



Es considera així que la tira de 4 xifres 2355 de nombres aleatoris de base sis caracteritza el rectangle ABCD, on $A=(2,3)$ i $C=(5,5)$. Per tant, $B=(5,3)$ i $D=(2,5)$.

Suposem ara que tenim una urna amb 6 boles numerades 1, 2, 3, 4, 5 i 6 i efectuem quatre extraccions amb reposició i construïm els rectangles resultants com a l'exemple. Alternativament, ho podem fer amb quatre tirades d'un dau amb cares numerades de l'1 al 6.

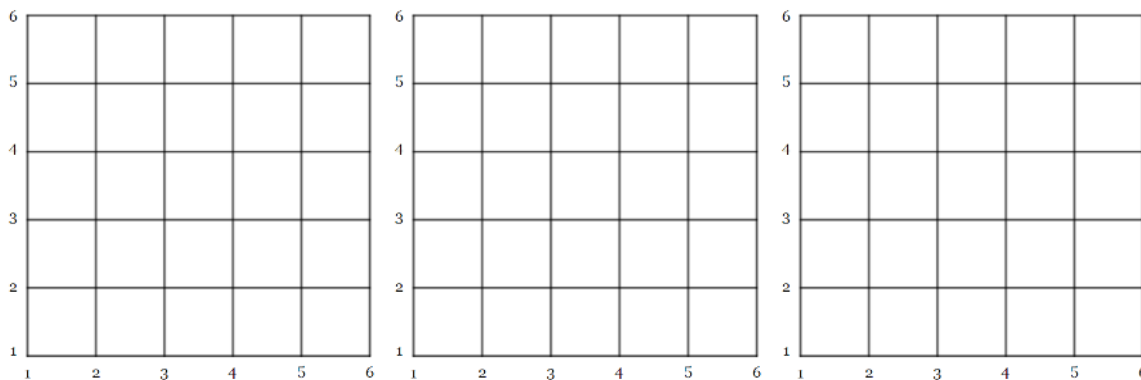
Repte:

- Quina és la probabilitat que la tira de quatre xifres defineixi un quadrat?
- Quina és la mitjana dels perímetres dels rectangles?
- Quina és la mitjana de les àrees dels rectangles?

Donat que cal pensar i discutir quins passos cal fer estaria bé poder treballar en grups petits, per exemple, per parelles.

Inicialment, es pot demanar que conjeturin quins poden ser els resultats d'aquestes preguntes per poder comparar-los amb els resultats finals que s'obtinguin de la simulació.

També en aquesta primera fase es pot fer una experimentació inicial fent diferents tirades per construir diferents rectangles. Aquesta experimentació inicial serà bàsica per després poder treballar amb el full de càlcul. Com a suport es pot donar un full amb diferents quadrícules per veure com es situen els diferents vèrtexs de cada rectangle:



Font: elaboració pròpia.

A partir d'aquí podem fer avançar l'activitat a partir de diferents preguntes:

- Hi ha alguns rectangles especials o degenerats?
- Què caracteritza un rectangle? I un quadrat?

- Com podem trobar la distribució per calcular les probabilitats?
- Como podem calcular les mitjanes dels perímetres i l'àrea?

Podem deixar uns minuts per pensar-hi i començar a organitzar la feina que cal fer.

Es veu ràpidament que apareixen rectangles degenerats que poden ser un segment, com per exemple el cas de la tira 2252 o un únic punt com per exemple la tira 2525.

També que la caracterització dels rectangles ve definida pels seus costats i, en el cas dels quadrats, en la igualtat dels costats.

Una vegada arribats aquí ja podem passar a treballar amb el full de càlcul. Podem deixar que l'alumnat vagi descobrint quines són les funcions del full de càlcul que poden utilitzar per obtenir les dades necessàries.

Es mostra un exemple del resultat de l'activitat feta a classe i es mostren a continuació les funcions utilitzades en el cas de la 2a fila.

Per generar les extraccions aleatòries entre 1 i 6 de la tira de 4 valors podem fer servir la funció =RANDBETWEEN(1;6) per als vèrtexs A i C.

Per mesurar els costats cal calcular el valor absolut de la resta de les coordenades: Costat 1=ABS(B2-D2) i Costat 2=ABS(C2-A2)

Per comprovar si es tracta d'un quadrat només cal mirar si els costats tenen la mateixa longitud amb la funció =F2=G2, que dona com a resultat True o False.

Per calcular el nombre de quadrats que hi ha a la distribució es pot utilitzar la funció =COUNTIF(H:H;TRUE) i per calcular la probabilitat experimental que surti un quadrat, simplement dividir aquest valor pel total d'elements de la simulació, que en aquest cas era de 250.

Per calcular les mitjanes del perímetre i l'àrea primer cal calcular el perímetre i l'àrea de cada rectangle i després amb la funció =AVERAGE(I:I) i =AVERAGE(J:J).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		Ax	Ay	Cx	Cy	Costat 1	Costat 2	Comprovar si són iguals	Perímetre	Àrea	Resultats	
2	1	5	6	4	2	1	4	FALSE	10	4	Quants quadrats hi ha?	Probabilitat de quadrat
3	2	5	1	5	5	0	4	FALSE	8	0	49	0,196
4	3	5	4	5	5	0	1	FALSE	2	0		
5	4	4	5	4	6	0	1	FALSE	2	0	Mitjana perímetre	
6	5	5	6	4	1	1	5	FALSE	12	5	7,76	
7	6	6	1	2	6	4	5	FALSE	18	20		
8	7	5	2	4	6	1	4	FALSE	10	4	Mitjana àrees	
9	8	4	2	3	1	1	1	TRUE	4	1	3,67	
10	9	2	3	4	3	2	0	FALSE	4	0		
11	10	5	2	3	1	2	1	FALSE	6	2	Tirades	250
12	11	3	6	6	2	3	4	FALSE	14	12		
13	12	1	5	6	2	5	3	FALSE	16	15		
14	13	5	5	6	3	1	2	FALSE	6	2		
15	14	1	6	1	3	0	3	FALSE	6	0		
16	15	4	2	3	1	1	1	TRUE	4	1		
17	16	4	2	4	4	0	2	FALSE	4	0		
18	17	5	2	4	3	1	1	TRUE	4	1		

Font: elaboració pròpia.

Cal ser conscients que tenim una primera aproximació generada a partir de pocs valors.

Un segon pas podria ser aglutinar els resultats dels diferents grups per obtenir una distribució amb molts més valors i veure quins resultats obtenim.

Finalment, podem consultar el desenvolupament teòric de l'activitat, extret del taller de probabilitats [Actividades de probabilidad a través de la obra de Tamás Varga](#) que va desenvolupar el Grup Cúbic a les 21 JAEM de Santander.

La resolució des d'un punt de vista teòric pot fer-se pensant en la relació entre les posicions dels diferents vèrtexs i els rectangles que es poden obtenir, independentment de la posició ocupada (bases i altures).

base		x_c					
b		1	2	3	4	5	6
x_A	1	0	1	2	3	4	5
	2	1	0	1	2	3	4
	3	2	1	0	1	2	3
	4	3	2	1	0	1	2
	5	4	3	2	1	0	1
	6	5	4	3	2	1	0

altura		y_c					
h		1	2	3	4	5	6
y_A	1	0	1	2	3	4	5
	2	1	0	1	2	3	4
	3	2	1	0	1	2	3
	4	3	2	1	0	1	2
	5	4	3	2	1	0	1
	6	5	4	3	2	1	0

A la taula de doble entrada següent es pot observar la distribució de la longitud de les diferents bases que es poden obtenir (és equivalent per a les altures):

base		x_c					
b		1	2	3	4	5	6
x_A	1	0	1	2	3	4	5
	2	1	0	1	2	3	4
	3	2	1	0	1	2	3
	4	3	2	1	0	1	2
	5	4	3	2	1	0	1
	6	5	4	3	2	1	0

$$\begin{aligned}
 &= \frac{6}{36} = \frac{3}{18} \\
 P(b = 1) &= \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \\
 &= \frac{8}{36} = \frac{4}{18} \\
 &= \frac{6}{36} = \frac{3}{18} \\
 P(b = 4) &= \frac{4}{36} = \frac{2}{18} \\
 &= \frac{2}{36} = \frac{1}{18}
 \end{aligned}$$

Per tant, s'obté un quadrat quan la base i l'altura del rectangle són iguals.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Quadrat}) &= \sum_{i=0}^5 P(\text{Quadrat de costat } i) = \left(\frac{3}{18}\right)^2 + \left(\frac{5}{18}\right)^2 + \left(\frac{4}{18}\right)^2 + \left(\frac{3}{18}\right)^2 + \left(\frac{2}{18}\right)^2 + \left(\frac{1}{18}\right)^2 = \\
 &= \frac{64}{324} \approx 0,1975
 \end{aligned}$$

Per trobar la mitjana dels perímetres cal observar primer quins perímetres podem obtenir a partir de les longituds de la base i l'altura dels diferents rectangles.

A la taula de doble entrada següent es poden veure els diferents perímetres que es poden obtenir.

		base					
		0	1	2	3	4	5
altura	0	0	2	4	6	8	10
	1	2	4	6	8	10	12
	2	4	6	8	10	12	14
	3	6	8	10	12	14	16
	4	8	10	12	14	16	18
	5	10	12	14	16	18	20

Per tant, podem obtenir rectangles de perímetres 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 i 20 u.

Calcularem l'esperança matemàtica com el valor mitjà que pot prendre la variable aleatòria perímetre y que s'obté sumant el producte dels diferents valors que pot prendre la variable per la seva probabilitat.

$$\begin{aligned}
 E(\text{perímetre}) &= \sum P(\text{perímetre}) \cdot \text{perímetre} = P(\text{perímetre } 0) \cdot 0 + P(\text{perímetre } 2) \cdot 2 + \dots \\
 &\quad + P(\text{perímetre } 18) \cdot 18 + P(\text{perímetre } 20) \cdot 20.
 \end{aligned}$$

Perímetre	Probabilitat	$P(\text{perímetre}) \cdot \text{perímetre}$
0	$\frac{3}{18} \cdot \frac{3}{18} = \frac{9}{324}$	$\frac{9}{324} \cdot 0 = 0$
2	$2 \cdot \frac{3}{18} \cdot \frac{5}{18} = \frac{30}{324}$	$\frac{30}{324} \cdot 2 = \frac{60}{324}$
4	$2 \cdot \frac{3}{18} \cdot \frac{4}{18} + \frac{5}{18} \cdot \frac{5}{18} = \frac{49}{324}$	$\frac{49}{324} \cdot 4 = \frac{196}{324}$
6	$2 \left(\frac{3}{18} \cdot \frac{3}{18} + \frac{5}{18} \cdot \frac{4}{18} \right) = \frac{58}{324}$	$\frac{58}{324} \cdot 6 = \frac{348}{324}$
8	$2 \left(\frac{3}{18} \cdot \frac{2}{18} + \frac{3}{18} \cdot \frac{5}{18} \right) + \frac{4}{18} \cdot \frac{4}{18} = \frac{58}{324}$	$\frac{58}{324} \cdot 8 = \frac{464}{324}$
10	$2 \left(\frac{3}{18} \cdot \frac{1}{18} + \frac{2}{18} \cdot \frac{5}{18} + \frac{3}{18} \cdot \frac{4}{18} \right) = \frac{50}{324}$	$\frac{50}{324} \cdot 10 = \frac{500}{324}$
12	$2 \left(\frac{5}{18} \cdot \frac{1}{18} + \frac{2}{18} \cdot \frac{4}{18} \right) + \frac{3}{18} \cdot \frac{3}{18} = \frac{35}{324}$	$\frac{35}{324} \cdot 12 = \frac{420}{324}$
14	$2 \left(\frac{1}{18} \cdot \frac{4}{18} + \frac{2}{18} \cdot \frac{3}{18} \right) = \frac{20}{324}$	$\frac{20}{324} \cdot 14 = \frac{280}{324}$
16	$2 \cdot \frac{3}{18} \cdot \frac{1}{18} + \frac{2}{18} \cdot \frac{2}{18} = \frac{10}{324}$	$\frac{10}{324} \cdot 16 = \frac{160}{324}$

18	$2 \cdot \frac{2}{18} \cdot \frac{1}{18} = \frac{4}{324}$	$\frac{4}{324} \cdot 18 = \frac{72}{324}$
20	$\frac{1}{18} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{324}$	$\frac{1}{324} \cdot 20 = \frac{20}{324}$
	<i>Esperança matemàtica E(X)</i>	$\frac{2520}{324} \simeq 7,78$

De forma anàloga, calcularem la mitjana de les àrees dels rectangles obtingudes en la simulació.

Cal veure primer quines àrees podem obtenir a partir de les longituds de la base i l'altura dels diferents rectangles. A la taula de doble entrada següent es mostren totes les opcions:

		base					
		0	1	2	3	4	5
altura	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	1	2	3	4	5
	2	0	2	4	6	8	10
	3	0	3	6	9	12	15
	4	0	4	8	12	16	20
	5	0	5	10	15	20	25

Podem obtenir rectangles d'àrees 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 20 i 25 u².

Calcularem l'esperança matemàtica com el valor mitjà que pot prendre la variable aleatòria àrea i que s'obté sumant el producte dels diferents valors que pot prendre la variable per la seva probabilitat.

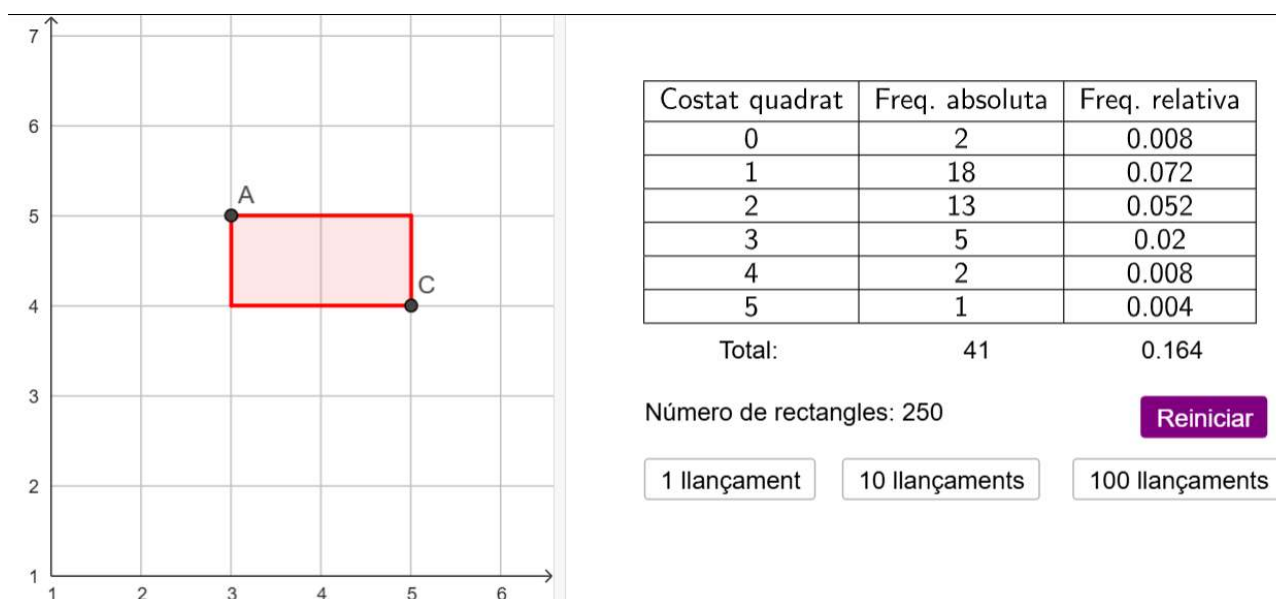
$$E(\text{àrea}) = \sum P(\text{àrea}) \cdot \text{àrea} = P(\text{àrea } 0) \cdot 0 + P(\text{àrea } 1) \cdot 1 + \dots + P(\text{àrea } 20) \cdot 20 + P(\text{àrea } 25) \cdot 25$$

Àrea	Probabilitat	$P(\text{àrea}) \cdot \text{àrea}$
0	$\frac{3}{18} \cdot (\frac{3}{18} + 2 \cdot \frac{5}{18} + 2 \cdot \frac{4}{18} + 2 \cdot \frac{3}{18} + 2 \cdot \frac{2}{18} + 2 \cdot \frac{1}{18}) = \frac{99}{324}$	$\frac{99}{324} \cdot 0 = 0$
1	$\frac{5}{18} \cdot \frac{5}{18} = \frac{25}{324}$	$\frac{25}{324} \cdot 1 = \frac{25}{324}$
2	$2 \cdot \frac{5}{18} \cdot \frac{4}{18} = \frac{40}{324}$	$\frac{40}{324} \cdot 2 = \frac{80}{324}$
3	$2 \cdot \frac{5}{18} \cdot \frac{3}{18} = \frac{30}{324}$	$\frac{30}{324} \cdot 3 = \frac{90}{324}$

4	$2 \cdot \frac{5}{18} \cdot \frac{2}{18} + \frac{4}{18} \cdot \frac{4}{18} = \frac{36}{324}$	$\frac{36}{324} \cdot 4 = \frac{144}{324}$
5	$2 \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{5}{18} = \frac{10}{324}$	$\frac{10}{324} \cdot 5 = \frac{50}{324}$
6	$2 \cdot \frac{4}{18} \cdot \frac{3}{18} = \frac{24}{324}$	$\frac{24}{324} \cdot 6 = \frac{144}{324}$
8	$2 \cdot \frac{4}{18} \cdot \frac{2}{18} = \frac{16}{324}$	$\frac{16}{324} \cdot 8 = \frac{128}{324}$
9	$\frac{3}{18} \cdot \frac{3}{18} = \frac{9}{324}$	$\frac{9}{324} \cdot 9 = \frac{81}{324}$
10	$2 \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{4}{18} = \frac{8}{324}$	$\frac{8}{324} \cdot 10 = \frac{80}{324}$
12	$2 \cdot \frac{2}{18} \cdot \frac{3}{18} = \frac{12}{324}$	$\frac{12}{324} \cdot 12 = \frac{144}{324}$
15	$2 \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{3}{18} = \frac{6}{324}$	$\frac{6}{324} \cdot 15 = \frac{90}{324}$
16	$\frac{2}{18} \cdot \frac{2}{18} = \frac{4}{324}$	$\frac{4}{324} \cdot 16 = \frac{64}{324}$
20	$2 \cdot \frac{2}{18} \cdot \frac{1}{18} = \frac{4}{324}$	$\frac{4}{324} \cdot 20 = \frac{80}{324}$
25	$\frac{1}{18} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{324}$	$\frac{1}{324} \cdot 25 = \frac{25}{324}$
	<i>Esperança matemàtica $E(X)$</i>	$\frac{1225}{324} \approx 3,78$

Com a tancament de l'activitat, podem contrastar les conjectures inicials fetes amb els resultats experimentals obtinguts en la simulació i les probabilitats teòriques.

Podem trobar també una simulació de l'activitat [Rectangles aleatoris](#) feta per Manel Martínez amb GeoGebra o a Snap!, [Varga-quadrícula](#). En aquest cas, com que es tracta d'una construcció força més complexa s'utilitzarà el recurs digital per generar les dades que després es faran servir per finalitzar l'activitat.



Font: [Quadrats Tomás Varga](#)
 Autor: Manel Martínez i Pascual

A 3r d'ESO podem trobar moltes activitats per exemplificar el càlcul de probabilitats en casos donats utilitzant tècniques de recompte, **saber #3.EST.PI.D.**

Un exemple podria ser l'extret de l'NRICH titulat [Six times five](#) en què es demana quants nombres de 6 xifres hi ha que no contenen el 5.

Podem ajudar l'alumnat a avançar amb diferents preguntes: Quants números de sis xifres hi ha? Quantes opcions tenim per al primer dígit? Quantes opcions tenim per al segon dígit?...

Un altre exemple seria comptar el nombre de matrícules existents en el sistema de matriculació actual de vehicles en què s'utilitzen 3 lletres (no s'utilitzen les vocals ni la Q ni la Ñ) i nombres de 4 xifres. A continuació es podria demanar el nombre de matrícules que compleixen una determinada característica o propietat: Totes les xifres iguals, nombres capicua, xifres consecutives, lletres consecutives, etc.

També és interessant veure les dificultats que es van trobar els matemàtics al principi de la teoria de la probabilitat, **saber #3.EST.PI.E.** Una situació que pot il·lustrar la situació és **El problema del repartiment d'una aposta.**

Segons l'article de Juan Antonio Garcia Cruz, [Historia de un problema: El reparto de la apuesta](#) de la revista *SUMA*, 33, pàg. 25-36 (2000) els primers que van abordar el problema van ser Luca Pacioli el 1494, Girolamo Cardano el 1539 i Niccolo Tartaglia el 1556. Cardano va ser el primer que va iniciar el camí a la resolució del problema tot i que no el va acabar.

El 1654 Pascal va escriure al seu amic Fermat preocupat per un problema de daus que no sabia solucionar i una partida deixada a mitges que no sabia com acabar.

Per conèixer el valor del repartiment, quan participen dos jugadors en **tres tirades i cadascun posa 32 monedes a l'aposta**, trobem la transcripció de la *Carta de Pascal a Fermat*, en data dimecres 29 de juliol de 1654 (Smith, 1959).

«Suposem que el primer de tots dos té **2 punts i l'altre 1 punt**. Si, ara, tornen a llançar el dau, les

possibilitats són tals que si el primer guanya, guanyarà el total de monedes a l'aposta, és a dir 64. Però si és l'altre el que guanya, estaran 2 a 2 i, en conseqüència, si desitgen acabar o interrompre el joc, cadascú prendrà la seva aposta, és a dir 32 monedes.

Per tant, Senyor, s'ha de considerar que, si el primer guanya, li pertanyeran 64 monedes i, si perd, aleshores només li pertanyen 32 monedes. Si no volen jugar aquest punt, i volen separar-se, el primer podria argumentar "Tinc segures 32 monedes, doncs fins i tot si perdo les rebré. Les 32 restants, potser les guanyo o potser no, el risc és el mateix. Per tant, dividim aquestes 32 restants per la meitat i doneu-me, a més, les 32 que tinc segures.»

En la solució de Pascal el repartiment es fa a 3:1, per tant, el primer tindrà 48 monedes i el segon en tindrà 16.

La resposta de Fermat a Pascal s'ha perdut, però, afortunadament, es conserva la resta de la correspondència. Per ella sabem que Fermat va respondre a Pascal amb un altre mètode per resoldre el problema. En una carta datada el 24 d'agost del 1654, Pascal critica la solució aportada per Fermat, un mètode bo només en casos aïllats però no vàlid sempre.

Seria sempre vàlid repartir-se els diners a mitges?

Suposem que al primer jugador li falten dos encerts per guanyar i al segon jugador li'n falten tres i que el joc finalitzarà en 4 tirades. Si el joc es fa amb una moneda de dues cares (cara a i b) i es fan 4 llançaments, quantes combinacions hi ha? Tenint en compte que, si hi ha 2 cares, guanya el primer jugador donat que el joc està començat i sols si hi ha 3 cares «b», guanya el segon jugador. Com haurien de repartir-se els diners?

Fermat proposa una taula amb totes les possibilitats de les 4 tirades i en quins casos guanyaria cadascun:

a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b
a	a	a	a	b	b	b	b	a	a	a	a	b	b	b	b
a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	2	2	2

Font: [SUMA-33](#)

Autor: Juan Antonio García Cruz

Com es pot observar, el jugador 1 guanyaria en 11 dels 16 casos i el jugador 2, només en 5. Per tant, el repartiment hauria de ser 11:5.

Pascal fa una objecció al mètode proposat per Fermat: «No és necessari, quan al primer li falten dos encerts per guanyar, haver de jugar quatre tirades perquè podrien ser dues, tres o potser quatre».

«Què passarà si hi participen tres jugadors, el joc consisteix en 3 llançaments i el joc s'interromp i faltará un llançament perquè guanyi el primer, i dos per a cadascun dels restants?»

a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b	b	c	c	c	c	c	c	c	c	c
a	a	a	b	b	b	c	c	c	a	a	a	b	b	b	c	c	c	a	a	a	b	b	b	c	c	c	c
a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	c
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			1			1	1	1	1				1		
				2							2		2	2	2		2						2				
											3								3			3			3	3	3

Font: [SUMA-33](#)

Autor: Juan Antonio García Cruz

«Com que al primer li falta un llançament, totes les formes en què hi hagi una *a* li són favorables. N'hi ha 19 així. Com que al segon li falten dos llançaments, totes les formes en què hi hagi dues *b*, li són favorables. N'hi ha 7 així. Com que al tercer li falten dos llançaments, totes les formes en què hi hagi dues *c* li són favorables. N'hi ha 7 així. Si concloem que hem de fer el repartiment d'acord amb la proporció 19:7:7, cometrem llavors un seriós error i dubtaria que fes tal cosa.»

Després d'una àmplia correspondència, Fermat va refinar el mètode basat en les combinacions fins a superar els obstacles proposats per Pascal. Al final Pascal va reconèixer la validesa i la generalitat del mètode de Fermat.

Finalment, va ser Christian Huygens el 1657 qui dona una solució general i definitiva introduint el concepte d'esperança matemàtica.

Al web de l'xtec, podeu trobar la proposta d'una situació d'aprenentatge per a 3r o 4t d'ESO titulada [La correspondència entre Pascal i Fermat i el problema dels punts \(1654\)](#).

A propòsit del **saber #3. EST.PI.F**, a 1r d'ESO ja es va proposar el vídeo del professor José Luís Muñoz de Madrid, en què visualitzava amb grans d'arròs que guanyar la loteria de Nadal correspondria a encertar 1 gra d'arròs pintat entre 100.000 grans blancs, aproximadament 2,7 kg d'arròs.

Proposem ara fer una ampliació d'aquesta situació analitzant els premis que es donen a La Grossa de Cap d'Any i la probabilitat d'aconseguir cada premi, tenint en compte la normativa publicada al seu web <https://www.loteriesdecatalunya.cat/jocs/grossa/>

Cal destacar que en el cas de Loteries de Catalunya el 100% dels beneficis van destinats al Fons per a la Prosperitat i la Cohesió Social de la Generalitat de Catalunya. L'objectiu és desenvolupar accions i programes socials per als col·lectius més desfavorits de la societat catalana. Es pot consultar al web el detall del [repartiment d'aquests beneficis](#).

A La Grossa de Cap d'Any es posen a la venda 100.000 números (del 00000 al 99999), amb un total de 40 sèries o bitllets per número. El preu per bitllet de La Grossa de Cap d'Any és de 10 €.

Hi ha 5 grans premis. La Grossa, el primer premi, amb un import de 200.000 € per bitllet. El segon premi, 65.000 € per bitllet; el tercer, 30.000 € per bitllet; hi ha dos quarts premis, 10.000 € per bitllet; i, finalment, tres cinquens premis de 5.000 € per bitllet.

Es fan 8 extraccions:

- 1a, 2a i 3a extraccions, corresponents als 5ns premis.
- 4a i 5a extraccions, corresponents als 4ts premis.

- 6a extracció, corresponent al 3r premi.
- 7a extracció, corresponent al 2n premi.
- 8a extracció, corresponent al 1r premi.

Aquests 8 números guanyadors seran diferents. En el cas que algun dels números de cinc (5) xifres extrets estigui repetit, es considerarà que correspon a la categoria de premi més alt i s'efectuarà una nova extracció per determinar el/s número/s guanyador/s de la/les categoria/es de premi/s inferior/s.

També es donen premis més petits als números anterior i posterior de cadascun d'aquests vuit premis, als números en què les 4, 3 i 2 darreres xifres coincideixen amb aquests vuit premis i amb el número que coincideix amb la darrera xifra del 1r premi. No s'acumulen diferents premis corresponents a un mateix número guanyador, excepte que correspongui a diferents categories de premis.

Podem trobar una taula amb les diferents categories de premis, les coincidències, el nombre de bitllets guanyadors en cada cas, el premi per bitllet i la probabilitat de guanyar, de la qual es reproduïx només la part de la taula corresponent a La Grossa de Cap d'Any 1r premi.

Categoria premi	Coincidències	Bitllets guanyadors	Premi per bitllet	Probabilitats
1r premi	XXXXX Les cinc xifres	40	200.000 €	1/100.000
	XXXXX- Número anterior	40	2.000 €	1/100.000
	XXXXX+ Número posterior	40	2.000 €	1/100.000
	0XXXX Les quatre últimes xifres	360	1.000 €	1/11.111
	00XXX Les tres últimes xifres	3.600	250 €	1/1.111
	000XX Les dues últimes xifres	36.000	35 €	1/111
	0000X L'última xifra (reintegrant)	360.000	10 €	1/11

Font: Loteries de Catalunya

Tal com comenta Claudi Alsina en una entrevista a radioteca.cat el 2016 referida a La Grossa de Cap d'Any: «La matemàtica l'única cosa que fa és preveure les poques possibilitats que tenim de guanyar i, per tant, és la nostra intenció decidir si volem jugar o no, que en el cas de La Grossa de Cap d'Any jo diria que el que sí que és segur que guanyem és l'aportació d'uns diners que són ben aplicats per a problemes socials...»

També proposa geometritzar la situació per visualitzar-ho (que s'ha actualitzat per tal que correspongui a les condicions del sorteig actual): «Imaginem que tenim marcat a terra un rectangle de dos metres per cinc metres, és a dir, 200 centímetres per 500 centímetres, i que el tenim quadrat amb quadrats d'un centímetre quadrat. Hi haurà 100.000 d'aquests quadrats. Tirarem un cigró sobre aquest terra de dos per cinc metres. Bé, la probabilitat de guanyar és que el cigró vagi a parar a un d'aquests 100.000 quadrats que tindríem.»

A classe es podria analitzar com funciona el sorteig de La Grossa de Cap d'Any i analitzar la taula completa repartida en petits grups, raonant com es calculen aquestes probabilitats. També es podria revisar com es reparteixen els beneficis que es generen en diferents programes socials.

Un altre exemple en què la probabilitat té un paper molt important és en el cas de la fiabilitat d'una prova mèdica. En aquest cas, podem trobar un article molt interessant titulat [Falsos positius, o la importància de comprendre la informació](#) publicat per Raül Ibáñez a *Cuaderno de Cultura Científica*.

L'article engega a partir de la situació presentada en el llibre *El hombre anómico* de John Allen Paulos:

«Suposem que hi ha una prova mèdica per detectar si una persona pateix una determinada malaltia (per exemple, càncer), la fiabilitat de la qual és del 98%, i que aquesta malaltia la pateixen 1 de cada 200 persones. Un dia ens fem aquesta prova i ens dona positiva... fins a quin punt ens hem de preocupar? Quina probabilitat hi ha que tinguem aquesta malaltia?

En l'article se centra l'atenció en la incidència de la malaltia i la Fiabilitat de la prova:

Incidència de la malaltia: 1 de cada 200 persones.

Fiabilitat de la prova: Probabilitat que, donada una persona que està malalta, la prova doni positiva que en el cas presentat és d'un 0,98, i per tant d'un 0,02 que doni negativa, tot i que la persona estigui malalta. En l'exemple mostrat es considera que la prova és simètrica i, per tant, la probabilitat, de donar un fals positiu també és del 0,02 (no sempre és així).

Per poder entendre la situació sense entrar en probabilitats condicionades i fent un raonament més intuïtiu, se suposa que es duen a terme 10.000 proves mèdiques i es crea una taula de contingència amb els valors següents:

- Si suposem una incidència de la malaltia d'1 de cada 200 persones és d'esperar que hi hagi unes 50 persones malaltes entre les 10.000 que s'han fet les proves, i per tant 9.950 de sanes.
- De les 50 persones que estan malaltes la prova serà positiva amb una probabilitat del 0,98 i, per tant, donaran positives en el cas de 49 persones i hi haurà 1 persona malalta que donarà negatiu.
- Per altra banda, de les 9.950 persones sanes, la prova donarà un fals positiu amb una probabilitat del 0,02 i, per tant, serà el cas de 199 persones i la resta donarà negatiu.

Resumim la informació en la taula de contingència següent:

	Malalta	Sana	Total
Prova +	49	199	248
Prova -	1	9751	9752
Total	50	9950	10000

Per tant, la probabilitat d'estar realment malalt sabent que la prova ha donat positiu és de 49/248, cosa que és aproximadament d'un 0,2 o 20% i, en canvi, la probabilitat d'estar sa sabent que la prova ha donat positiu, és a dir un fals positiu, és aproximadament del 0,8 o 80%.

Per altra banda, la probabilitat que doni un fals negatiu, és a dir sabent que una persona està malalta doni negatiu, seria d'un 1/9752, que és aproximadament una probabilitat d'un 0,0001 o 0,01%.

Per tant, és important entendre el concepte de fals positiu per comprendre la situació i poder prendre decisions. Moltes vegades quan es dona positiu en una prova, es fa una segona prova amb més fiabilitat per corroborar resultats.

Es pot posar l'exemple quan, en un test d'alcoholèmia, en què es mesura la taxa d'alcohol en sang, es dona positiu (cosa que vol dir més de 0,25 mg/l en aire expirat), es fa una segona prova amb un etilòmetre de precisió que té un grau de fiabilitat més alt, i es repeteix la prova al cap de 10 minuts si torna a donar positiu. Si finalment no s'està d'acord amb el resultat, es pot demanar una anàlisi clínica, d'orina o de sang, per corroborar definitivament els resultats.

Per visualitzar-ho, es pot fer servir el [Pachinkogram](#) de la Universitat d'Auckland. En l'exemple es pot veure la representació d'una malaltia amb una incidència en 1 de cada 100 persones i una fiabilitat de la prova del 98% simètrica.



Font: Pachinkogram: [Conditional Probabilities Visualisation](#)
Autors: Departament d'Estadística de la Universitat d'Auckland

Blocs de competències: processos matemàtics i gestió socioemocional

El conjunt de sabers que constitueixen el sentit estocàstic, com tots els altres sentits, s'han de relacionar amb el conjunt de competències del currículum. Sense un coneixement dels sabers difícilment es poden desenvolupar els processos per avançar en l'assoliment de les competències i, d'altra banda, la manera com s'introdueixen, es construeixen i s'utilitzen els sabers és clau per realitzar un treball competencial.

Així doncs, tots els sabers poden contribuir a desenvolupar qualsevol competència si es treballen en activitats adequades. Igualment, un saber pot contribuir a desenvolupar diverses competències.

Es presenta la relació entre els sentits i les competències específiques a través dels processos: Resolució de problemes (competències específiques CE 1 i CE 2), Raonament i prova (competències específiques CE 3 i CE 4), Connexions, on distingim les internes (competència específica CE 5) i les externes (competència específica CE 6), Comunicació i representació (competència específica CE 7) i Gestió socioemocional (competències específiques CE 8 i CE 9).

Aquesta relació, pel que fa al sentit estocàstic, es concreta, en el marc d'aquest exemple, de la manera que es descriu en els apartats següents, tot i que hi pot haver altres anàlisis igualment vàlides.

Resolució de problemes (CE 1 i CE 2)

L'estadística és una eina fonamental en la resolució de problemes perquè permet organitzar, analitzar i interpretar dades amb l'objectiu de prendre decisions fonamentades. En situacions reals, les dades són sovint desordenades i difícils d'interpretar; l'estadística actua com a mitjà per estructurar la informació i trobar respostes concretes. Per altra banda, la probabilitat ens permet mesurar el grau d'incertesa amb el qual es poden donar les diferents solucions d'una situació quan intervé l'atzar, cosa que ens permetrà prendre decisions. Reconèixer les especificitats de cada situació ens permetrà dissenyar el pla i triar les eines necessàries per arribar a la solució.

La competència específica 1 busca interpretar, modelitzar i resoldre situacions, tant en la vida quotidiana com en altres àmbits del coneixement. L'estadística encaixa perfectament en aquesta competència perquè, a través de la interpretació de gràfics, **saber #3.EST.IN.A**, el càlcul i la interpretació de les mesures de centralitat (mitjana, mediana) **#3.EST.DI.G**, i dispersió (rang, variància, desviació típica), **saber #3.EST.DI.H**, l'estadística ajuda a entendre els patrons i la variabilitat dels fenòmens reals, les dades sovint són simplificades en models estadístics, com regressions lineals o distribucions probabilístiques, i això ens porta a comprendre millor les relacions entre variables o predir resultats futurs. Pel que fa a la probabilitat, ens proporciona models matemàtics de situacions en què hi ha un grau d'incertesa producte de l'atzar. En un primer pas, cal identificar les condicions de la situació com la dependència, la compatibilitat i l'equiprobabilitat **saber #3.EST.PI.A** i **saber #3.EST.PI.B** per poder decidir les eines a utilitzar en la seva resolució.

La competència específica CE 2 posa l'èmfasi en l'argumentació, la validesa i l'avaluació de les respostes obtingudes. En l'estadística, aquest procés és inherent perquè l'argumentació és essencial quan es resol un problema estadístic per justificar la metodologia emprada i, per altra banda, les solucions estadístiques no són absolutes; s'han d'analitzar críticament per verificar-ne la validesa, això inclou comprovar si els resultats tenen sentit en el context del problema o si cal ajustar el model, finalment, com a part d'un procés complet; tot estudi estadístic, **saber #3.EST.IN.A**, ha de conduir a nous reptes i preguntes, com l'anàlisi d'anomalies, el refinament d'un model o l'exploració d'altres variables. En el cas de la probabilitat és essencial valorar i avaluar les solucions obtingudes a les diferents situacions proposades, de vegades obtingudes després de diferents refinaments, cosa que entronca amb el **saber #3.EST.PI.E**

Sabers

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar la resolució de problemes són, entre altres:

- L'anàlisi i la interpretació de gràfics, **saber #3.EST.IN.A**, a fi d'identificar patrons i utilitzar-los per fer prediccions, comparar valors o identificar diferències rellevants i relacionar diverses variables, per tant, es relaciona intrínsecament amb la CE 1.
- El càlcul i la interpretació dels paràmetres de centralització, **saber #3.EST.DI.G**, ja que són eines que proporcionen informació clau sobre com es distribueixen les dades al voltant d'un valor central. Aquest coneixement és essencial per a l'anàlisi i la interpretació de les dades i, per tant, desenvolupa la CE 2.
- El càlcul i la interpretació dels paràmetres de dispersió, **saber #3.EST.DI.H**, ja que ens informen de la dispersió de dades i com la variabilitat pot influir en les decisions o les conclusions, per tant connecta amb la CE 2.
- El **saber #3.EST.IN.A**, Disseny d'investigacions i enquestes per donar resposta a una pregunta, repte científic o situació quotidiana que és essencial tant en el desenvolupament de la CE 1 com CE 2.
- El **saber #3.EST.PI.C**, en què l'ús de diferents recursos digitals ens permet un abordatge de diferents situacions a partir de simulacions que ens poden donar una primera aproximació a la solució o bé la

corroboració dels resultats obtinguts en l'activitat experimental lligat a la CE1.

- El **saber #3.EST.IN.D** ens permet seguir el procés d'evolució de la resolució de diferents problemes des d'un punt de vista històric, i hem d'avaluar i validar en quins casos les solucions proposades en cada pas poden ser vàlides com un camí previ a la solució d'un cas general lligat a la CE1 i CE2.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers fan referència directa al procés de resolució de problemes. Per exemple:

- Les activitats del grup Vilatzara sobre [Florence Nightingale](#) i [Quants hi van anar? Quants en van tornar?](#), totes dues referenciades al **saber #3.EST.DI.A**, permeten obtenir solucions a una situació problemàtica aplicant els coneixements necessaris.
- [Slow reveal graphs](#) és una eina excel·lent per contribuir al desenvolupament de les competències CE 1 i CE 2.
- A l'activitat [Cubes on a boat](#) de Nuria Serra, citada al **saber #3.EST.DI.E**, l'alumnat ha de trobar el millor disseny de barca, amb més capacitat.
- L'activitat [Comparing Data Using Statistical Measures](#), referenciada al **saber #3.EST.DI.H**, extraient inferències comparatives permet la resolució del problema d'escollir com anar a treballar aplicant els paràmetres estadístics necessaris i justificant la validesa de les solucions.
- L'activitat [la mida de les peces](#), també del grup Vilatzara i referenciada també al **saber #3.EST.DI.H**, permet decidir quina de les dues màquines escollir tot fent ús de la interpretació de paràmetres estadístics.
- L'activitat de Raül Fernández que apareix al **saber #3.EST.IN.A** per a la realització d'un [Estudi estadístic: l'alimentació i la salut](#) treballa totes les fases de l'estudi estadístic des del disseny de l'estudi i la definició dels seus objectius.
- A l'adaptació de l'activitat La Bola o la Vida, referenciada al **saber #3.EST.PI.A** s'ha de trobar la distribució més favorable per a l'astròleg a partir de la distribució de les boles en les diferents urnes.
- A l'activitat dels rectangles aleatoris, a partir de la creació d'una col·lecció de rectangles generats a l'atzar i referenciada al **saber #3.EST.IN.B**, permet analitzar la situació i detectar els paràmetres que els caracteritzen per poder donar resposta a les preguntes plantejades.

Raonament i prova (CE 3 i CE 4)

L'estocàstica, que engloba l'estudi de fenòmens aleatoris i la probabilitat, està profundament vinculada a la formulació i la comprovació de conjetures utilitzant una varietat d'eines i mètodes. Materials com cartes, daus o altres elements físics, juntament amb programari estadístic i simuladors estocàstics, faciliten la modelització d'experiments, l'automatització de processos i la realització de prediccions i anàlisis sobre el comportament de les dades.

A partir de l'observació de resultats repetits d'un experiment estocàstic, l'alumnat pot identificar patrons, formular conjetures i fer prediccions sobre els comportaments probables d'un esdeveniment aleatori. Aquest procés no només reforça la comprensió de la probabilitat, sinó que també posa de manifest la importància del raonament estadístic.

El raonament estadístic és essencial per interpretar dades, avaluar probabilitats i comprendre la variabilitat inherent en qualsevol fenomen aleatori, cosa que permet analitzar críticament els resultats, detectar inconsistències, verificar la validesa de les conjetures i generar noves hipòtesis. Així, contribueix al desenvolupament d'una comprensió més profunda i rigorosa dels fenòmens incerts, tant en contextos

acadèmics com en situacions de la vida quotidiana.

Sabers

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar el raonament són, entre altres:

- El càlcul i interpretació del coeficient de variació per comparar i interpretar diferents distribucions de dades, **saber #3.EST.DI.I**, per reconèixer tendències en els problemes i que, per tant, connecta amb la CE 4.
- L'anàlisi dels resultats per identificar patrons i tendències, **saber #3.EST.DI.G**, lligat amb la CE4.
- El reconeixement de situacions amb esdeveniments no equiprobables, **saber #3.EST.PI.B**, que ens demana buscar camins alternatius per a la resolució i que connecta amb CE 3.
- La utilització de recursos digitals (fulls de càlcul, calculadores, GeoGebra...) per a la simulació i càlcul de probabilitats, **saber #3.EST.PI.C** que connecta tant amb la CE 3 com amb la CE 4.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers fan referència directa al procés de raonament i prova. Per exemple:

- L'activitat [La població de les comarques](#) i [On hi ha més dispersió?](#), del grup Vilatzara, que apareixen al **saber #3.EST.DI.I**, que serveixen per comprendre el comportament general de les dades a través del coeficient de variació i permeten argumentar.
- La tasca de NRICH, [which-list-which](#), que apareix al **saber #3.EST.DI.G** que permet trobar els principis dels patrons de les dades, descartant les dades irrelevantes i identificar quines són les dades importants del conjunt.
- L'activitat dels rectangles aleatoris en què, a partir de la creació d'una col·lecció de rectangles generats a l'atzar i referenciada al **saber #3.EST.IN.B**, permet analitzar la situació i detectar els paràmetres que els caracteritzen per poder donar resposta utilitzant els recursos digitals a les preguntes plantejades.

Connexions amb altres parts de la matemàtica (CE 5)

L'Estocàstica té connexions internes profundes a 3r d'ESO, amb altres sentits matemàtics, especialment amb l'àlgebra i el concepte de variable. En estocàstica, les variables són dinàmiques, ja que representen resultats incerts i subjectes a probabilitats. Això n'expandeix el significat més enllà de l'àlgebra tradicional, afavorint una visió més rica i contextualitzada, de manera que aquestes connexions formen un teixit ric i integrat que permet a l'alumnat abordar problemes des de múltiples perspectives, aplicant conceptes de manera transversal i significativa.

Igual que a 2n d'ESO, cal destacar la connexió entre el saber **#3.EST.PI.C**, la utilització de recursos digitals (fulls de càlcul, calculadores, GeoGebra...) per a la simulació i el càlcul de probabilitats amb **#3.ALG.PC.B**, la creació d'algorismes que utilitzin grups iteratius niats per resoldre problemes estocàstics i el saber **#3.ALG.PC.C**, selecció, determinació i ús reflexiu i eficient de les eines computacionals adequades per analitzar i resoldre problemes estocàstics.

Sabers

Alguns sabers treballats en el sentit estocàstic estan molt presents en tota la matemàtica, esdevenen eixos de connexió interna i, per tant, són peces fonamentals en el desenvolupament de la competència CE 5:

- El **saber #3.EST.DI.B**, identificació i reconeixement de variables quantitatives discretes i contínues,

en contextos diversos.

- El **saber #3.EST.DI.C** representació d'un conjunt de dades donades amb gràfics estadístics (mitjançant histogrames, polígons de freqüències i diagrames de caixa...).
- La selecció de les eines digitals més adequades per al tractament i la representació de dades estadístiques, és a dir, el **saber #3.EST.DI.F**, la simulació de situacions i càlcul de probabilitats **#3.EST.PI.C**

Recursos

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar les connexions internes són, entre altres:

- L'activitat [Emergency Rooms Card Sort Activity for Categorical and Quantitative Variables.](#), referenciada a **#3.EST.DI.B**, que permet el reconeixement de variables en un context hospitalari.
- L'ús de fulls de càlcul per fer representacions gràfiques i tractament de dades, amb els comandaments típics per a les operacions estadístiques esmentat al **saber #3.EST.DI.F** i per a la realització de simulacions esmentat al **saber #3.EST.DI.C**.
- La representació geomètrica de diferents situacions, com per exemple l'extracció de dues boles de colors d'una bossa presentada al **saber #3.EST.PI.B**, que ens permet visualitzar totes les possibles opcions i calcular-ne les probabilitats.

Connexions amb altres matèries i amb l'entorn (CE 6)

El context és essencial en l'estocàstica perquè proporciona el marc necessari per interpretar resultats, dissenyar models, comprendre la variabilitat i prendre decisions informades. El context assegura que els processos estocàstics tinguin sentit en la realitat concreta en què s'apliquen, cosa que permet que els models siguin més precisos, útils i aplicables. Sense el context adequat, les anàlisis i les conclusions poden ser errònies o no tenir cap valor pràctic.

Sabers

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar les connexions externes són, entre altres:

- L'anàlisi de gràfics **saber #3.EST.DI.A** i **saber #3.EST.DI.E** permet connectar les matemàtiques amb nombroses àrees del coneixement: altres ciències, actualitat, tecnologia... i, per tant, implica la construcció de models matemàtics per estudiar fenòmens naturals i socials. Per tant, reforcen la CE 6.
- El disseny d'investigacions i enquestes, **saber #3.EST.IN.A**, per resoldre un problema, necessitat o repte expliciten la importància del context extern, reforçant també la CE 6. Cal destacar que, a 3r d'ESO, els contextos han de ser més complexos que a 2n i haurien de propiciar la comparativa de conjunts de dades diferents.
- El reconeixement en contextos no matemàtics i d'altres matèries de situacions on desenvolupar un estudi estadístic és exactament aquest **saber #3.EST.IN.B**, cosa que es vincula directament amb la connexió amb altres matèries.
- El reconeixement en cada context de la dependència, compatibilitat i equiprobabilitat o no de les diferents situacions i esdeveniments, **saber #3.EST.PI.A** i **saber #3.EST.PI.B**, que ens vincula amb altres matèries i amb situacions de la vida quotidiana.
- La comprensió de la resolució de problemes clàssics en el seu context històric, **saber #3.EST.PI.E**
- Interpretació racional i equilibrada de situacions de la vida quotidiana i l'entorn on intervé l'atzar,

saber **#3.EST.PI.F**, que entronca directament amb la CE 6.

Recursos

Molts dels recursos descrits per treballar diferents sabers del sentit estocàstic ofereixen oportunitats per fer connexions externes. Per exemple:

- L'anàlisi de gràfics del web del *New York Times* [what's going on the graph](#) que permet analitzar l'impacte de les dades científiques, tecnològiques, socials, artístiques i culturals de les notícies d'actualitat dels darrers 6 anys i, per tant, desenvolupar el pensament crític de l'alumnat.
- [Gapminder](#), que afavoreix explorar les dades històriques i comparar països al llarg del temps, la qual cosa facilita l'aprenentatge de temes com l'economia, la salut pública o la sostenibilitat d'una manera entretinguda i visualment atractiva.
- La proposta de Raül Fernández per a la realització d'un [Estudi estadístic sobre l'alimentació i la salut](#), i en el mateix treball del saber **#3.EST.IN.A** podeu trobar l'activitat [Control de qualitat](#) del grup Vilatzara, que pretén convidar l'alumnat a iniciar-se en el control de qualitat de les empreses a través d'un estudi estadístic.
- El concurs [Planter de sondeigs i experiments](#), un recurs per treballar el disseny d'investigacions estadístiques en àmbits no estrictament matemàtics a través del conjunt de dades obertes de Barcelona.
- L'activitat [La batalla dels becs](#) adaptada per Victòria Carbó per entendre la selecció natural a través d'un experiment estadístic.
- El problema del repartiment d'una aposta a través de les cartes entre Pascal i Fermat per entendre com es van desenvolupar els diferents conceptes de probabilitat en els seus inicis.
- La comprensió del funcionament de jocs d'atzar com La Grossa de Cap d'Any i el càlcul de les probabilitats d'aconseguir cada premi.
- L'article dels falsos positius en les proves mèdiques i quin paper hi té la probabilitat tant en l'índex d'incidència de la malaltia com en la fiabilitat de les proves.

Totes aquestes activitats contribueixen al desenvolupament de la competència CE 6.

Comunicació i representació (CE 7)

L'estadística té un paper fonamental en el desenvolupament de la competència de comunicació i representació, ja que ens proporciona eines per organitzar i transmetre informació de manera clara i estructurada. Mitjançant l'ús de taules, gràfics i altres formes visuals, l'estadística permet representar conceptes i resultats de forma accessible, la qual cosa facilita la comprensió de dades complexes.

Aquest procés no només ajuda a visualitzar patrons, tendències i relacions entre dades, sinó que també fomenta el pensament crític en interpretar-les. A més, el debat a l'aula entre iguals adquireix un paper clau. La discussió col·lectiva permet a l'alumnat justificar les seves conclusions, reflexionar sobre els diferents punts de vista i identificar possibles biaixos o errors en la interpretació de les dades.

Pel que fa a la probabilitat, la correcta representació de les diferents situacions, ja sigui en format de taula, diagrama d'arbre, geomètricament o gràficament, pot facilitar el procés de resolució de les diferents situacions. El treball en aquest sentit pot resultar clau per abordar situacions anàlogues. Per altra banda, el procés de comunicació i de discussió tant de les situacions inicials com de les solucions entre companys i amb el professorat ajuda a fer-se més conscients dels coneixements i processos utilitzats en la seva resolució.

Sabers

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar la comunicació i la representació són, entre altres:

- El **saber #3.EST.DI.A** per tal de visualitzar a través de gràfics un conjunt de dades i justificar conclusions.
- La representació d'un conjunt de dades donades amb gràfics estadístics (mitjançant histogrames, polígons de freqüències i diagrames de caixa...), és a dir el **saber #3.EST.DI.E**.
- L'elaboració d'un informe on s'expliqui la metodologia emprada en l'estudi estadístic i on es mostren els resultats, **saber #3.EST.IN.J**.
- Les situacions en què no hi ha equiprobabilitat es poden representar a partir de taules, diagrames d'arbres o gràficament per tal de trobar les probabilitats dels diferents esdeveniments, **saber #3.EST.PI.B**.
- La Interpretació racional i equilibrada de situacions en què intervé l'atzar es pot obtenir a partir d'una bona representació de la situació plantejada, **saber #3.EST.PI.F**.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers del sentit estocàstic fan referència al procés de comunicació i representació. Per exemple:

- El comentari de gràfics proposat en el desenvolupament del **saber #3.EST.DI.A**
- L'activitat concretament de Don Steward referenciada al **saber #3.EST.DI.E**, [comparing two data sets](#), en què s'estudia la longevitat dels presidents americans a través de les diferents representacions gràfiques.
- L'estudi i la revisió dels informes estadístics del [Reto Barcelona Dades Obertes](#), que s'esmenta al **saber #3.EST.IN.J**.
- La representació gràfica de la situació és clau per resoldre les activitats de Les boles de colors i Fem el nus, les taules ho són per resoldre l'activitat del Pillow problems de Lewis Carroll o entendre els falsos positius, **saber #3.EST.PI.A**, **saber #3.EST.PI.B** i **saber #3.EST.PI.F**.

Gestió socioemocional (CE 8 i CE 9)

L'autoregulació és clau quan l'alumnat treballa amb dades i ha de prendre decisions sobre com interpretar-les o presentar-les. Els errors en càlculs o interpretacions no han de ser vistos com a fracassos, sinó com una oportunitat per reflexionar, aprendre i ajustar estratègies. Això fomenta una actitud resilient i una perspectiva positiva cap al procés d'aprenentatge.

L'estadística ofereix un marc per afrontar situacions d'incertesa, ja que sovint els resultats no són concloents o poden variar segons l'enfocament. Això ensenya als estudiants a ser perseverants i a valorar el procés de cerca de solucions, reforçant la capacitat d'adaptar-se a nous reptes. Aquesta actitud no només millora el rendiment acadèmic, sinó que també ajuda l'alumnat a gaudir de les matemàtiques i a percebre-les com una disciplina viva i rellevant.

El treball estadístic a 3r d'ESO no només ha de permetre a l'alumnat adquirir coneixements cada cop més avançats en l'estudi de les dades, sinó també a desenvolupar habilitats personals que contribueixen al seu creixement integral i a afrontar els reptes amb confiança i creativitat.

La gestió socioemocional està vinculada a dues competències específiques:

- CE 8, relacionada amb el desenvolupament d'habilitats personals com les creences, les actituds i les

emocions envers les matemàtiques.

- CE 9, centrada en el desenvolupament d'habilitats socials com el treball en equip i la presa de decisions.

A continuació, s'indiquen alguns aspectes que, treballats des del sentit estocàstic, poden contribuir al desenvolupament de les competències CE 8 i CE 9.

Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 8

- El potencial històric de l'estadística i la probabilitat pot ajudar-los a entendre la seva rellevància en la vida quotidiana i en la societat, les activitats proposades al **saber #3.EST.DI.A**, com la de [Florence Nightingale](#) i el gràfic de Minard treballat a través de l'activitat del grup Vilatzara [Quants hi van anar? Quants en van tornar?](#), potencien apreciar el paper fonamental de les matemàtiques en els avenços científics i en els estudis històrics. En aquest mateix sentit, podem destacar l'activitat **El problema del repartiment d'una aposta** presentat al **saber #3.EST.PI.D**.
- Un recurs per fomentar la utilitat de les matemàtiques en la predicció de catàstrofes naturals el podem trobar a [Matemàtiques en acció](#), concretament al vídeo d'Álvaro Corral, *huracans, terratrèmols i fitxes de dòmino*.

Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 9

Cal destacar que l'estadística és una disciplina que es beneficia enormement d'un entorn de debat a l'aula, en què les competències socials com la col·laboració, la cooperació i la comunicació tenen un paper clau per afrontar reptes estadístics de manera eficaç. La comunicació entre iguals és essencial en aquest context. Quan l'alumnat comparteix i discuteix les seves conclusions, pot identificar errors en les interpretacions o els càlculs que, altrament, podrien passar desapercebuts, cosa que millora així les seves capacitats analítiques. L'estocàstica ofereix grans oportunitats per treballar en equip, promovent actituds positives, implicació en la presa de decisions i respecte per les aportacions dels altres, i així superar qualsevol idea limitant sobre les habilitats pròpies o alienes en matemàtiques. A continuació, es destaquen un conjunt d'activitats concretes en aquest àmbit:

- El conjunt d'activitats de [Mathematics Assessment Project](#) esmentades al **saber #3.EST.DI.H** i al **saber #3.EST.DI.C**, de la Universitat de Califòrnia a Berkeley i el *Shell Center* de la Universitat de Nottingham, en què es desenvolupen les competències vinculades a la resolució de problemes amb un interessant procediment de treball en grup.
- Les activitats matemàtiques vinculades al pensament computacional ofereixen excel·lents oportunitats per fomentar el treball en equip i la col·laboració, com per exemple l'activitat Rectangles aleatoris presentada al bloc **saber #3.EST.PI.C**.