

TOR 3r d'ESO: Sentit espacial

Consideracions generals	1
Blocs de sabers	1
Moviments i transformacions	1
Sabers	1
Descripció i orientacions	2
Reflexions inicials	2
Comentaris sobre les connexions	2
Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació	2
Observacions sobre alguns sabers específics	2
Recursos i activitats	2
Recursos i activitats generals per al bloc de sabers	2
Recursos i activitats per treballar sabers concrets	3
Visualització i modelització geomètrica	8
Sabers	8
Descripció i orientacions	9
Reflexions inicials	9
Comentaris sobre les connexions	9
Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació	9
Recursos i activitats	9
Recursos i activitats per treballar sabers concrets	9
Blocs de competències: processos matemàtics i gestió socioemocional	21
Resolució de problemes (CE 1 i CE 2)	21
Sabers	21
Recursos	21
Raonament i prova (CE 3 i CE 4)	22
Sabers	22
Recursos	22
Connexions amb altres parts de la matemàtica (CE 5)	23
Sabers	23
Recursos	23
Connexions amb altres matèries i amb l'entorn (CE 6)	24
Sabers	24
Recursos	24
Comunicació i representació (CE 7)	24
Sabers	25
Recursos	25
Gestió socioemocional (CE 8 i CE 9)	25
Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 8	26
Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 9	26

Consideracions generals

La geometria ens ajuda a interpretar el món que ens envolta. El seu estudi i el desenvolupament del sentit espacial són un objectiu en si mateix, però alhora ajuden a comprendre i a desenvolupar la resta de sentits i a consolidar els coneixements propis d'altres branques de les matemàtiques. A més, la geometria pot condicionar o ajudar a cercar la solució de problemes propis d'altres disciplines. Per tots aquests motius, cal parlar especial atenció a l'estudi de la geometria, i la geometrització de l'educació matemàtica hauria de ser habitual a les aules de secundària.

A grans trets, el desenvolupament del sentit espacial al llarg de l'educació secundària comença donant un pes molt important a l'estudi de figures geomètriques de dues i tres dimensions, formalitzant i aprofundint en un treball ja iniciat a l'educació primària, i acaba de forma més abstracta treballant els sistemes de representació i la geometria analítica, tot passant per l'estudi dels moviments i les transformacions geomètriques elementals. Al llarg de tot el període, a més, cal parlar especial atenció a la visualització i modelització geomètrica, no només durant l'estudi de la geometria, sinó especialment durant el treball en les altres branques de les matemàtiques. Aquesta geometrització dels altres sentits servirà, d'una banda, per consolidar l'aprenentatge dels sabers que s'estiguin treballant en aquell moment i, de l'altra, per aconseguir una base geomètrica més sòlida.

Al llarg de tot el treball fet entorn del sentit espacial s'ha volgut donar continuïtat a les línies de treball que promou el document «Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria» («[Quaderns d'Avaluació núm. 31](#)»).

Un espai que pot servir de suport en l'aprenentatge de les matemàtiques en general i del sentit espacial en particular és el Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA), atès que, en totes les exposicions que organitza pel territori, inclou mòduls que ajuden a l'assoliment dels sabers tractats al llarg de l'etapa. Alguns dels mòduls que estan relacionats amb els sabers proposats en el sentit espacial a 3r d'ESO són: «[El llibre de miralls](#)», «[Tessel·lació de Penrose](#)» o «[Les sargantanes d'Escher](#)», entre d'altres.

En el tercer curs de l'educació secundària obligatòria, el sentit espacial perd una mica de presència respecte al segon per cedir-la al sentit algebraic. Malgrat això, el sentit espacial encara hi és present. L'estudi i el treball amb figures geomètriques ja s'han dut a terme a primer i segon i, en aquest tercer curs, el treball geomètric se centra en els moviments i les transformacions en el pla. A més del bloc Formes geomètriques de dues i tres dimensions, l'altre bloc que no es treballa en aquest curs és el de Localització i sistemes de representació. El bloc Visualització i modelització geomètrica, que promou una visió geometritzada de la resta de sabers del currículum i d'altres àrees de coneixement, en gran manera fa de crossa del sentit algebraic, que és el que té més presència a tercer, i contribueix, així, a la comprensió dels conceptes i en el procés cap a l'abstracció que es demana als alumnes en aquest curs.

Blocs de sabers

Moviments i transformacions

Sabers

- A. Comprensió i estudi del concepte de translació, gir i simetria. Estudi dels elements que defineixen cadascun dels moviments. **[ESS]**
- B. Estudi de recobriments en el pla.

- C. Ús de materials manipulatius i de programes de geometria dinàmica per generar transformacions geomètriques. **#ALG.PC**

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

L'estudi dels moviments en el pla és un moment molt interessant per cultivar la mirada matemàtica de l'alumnat. Les connexions d'aquest bloc de continguts amb l'entorn dels alumnes són molt fortes, motiu pel qual és un bon moment per demanar a l'alumnat que reconegui aquells conceptes treballats en els elements de la seva vida quotidiana i viceversa. Així mateix, es pot aprofitar per treballar conceptes matemàtics mitjançant l'anàlisi del món que ens envolta.

A més, aquest bloc de continguts permet treballar de forma conjunta amb els companys d'educació visual i plàstica, i es pot aprofitar per fomentar la creativitat de l'alumnat.

L'estudi i anàlisi de les homotècies no s'ha inclòs en aquest bloc perquè en el decret d'ordenació curricular s'especifica que aquest és un saber de quart curs, però es considera positiu que les homotècies i la resta de transformacions geomètriques es treballin de forma conjunta com un sol bloc. Si es volen veure exemples d'activitats per treballar les homotècies, es poden trobar als textos d'orientació i recursos de 4t d'ESO.

Comentaris sobre les connexions

Els programes de geometria dinàmica permeten la realització de moviments en el pla de forma molt pràctica i, a més, en funció de les activitats proposades, contribueixen a la comprensió d'aquest tipus de transformacions geomètriques. Aquests dos motius han fet que l'ús d'aquesta mena de programes prengui la categoria de saber i, per tant, que aquest bloc quedi connectat amb **#ALG.PC**.

Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

En aquest bloc només s'ha destacat com a essencial el **saber #3.ESP.MT.A** perquè s'ha considerat que sobre aquest pivoten els altres dos. Si bé és cert que el saber de recobriments en el pla es pot enfocar des de diversos punts de vista, és clar que els conceptes de gir, translació i simetria hi tenen un pes rellevant.

Observacions sobre alguns sabers específics

Alguns exemples de material manipulatiu que pot ser útil per generar transformacions geomètriques (**saber #3.ESP.MT.C**) són els enquadernadors i paper de ceba per als girs i els miralls per a la simetria.

Recursos i activitats

Recursos i activitats generals per al bloc de sabers

Per treballar tot el bloc de sabers, hi ha l'element de l'ARC [Transformacions en el pla](#), de Victòria Oliu. A la seqüència didàctica es proposen activitats amb GeoGebra d'exploració i de construcció. Després de les activitats d'exploració, es plantegen un seguit de preguntes per raonar i respondre per escrit. Les activitats de construcció s'han preparat deixant visibles només les eines necessàries perquè l'alumnat pugui començar a treballar sense més explicacions. L'activitat final sobre les simetries d'un objecte es pot deixar per a l'alumnat més ràpid, i també es pot ampliar propasant l'estudi de les simetries d'altres figures, com ara quadrats i polígons regulars. La seqüència didàctica completa està disponible en pàgina web.

Si ens centrem en la relació entre les matemàtiques i l'art, podem analitzar alguns dels panells de l'exposició [MartEMÀTIQUES](#) de Fernando Corbalán. En aquesta exposició, que va itinerant per diferents comarques catalanes, hi podem trobar panells que busquen les matemàtiques que s'amaguen en multitud de produccions artístiques: mosaics, simetries, figures impossibles... Pot servir per muntar una exposició al centre a partir de la qual es pot fer un treball a l'aula, seguint les indicacions de la [guia didàctica](#).

Recursos i activitats per treballar sabers concrets

Saber #3.ESP.MT.A

Per treballar els moviments i transformacions de figures planes (**saber #3.ESP.MT.A**), es proposa començar per l'estudi de les sanefes amb l'activitat [Frisant pels frisos](#) del blog [Calaix +ie](#) de Joan Jareño. En aquesta activitat, es construeixen frisos a partir del motiu bàsic i se n'estudien els moviments, per acabar definint i classificant els set tipus que hi ha. Es tracta d'una proposta que connecta fortament amb l'entorn proper de l'alumnat i que dona peu a la creació de noves produccions artístiques.



Font: [Frisant pels frisos](#), de Joan Jareño.

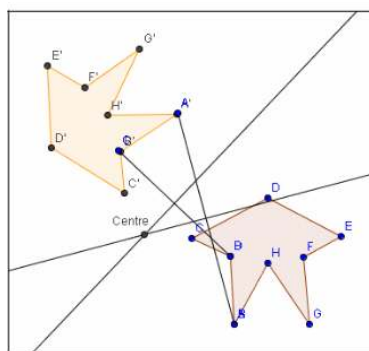
Sabers #3.ESP.MT.A i #3.ESP.MT.C

Una altra activitat per treballar els **sabers #3.ESP.MT.A i #3.ESP.MT.C** és l'estudi de les isometries i homotècies que es poden trobar en els logotips de marques comercials.



Font: banc d'imatges del curs «GeoGebra en la enseñanza de las matemáticas», de Rafael Losada.

Aquest estudi forma part de l'itinerari formatiu [Els logotips i els moviments en el pla](#) que proposa Ramon Bergadà i es pot trobar a l'ARC. L'autor proposa començar amb la introducció de les diferents isometries a partir de les definicions i d'una tasca d'aplicació de la definició de cadascuna a una figura donada, sobre paper. El recurs també incorpora exemples de moviments al pla amb GeoGebra, dels quals en podem trobar més en diverses entrades de l'ARC. L'activitat de Josep Lluís Cañadilla [Girs amb GeoGebra](#), per exemple, se centra en els girs i proposa començar buscant la figura transformada a partir d'una de donada; en una segona activitat es pretén trobar el centre i l'angle d'un gir a partir de la figura original i la transformada, i acaba amb una aplicació dels coneixements treballats a l'entorn: «on cal col·locar el centre de gir en un joc d'escombres de parabrisa de cotxe?».



Font: [Girs amb GeoGebra](#), de Josep Lluís Cañadilla.

En la mateixa línia i del mateix autor, tenim les activitats de l'ARC [Simetries amb GeoGebra](#), [Translacions amb GeoGebra](#) i [Composició de moviments](#).

Saber #3.ESP.MT.A

Una proposta divertida per cercar els moviments estudiats en el **saber #3.ESP.MT.A** en un context ben diferent és analitzar el vídeo de la cançó «[Good morning](#)» de la pel·lícula *Cantant sota la pluja*, en la qual els tres actors (Gene Kelly, Debbie Reynolds i Donald O'Connor) ballen claqué i posen en escena diverses isometries tot ballant. Un cop analitzat es pot fer notar la bellesa i l'harmonia que aporten aquests elements matemàtics a les arts, en aquest cas al ball.

Saber #3.ESP.MT.B i saber #3.ESP.MT.C

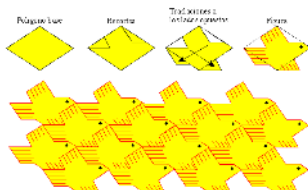
Per treballar el **saber #3.ESP.MT.B** i el **saber #3.ESP.MT.C**, trobem el recurs de l'ARC [Tessel·lem?](#), de Núria Serra. La proposta és una introducció al món dels mosaics. A través de diverses activitats, es treballen els mosaics regulars, els semiregulars, amb pentàgons del Caire, amb pentàgons equilàters còncaus i els rombes, dards i estels de Penrose. Es treballen les característiques geomètriques de les peces que formen el mosaic i també es construeixen els mosaics amb les plantilles proporcionades. També es demana que l'alumnat faci alguns càlculs de superfícies.

Triangle	Quadrat	Hexàgon
M1: $3, 3, 3, 3, 3, 3 = 3^6$	M2: $4, 4, 4, 4 = 4^4$	M3: $6, 6, 6 = 6^3$

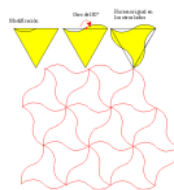
Font: exposició [Matemáticas de cerca](#), del Grupo Alquerque.

A la part final de la proposta, l'alumnat aprèn algunes de les tècniques d'Escher amb l'objectiu de dissenyar la tessela base d'un mosaic per al concurs de mosaics del centre.

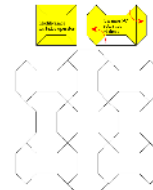
A) Per **translacions**, sobre un paral·lelogram o un hexàgon es modifica (o es "retalla") un costat i es trasllada la modificació (o s'afegeix allò que hem tallat) cap al costat oposat.



B) A partir de giro de 180° amb el centre en el punt mitjà d'un costat d'un quadrilàter, transmetre a hexàgon.



C) Dada la línia de simetria, crear una línia de simetria perpendicular a la línia de simetria. Per obtenir una línia de simetria perpendicular a la línia de simetria.



Font: exposició [Matemáticas de cerca](#), del Grupo Alquerque.

Totes les imatges de les activitats proposades per a l'alumnat han estat extretes de l'exposició [Matemàtiques de cerca](#) que va fer el Grupo Alquerque el curs 2006-2007.

Saber #3.ESP.MT.B

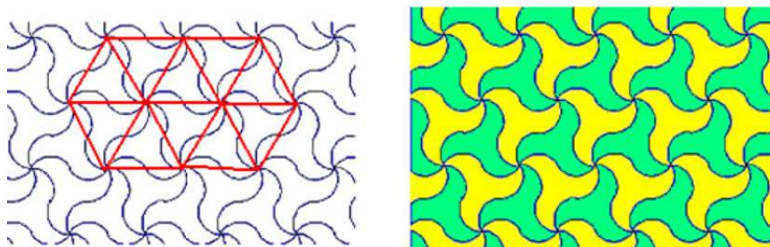
En la línia de la creació de mosaics utilitzant les tècniques d'Escher, trobem a l'ARC l'activitat [Mosaics dibuixant](#), d'Anton Aubanell. Es tracta de convidar l'alumnat a confeccionar els seus propis mosaics partint d'un de regular amb triangles equilàters, quadrats o hexàgons. Podem disposar de fulls amb aquests tramats (impresos en un color molt suau perquè després no ressalti sobre el nou mosaic) per tal que l'alumnat els pugui emprar com a base.

A partir d'un mosaic bàsic, es tracta de treure una figura d'un dels costats o d'una part d'un costat i afegir-la, exactament igual, a un altre costat o part d'un costat (apliquem translacions i/o girs). A continuació, se'n presenten tres exemples: un de fet amb triangles, un altre amb quadrats i l'últim fet amb hexàgons. En el primer exemple, es treballa a partir de triangles equilàters. Per a cada costat, n'assenyalem el punt mitjà, en traiem un segment circular que tingui per corda mig costat i, fent un gir de 180° amb el centre al punt mitjà del costat, l'enganxem sobre l'altra meitat:



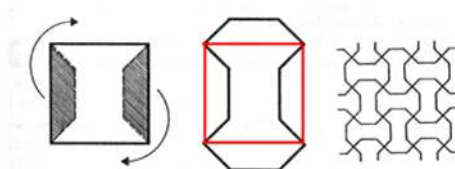
Font: [Mosaics dibuixant](#), d'Anton Aubanell.

El mosaic quedaria com a la imatge següent:



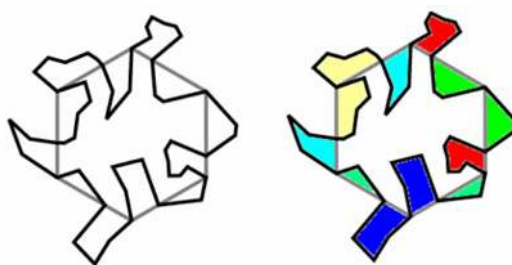
Font: [Mosaics dibuixant](#), d'Anton Aubanell.

En el segon exemple, es treballa sobre un quadrat. En traiem un petit trapezi isòsceles que tingui per base un dels costats i, fent un gir de 270° amb el centre en un dels vèrtexs de la base, l'enganxem sobre un altre costat del quadrat. Després repetim la mateixa operació amb l'altra parella de costats, com es mostra en el dibuix:



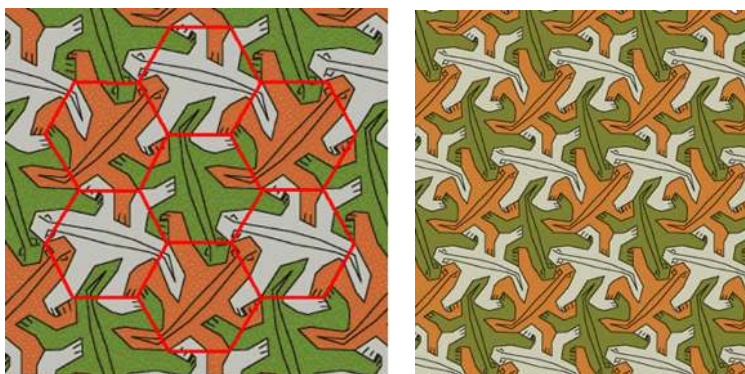
Font: [Mosaics dibuixant](#), d'Anton Aubanell.

En el tercer exemple, es treballa sobre un hexàgon i té interès perquè es retallen i s'enganxen formes força irregulars i també perquè és la base d'un dibuix de Maurits Cornelius Escher (1898-1972). Pot resultar molt interessant per al nostre alumnat mostrar diversos dissenys d'aquest artista holandès. En les figures següents, es representa l'hexàgon i les formes que es retallen i s'enganxen per donar el perfil desitjat:



Font: [Mosaics dibuixant](#), d'Anton Aubanell.

A continuació, es mostra el mosaic resultant, sobre el qual s'han assenyalat els hexàgons bàsics, i després el dibuix sencer:



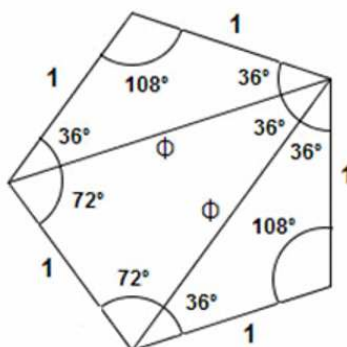
Font: [Mosaics dibuixant](#), d'Anton Aubanell.

Un cop s'hagin mostrat a l'alumnat aquestes tècniques, serà bo convidar-lo a dissenyar els seus propis mosaics. Es pot fer un concurs, com en la proposta anterior, per premiar els més originals. Solen sortir dissenys ben bonics.

Una altra activitat interessant és proposar a l'alumnat que detecti mosaics en el seu entorn quotidià: voreres, passeigs, rajoles de les cases...

Saber #3.ESP.MT.B i saber #3.ESP.MT.C

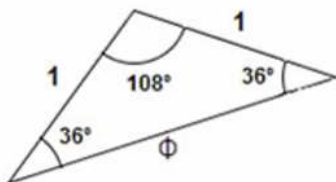
També per treballar el **saber #3.ESP.MT.B** i el **saber #3.ESP.MT.C**, hi ha el recurs [Mosaics de Penrose amb peces magnètiques](#) a l'ARC, també d'Anton Aubanell. Una proposta de seqüència d'activitats seria la següent. En primer lloc, es presenta la raó àuria i la construcció d'un pentàgon regular amb regla i compàs o la construcció de pentàgons regulars amb algun programa de geometria dinàmica. Tot seguit, es dedueixen els angles interiors d'un pentàgon regular i es tracen les dues diagonals del pentàgon regular que surten d'un vèrtex. Apareixen tres triangles isòsceles i, tot seguit, es dedueixen els valors dels seus angles. Si es pren com a unitat de mesura la longitud del costat del pentàgon, resultarà que la longitud de les diagonals serà el número auri Φ . Així, es té:



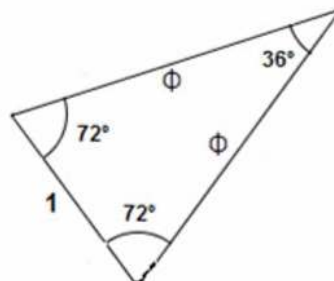
Font: [Mosaics de Penrose amb peces magnètiques](#), d'Anton Aubanell.

Ara, separem els tres triangles que s'han dibuixat en el pentàgon. S'obtenen triangles de dos tipus:

Tipus A

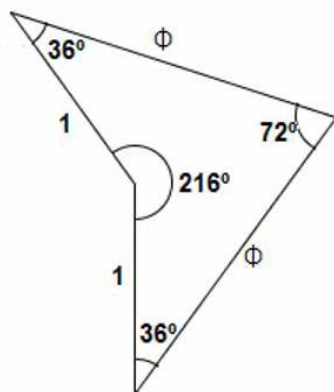


Tipus B



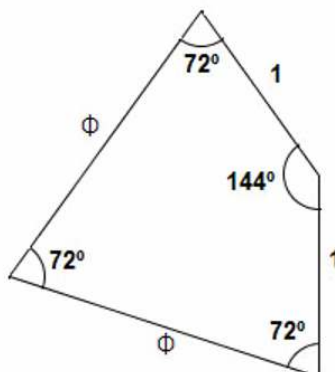
Font: [Mosaics de Penrose amb peces magnètiques](#), d'Anton Aubanell.

Es pot observar com, ajuntant dos triangles del tipus A pel costat de mesura unitat, obtindrem una peça tipus dard:



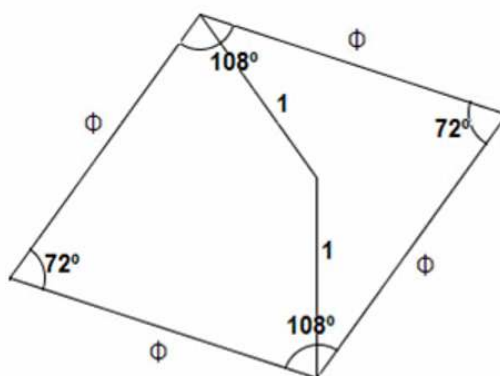
Font: [Mosaics de Penrose amb peces magnètiques](#), d'Anton Aubanell.

I ajuntant dos triangles del tipus B pel costat de mesura Φ , obtindrem una peça tipus estel:



Font: [Mosaics de Penrose amb peces magnètiques](#), d'Anton Aubanell.

S'observa, finalment, que la peça tipus dard i la peça tipus estel poden ajuntar-se pels seus costats unitat i donen un rombe:

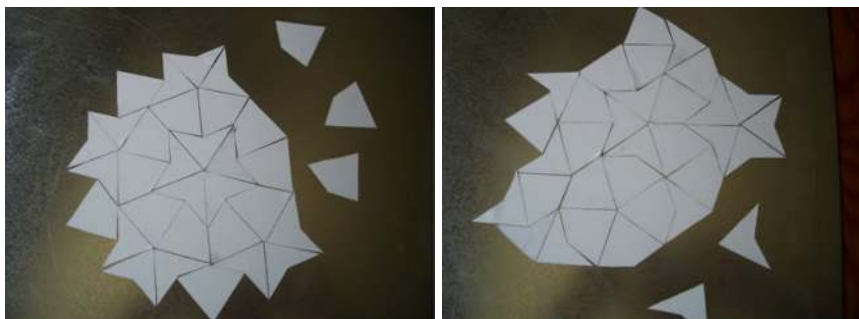


Font: [Mosaics de Penrose amb peces magnètiques](#), d'Anton Aubanell.

Una vegada fets aquests raonaments, amb regle i compàs, GeoGebra o algun altre programari, es construeixen plantilles de cadascuna d'aquestes peces i es dibuixen o imprimeixen sobre material magnètic. Convé aprofitar bé aquest material, ja que és una mica car. S'ha de tenir en compte que, en general, es necessiten més estels que dards (en una proporció que, per mosaics infinits, seria exactament $\Phi = 1,618...$). Després es retalla amb cura el material magnètic i s'obté una bona col·lecció d'estels i de dards per formar mosaics.

L'última part de la pràctica és la més visual i consisteix a construir mosaics amb aquestes dues peces sobre la pissarra magnètica. Aquests mosaics són molt bonics i s'anomenen mosaics de Penrose en honor a Roger Penrose, un físic, matemàtic i cosmòleg britànic que els va idear l'any 1974. De fet, hi ha infinits mosaics de Penrose que no són periòdics.

Els mosaics resultants encara resulten més vistosos si se n'acoleixen les peces.



Font: [Mosaics de Penrose amb peces magnètiques](#), d'Anton Aubanell.

Visualització i modelització geomètrica

Sabers

- Interpretació d'una multiplicació com l'àrea d'un rectangle: ús del model de caixa per resoldre equacions de segon grau, per factoritzar expressions algebraïques i visualitzar les identitats notables. [#ALG.ID](#)
- Visualització de solucions d'equacions o de sistemes d'equacions en representacions gràfiques en eixos cartesianes. [#ALG.ID](#)
- Visualització geomètrica dels nombres triangulars, altres nombres figurats i altres patrons senzills. [#ALG.PA](#)
- Visualització d'una funció quadràtica i d'una funció de proporcionalitat inversa com una paràbola o una hipèrbola, respectivament, amb unes característiques concretes. [#ALG.RF](#)

- E. Reconeixement de connexions entre el sentit espacial, la resta de sentits i altres àrees de coneixement properes a l'alumnat. **[ESS]**

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

El bloc Visualització i modelització geomètrica té una rellevància molt important a l'hora d'abordar conceptes des de diferents punts de vista i ajuda els alumnes a acostar-se a idees més abstractes. En aquest aspecte, aquest bloc pren un sentit especial a 3r d'ESO, perquè es treballen molts conceptes algebraics, que acostumen a ser complicats d'assumir per a alguns alumnes. La visualització serà un suport essencial per a aquest alumnat amb menys facilitat per a l'abstracció, ja que reduirà la por i l'ansietat que es pugui generar i, a més, ajudarà a consolidar les idees de fons d'allò que es treballa algebraicament. La visualització de determinats conceptes ajuda a treballar amb l'essència del concepte i a allunyar-se d'aquells tipus de procediments que són receptes que funcionen, segons el punt de vista dels alumnes, màgicament. Entendre bé els conceptes de fons farà que els alumnes trobin lògics els passos que es van seguint i guanyin confiança en la seva capacitat matemàtica.

En aquest bloc es troba la visualització d'alguns conceptes determinats, però cal recordar que passar per la geometria pot ajudar a entendre molts conceptes i propietats matemàtiques. Per tant, és una bona inversió geometritzar qualsevol concepte sempre que es pugui.

Comentaris sobre les connexions

Les connexions d'aquest bloc amb la resta de blocs i sabers són inherents. En el 3r curs d'ESO, en què l'àlgebra comença a emergir amb força, es pot veure que gairebé tots els sabers d'aquest bloc estan connectats a algun dels blocs del sentit algebraic (**#ALG.PA**, **#ALG.ID** i **#ALG.RF**).

L'únic saber que no està vinculat explícitament al sentit algebraic és el **#3.ESP.VM.E**, que precisament proposa el reconeixement de connexions entre la geometria i tots els sentits.

Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

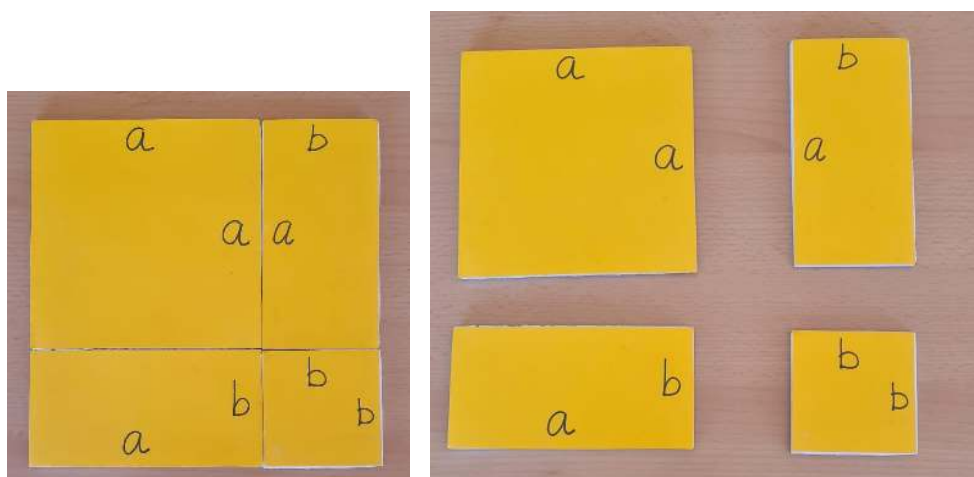
L'únic saber que s'ha destacat com a essencial en aquest bloc és el **#3.ESP.VM.E**, que és molt genèric i que, per tant, inclou els altres quatre sabers. Hauria sigut molt difícil destacar qualsevol dels altres quatre per sobre de la resta, perquè el que es considera més important és que el professorat sigui conscient que visualitzar i modelar geomètricament allò que s'està treballant ajuda a l'aprenentatge de l'alumnat, i es recomana que, sempre que sigui possible, més enllà dels quatre sabers concrets d'aquest bloc, s'aprofiti aquesta oportunitat.

Recursos i activitats

Recursos i activitats per treballar sabers concrets

Saber #3.ESP.VM.A

Per treballar el **saber #3.ESP.VM.A**, a l'**ARC** hi ha el recurs [Model geomètric per al desenvolupament del quadrat de la suma](#), d'Anton Aubanell. Es tracta d'un model geomètric que serveix per fer una demostració visual de la identitat notable en qüestió: el quadrat de la suma de dos nombres.



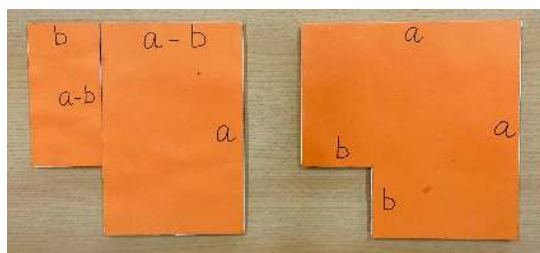
Font: elaboració pròpia.

Si observem la figura en conjunt, deduirem fàcilment que el costat del quadrat gran és $a + b$ i, per tant, la seva àrea serà $(a + b)^2$. Separant les peces, observarem que les àrees respectives són: a^2 , b^2 , $a \cdot b$ i $b \cdot a$. Així doncs, atesa la conservació de l'àrea, tindrem que $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$.

Aquest recurs pot incorporar-se al treball de classe entorn del desenvolupament d' $(a + b)^2$, de manera que el professorat l'utilitzi com un element més de demostració. Si disposem d'una pissarra amb fons metàl·lic i les peces fetes amb material magnètic, podrem fer la demostració sobre la pissarra i resultarà molt més visual. Un exercici també interessant, però que requereix més temps, consisteix a fer que cada estudiant es construeixi el seu model amb cartró.

A l'ARC hi trobem, així mateix, el [Model geomètric per al desenvolupament d' \$\(a + b\) \cdot \(a - b\)\$](#) , també d'Anton Aubanell. De forma similar al recurs descrit anteriorment, es tracta d'un model geomètric que serveix per fer una demostració visual de la identitat notable en qüestió: $(a + b) \cdot (a - b)$.

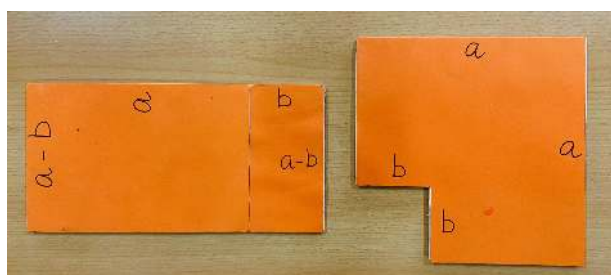
En primer lloc, superposarem les dues figures i veurem que coincideixen i, per tant, que tenen la mateixa àrea.



Font: elaboració pròpia.

Després farem dues lectures d'aquesta àrea:

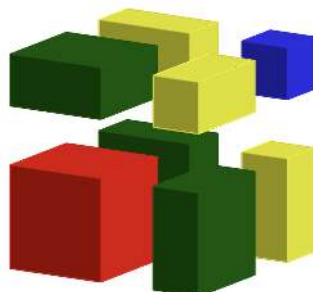
- L'àrea de la figura de la dreta de la fotografia, naturalment, és l'àrea del quadrat gran menys la del quadrat petit: $a^2 - b^2$.
- Pel que fa a la figura de l'esquerra, podem reordenar-ne les peces fent coincidir els costats $a - b$ dels dos rectangles. Quedarà un rectangle els costats del qual valdran $a - b$ i $a + b$. Per tant, la seva àrea serà $(a + b) \cdot (a - b)$.



Font: elaboració pròpia.

La coincidència de les dues àrees demostra la identitat.

Els programes de geometria dinàmica també poden ser de gran ajuda per visualitzar identitats com les anteriors o d'altres. Tot seguit, podem veure una animació de Manel Martínez feta amb GeoGebra en què es visualitza el [Cub d'un binomi](#). Sobren les paraules:

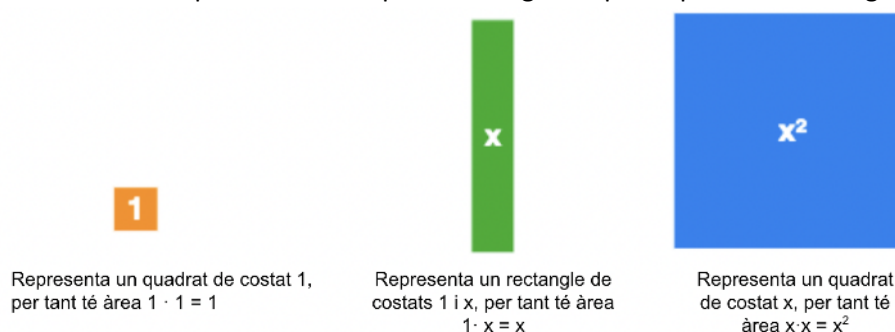


Font: [Cub d'un binomi](#), de Manel Martínez.

Saber #3.ESP.VM.A

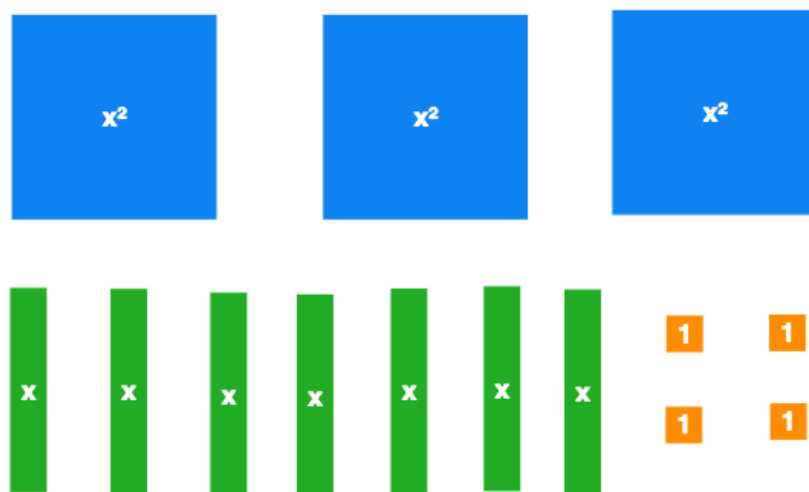
Per treballar també el **saber #3.ESP.VM.A**, hi ha l'activitat Models rectangulars i àlgebra, on es veu com factoritzar expressions algebraiques de segon grau a partir de representacions rectangulars del producte. Ho farem, per exemple, amb el [Polypad](#) de Mathigon.

En primer lloc, acordem com representar les expressions algebraiques a partir de rectangles i quadrats base:



Font: elaboració pròpia.

Així, l'expressió $3x^2 + 7x + 4$ estarà formada per tres peces quadrades grans (blaves), set peces rectangulars (verdes) i quatre peces quadrades d'una unitat (taronges):



Font: elaboració pròpia.

Ara, es tracta de disposar totes les peces en forma de rectangle i veure quant val la base i l'altura d'aquest rectangle, que seran els factors buscats:

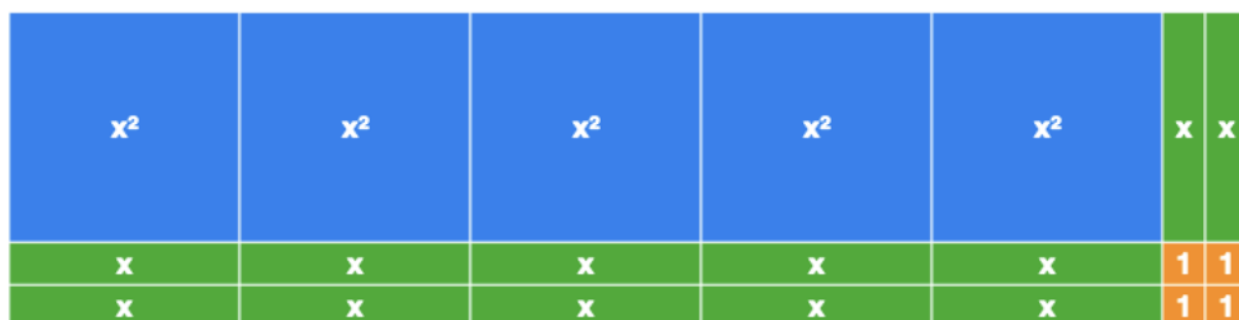
$$3x^2 + 7x + 4 = (3x + 4) \cdot (x + 1)$$



Font: elaboració pròpia.

Tot seguit, se'n pot veure un altre exemple:

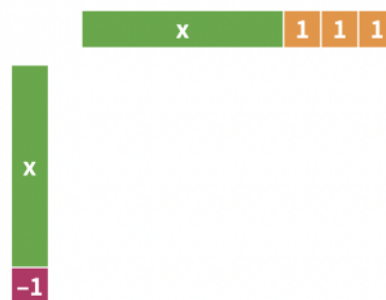
$$5x^2 + 12x + 4 = (5x + 2) \cdot (x + 2)$$



Font: elaboració pròpia.

Amb la mateixa idea, podem treballar el producte de binomis. Imaginem que volem fer el producte $(x + 3)(x - 1)$. Disposem les peces de la manera següent, la idea és formar el rectangle:

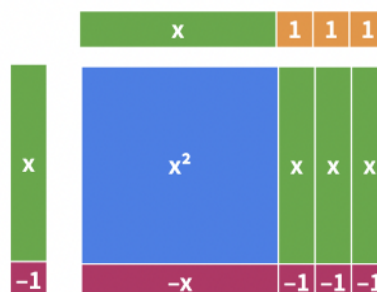
$$(x + 3)(x - 1) =$$



Font: elaboració pròpia.

Ara toca omplir el rectangle:

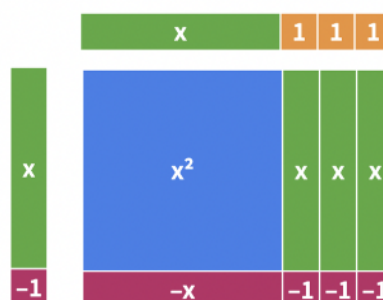
$$(x + 3)(x - 1) =$$



Font: elaboració pròpia.

Finalment, comptem quantes peces de cada ens queden i ja tenim el resultat:

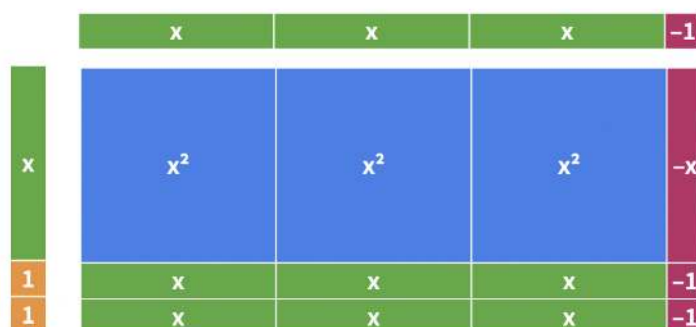
$$(x + 3)(x - 1) = x^2 + 2x - 3$$



Font: elaboració pròpia.

Tot seguit, podem veure'n un altre exemple:

$$(3x - 1)(x + 2) = 3x^2 + 5x - 2$$



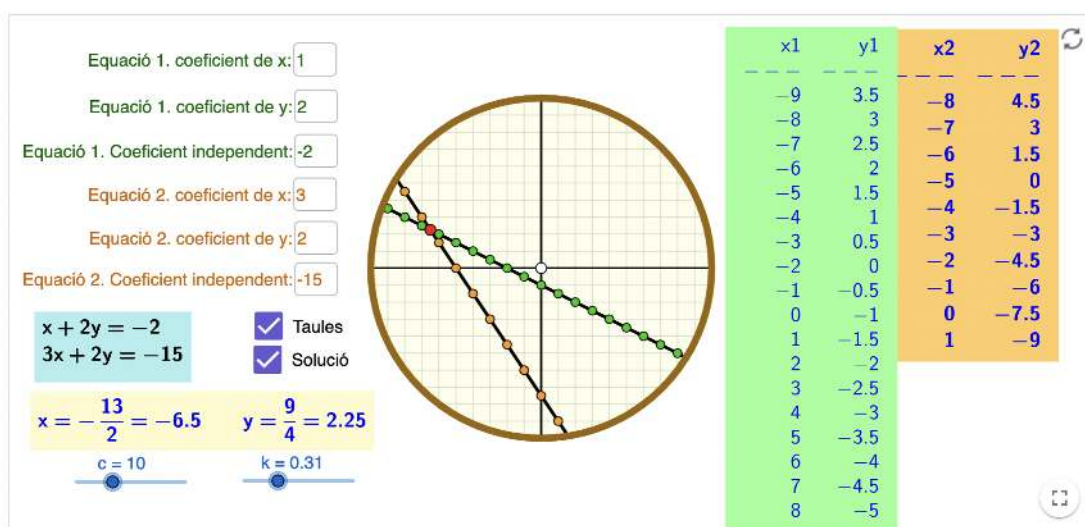
Font: elaboració pròpia.

Al blog [Banc de recursos del Fem Matemàtiques](#) hi ha una entrada molt interessant en què es desenvolupa la idea de puzzle multiplicatiu des de primària fins al pas a l'ESO. S'hi argumenta que el model de representació basat en àrees ens serveix per a la comprensió geomètrica de la multiplicació de binomis a secundària i se'ns donen múltiples formes de treballar-ho a classe. Es tracta d'una lectura altament recomanable.

A part del Mathigon, hi ha altres miniaplicacions que funcionen amb la mateixa idea, per exemple les d'[aquest enllaç](#), o materials físics com ara l'[Algemat](#) que, a més, permet treballar amb termes cúbics.

Saber #3.ESP.VM.B

Treballant el **saber #3.ESP.VM.B** s'estableixen fortes connexions entre el sentit algebraic i l'espacial. Tallar significarà igualar, i les representacions gràfiques en eixos cartesianes ajudaran a donar significat a molts càlculs algebraics. Podem trobar nombroses construccions fetes amb programes de geometria dinàmica molt útils per treballar aquests sabers. Per exemple, tenim el recurs fet amb GeoGebra [Sistemes lineals 2 x 2](#) de Ramon Nolla.



Font: [Sistemes lineals 2 x 2](#), de Ramon Nolla.

Es presenten sistemes d'equacions lineals 2 x 2, amb la solució numèrica i gràfica. L'alumnat pot canviar els coeficients de les equacions i visualitzar o amagar les taules de valors de cada equació. La proposta que es planteja per a l'alumnat és:

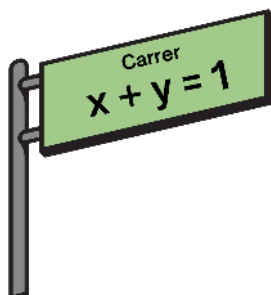
- Desactiveu les caselles de control «taules» i «solució».
- Proposeu un sistema mitjançant la introducció de coeficients que vulgueu.
- Resoleu el sistema en un full de treball a part, al·gèbricament i gràficament.
- Comproveu la solució obtinguda activant les caselles que heu desactivat al principi.

Una possibilitat per ampliar aquest recurs seria treballar els diferents tipus de sistemes i la seva interpretació geomètrica. Es podria fer, per exemple, plantejant les qüestions següents:

- Escull els coeficients i terme independent que tu vulguis per a l'equació 1. A l'equació 2, posa com a coeficients i terme independent el doble dels de l'equació 1. Què hi observes? Si en lloc del doble, agafes el triple, què hi observes? I si agafes la meitat, què hi observes?
- Escull els coeficients i terme independent que tu vulguis per a l'equació 1. A l'equació 2, posa com a coeficients el doble dels de l'equació 1, i com a terme independent algun nombre que no sigui el doble. Què hi observes? En lloc del doble, prova-ho amb el triple i la meitat. Què hi observes?
- Escull els coeficients de forma que els de l'equació 1 i els de l'equació 2 no siguin proporcionals. Canvia els valors un parell de vegades. Què hi observes?
- A quines conclusions pots arribar?

Saber #3.ESP.VM.B

Per treballar el **saber #3.ESP.VM.B**, també podem plantejar l'activitat «[Perduts a Matelàndia](#)». Aquesta activitat també es pot consultar als materials del sentit algebràic, quan es treballa el **saber #3.ALG.MM.B**. Es tracta d'una adaptació de l'activitat de l'NCTM «Lost in Mathland». La versió «Perduts a Matelàndia» és més senzilla que l'original, i només engloba el treball de sistemes d'equacions lineals amb dues incògnites (l'original treballa equacions de primer, segon i tercer grau i està destinada a l'alumnat de 4t d'ESO i batxillerat).



Font: elaboració pròpia.

L'activitat planteja la següent situació. Matelàndia és un poble situat sobre un pla de coordenades cartesianes els carrers i carreteres del qual són els gràfics d'equacions lineals. Tres amics, la Carme, el Francesc i la Núria, van a Matelàndia a passar el dia, però s'acaben perdent i separant tots tres. Al cap d'una estona de caminar i veure que no es troben, s'escriuen pel grup de mòbil i aquesta és la conversa que tenen:

- Carme: Mireu el nom del carrer on sou. Jo soc al carrer $x + y = 1$.
- Francesc: D'acord, jo em trobo al carrer $2x + y = 2$.
- Núria: I jo al carrer $-x + 4y = 3$.
- Carme: D'acord, com que em conec molt bé el poble, crec que ja sé com trobar-nos. Núria, tu no et moguis del lloc on ets. Francesc, tu i jo hem de caminar pel carrer on som ara mateix direcció la plaça Major (és a l'origen de coordenades) fins que ens trobem. Si arribes abans que jo a l'encreuament dels nostres carrers, espera'm. Un cop ens hàgim trobat, només haurem d'agafar el carrer $-x + 2y = -1$ i trobarem la Núria.

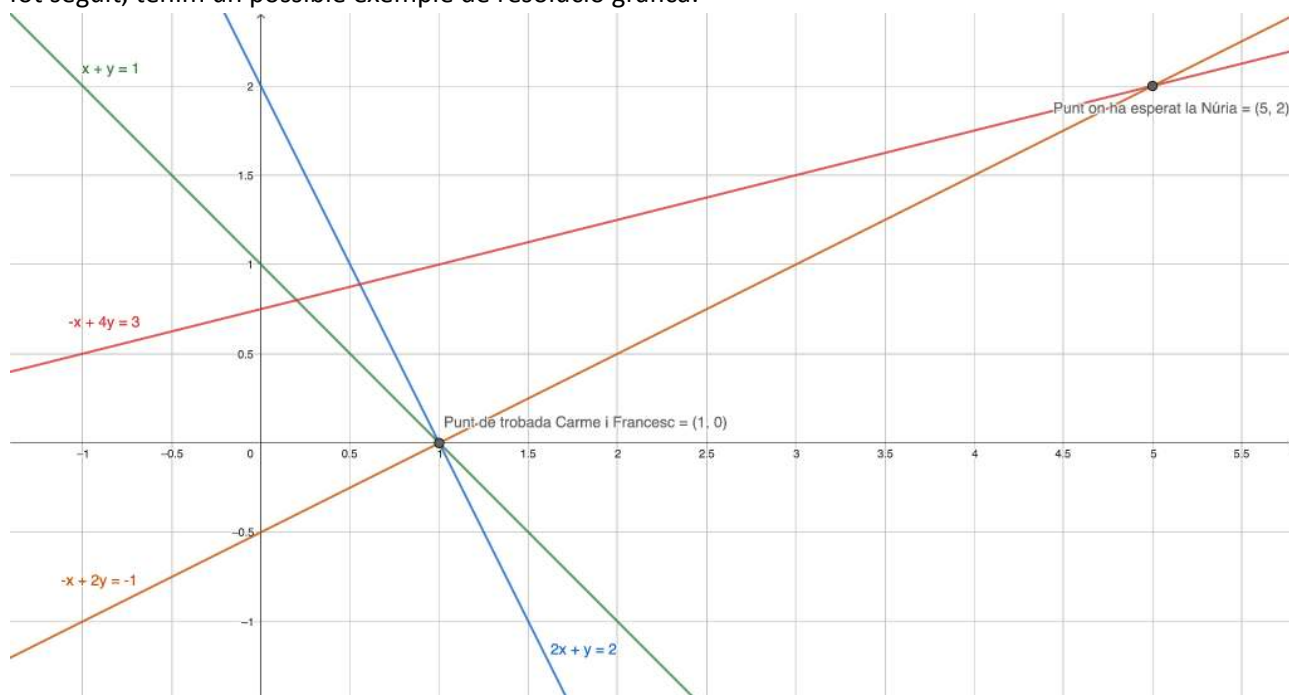
I, seguint les instruccions de la Carme, els tres amics es van poder trobar.

L'alumnat, un cop ha llegit bé la situació plantejada, ha de respondre aquestes preguntes:

- En quines coordenades es troben la Carme i el Francesc?
- En quines coordenades ha estat esperant els seus amics, la Núria?
- Obre el programa de geometria dinàmica, fes un esquema de la situació i indica'n la solució.

És important demanar a l'alumnat que justifiqui i raoni tot el procediment i els passos que fa per trobar les respostes.

Tot seguit, tenim un possible exemple de resolució gràfica:



Font: elaboració pròpia.

Com a ampliació, o si es vol passar l'activitat a 4t d'ESO, es pot incloure algun apartat en què sigui l'alumnat qui trobi l'equació d'una recta, donades les coordenades de dos punts, o inclús l'equació d'una paràbola donats tres punts.

Saber #3.ESP.VM.C

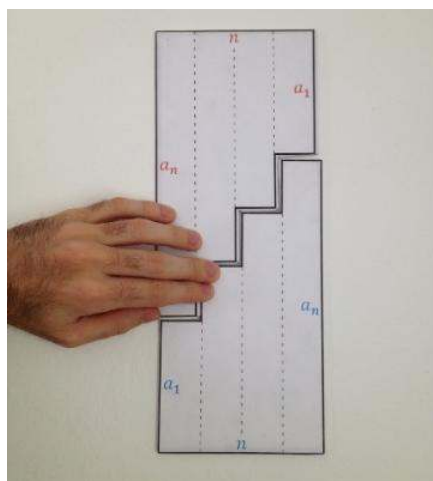
Per treballar el **saber #3.ESP.VM.C**, el material manipulable ens pot ser de molta ajuda. Per exemple, amb cubets encaixables és fàcil veure que la suma de dos nombres triangulars consecutius és un nombre quadrat, tal com es pot veure al [vídeo](#) següent del CREAMAT.

També podem observar que, si multipliquem per 8 un nombre triangular i sumem 1, obtenim sempre un nombre quadrat. En el [vídeo](#) següent es pot veure aquesta propietat quan el nombre triangular és el 3.

Al blog PuntMat hi ha diverses entrades sobre els nombres amb forma. Una d'aquestes permet veure que [la suma dels primers nombres parells és un nombre oblong](#). Una altra entrada treballa que [la suma dels primers nombres quadrats són piramidals](#). També en trobem una per veure que [la suma dels primers nombres triangulars són tetraèdrics](#) i que [algunes sumes de nombres senars consecutius són nombres cúbics](#).

Saber #3.ESP.VM.C

Per treballar el **saber #3.ESP.VM.C**, també tenim el recurs a l'ARC de Pepe Ródenas que porta per títol [Escala per sumar progressions](#). El recurs ofereix una demostració visual de la fórmula de la suma dels n primers termes d'una progressió aritmètica.

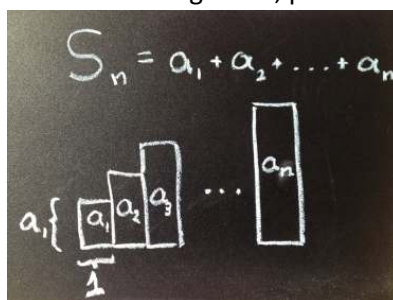


Font: [Escala per sumar progressions](#), de Pepe Ródenas.

La demostració es podria inserir en una seqüència com la següent. En primer lloc, s'explica l'anècdota de Gauss sumant els 100 primers nombres naturals (va adonar-se que hi havia cinquanta parelles que sumaven el mateix: $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, $3 + 98 = 101 \dots$). Tot seguit, es proposen a l'alumnat alguns càlculs que hauran d'intentar fer adaptant-hi el mètode de Gauss: sumar els naturals de 41 a 80, sumar els 30 primers senars, calcular una despesa anual si cada mes gastem 10 € més que l'anterior, etc. I un cop fetes i corregides les darreres activitats, s'explica que demostrarem una fórmula general per resoldre aquest tipus de problemes, i es fa la demostració amb les escales de cartró.

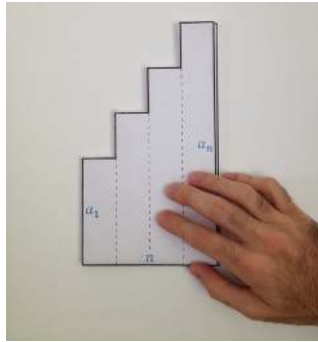
Una possible seqüència per fer l'explicació a classe podria ser la següent:

- Plantegem el problema de sumar els n primers termes d'una progressió aritmètica de primer terme a_1 i diferència d .
- Formalment, a la pissarra queda escrita aquesta suma amb l'expressió $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.
- Dibuixem, a sota de la darrera equació, un rectangle de base unitat i altura a_1 . Raonem que l'àrea d'aquest rectangle val també a_1 .
- En dibuixem un altre al seu costat, de base unitat i altura $a_2 = a_1 + d$, és a dir: com si haguéssim pujat un esglaó la mida del qual fos d . Raonem que l'àrea del nou rectangle val a_2 .
- Completem així una figura com la de la imatge següent, amb forma d'escala i n esglaons, i raonem que, com que l'àrea de cadascun dels rectangles que la forma es correspon amb un terme de la suma que volem fer, aleshores l'àrea total de la figura és, precisament, S_n .



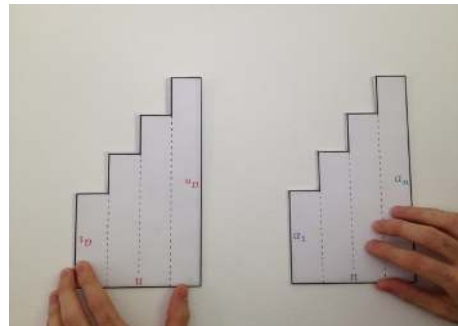
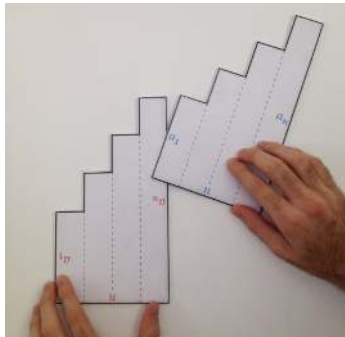
Font: [Escala per sumar progressions](#), de Pepe Ródenas.

- Preguntem si algú sap calcular l'àrea d'aquesta figura i, arribats en aquest punt, podem recordar que això mateix és el que Gauss va fer per sumar els naturals.
- Diem que la tècnica es basa a multiplicar i dividir per dos l'àrea de la figura, la qual cosa és «com no fer-hi res», però ens ajudarà a veure-ho tot més clar. En aquest moment agafem les dues escales de cartró, que estaven sobre la taula, i les mostrem als alumnes tot amagant la vermella darrere de la blava.



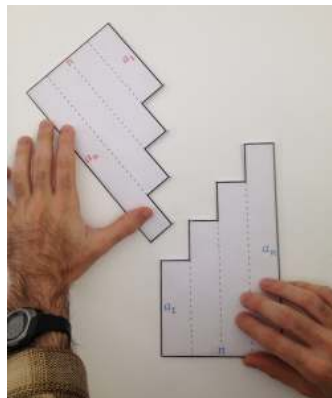
Font: [Escala per sumar progressions](#), de Pepe Ródenas.

- Portem a la paret les escales i, teatralment, fem relliscar la blava per sobre de la vermella, que apareix per primer cop a la vista, mentre diem: «Haviem dit que multiplicariem per dos l'àrea, oi? D'acord: ja l'hem multiplicada per dos!».



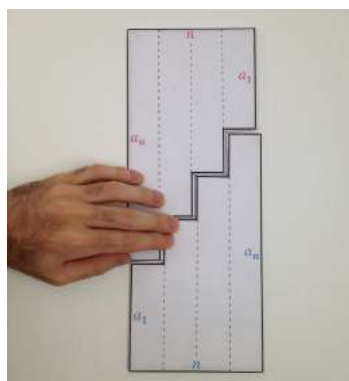
Font: [Escala per sumar progressions](#), de Pepe Ródenas.

- Expliquem que ara ja estem en condicions de fer el truc que ens permetrà veure clarament com es calculen les àrees, i consisteix a «ficar-li per barret» l'escala vermella a l'escala blava.



Font: [Escala per sumar progressions](#), de Pepe Ródenas.

- Tornem a preguntar si algú sap calcular l'àrea de la figura resultant, que és un senzill rectangle: base per altura. És molt important que siguin ells els qui diguin per primer cop el valor de l'àrea del rectangle, $n \cdot (a_1 + a_n)$.

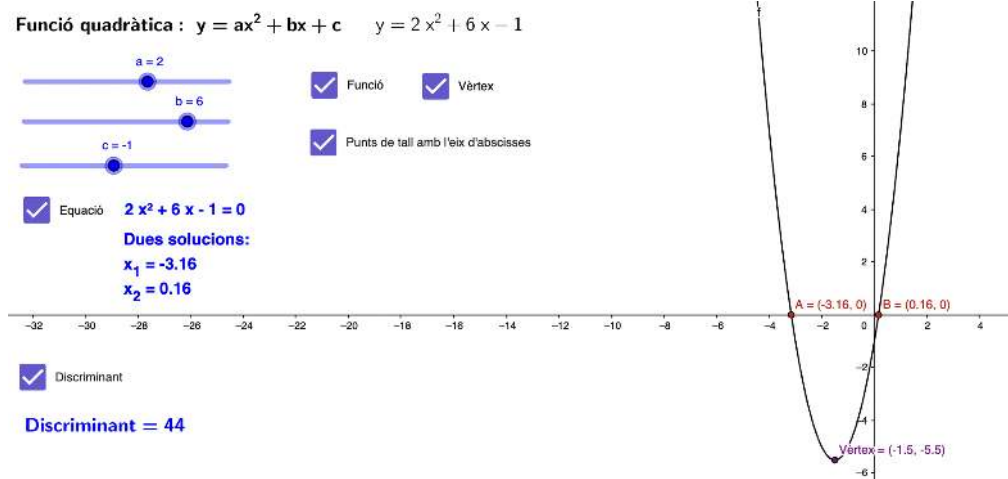


Font: [Escala per sumar progressions](#), de Pepe Ródenas.

- Acabem recordant-los, però, que nosaltres havíem dit que la suma que necessitàvem calcular, S_n , només era igual a l'àrea d'una de les dues escales i, per tant, hem de dividir entre dos.

Saber #3.ESP.VM.D

Amb la idea que les representacions gràfiques en eixos cartesianes ajuden a donar significat als càlculs algebraics, per treballar el **saber #3.ESP.VM.D** trobem molts recursos al GeoGebra ja preparats per portar a classe. Per exemple, l'activitat Funció quadràtica que es pot consultar a l'[enllaç](#) següent.



Font: Funció quadràtica, de Núria Serra.

Podem proposar a l'alumnat aquestes accions:

- Varia el coeficient del terme quadràtic. Quines diferències observes en funció de si és positiu o és negatiu?
- Varia el coeficient del terme de primer grau i observa. Quins canvis es produeixen al gràfic?
- Varia el terme independent. Quins canvis observes al gràfic?
- Observa també la relació que hi ha entre el discriminant i el nombre de solucions de l'equació de segon grau associada a la funció. A quines conclusions arribes?

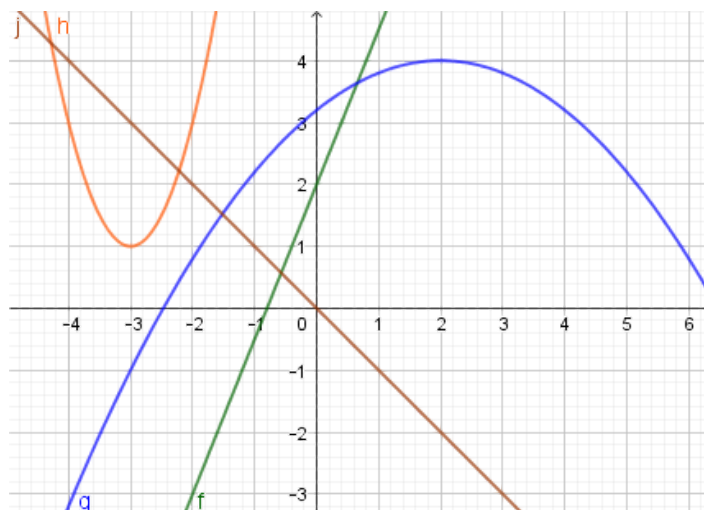
Saber #3.ESP.VM.D

Per treballar el **saber #3.ESP.VM.D**, en concret la paràbola, un altre recurs és [Funcions de primer i segon grau](#), de Josep Lluís Cañadilla. L'activitat comença introduint com és una funció de primer grau, quina forma té l'equació i de quins paràmetres depèn. Després proposa que l'alumnat experimenti i, movent punts lliscants, esbrini com els paràmetres determinen la forma de la gràfica. També posa èmfasi en els punts de tall amb els eixos de coordenades i el creixement i decreixement de la funció.

De forma similar, s'aborda la funció de segon grau, posant èmfasi també en el vèrtex i l'obertura de la paràbola.

Per acabar, es donen unes quantes gràfiques i es demana trobar les equacions corresponents.

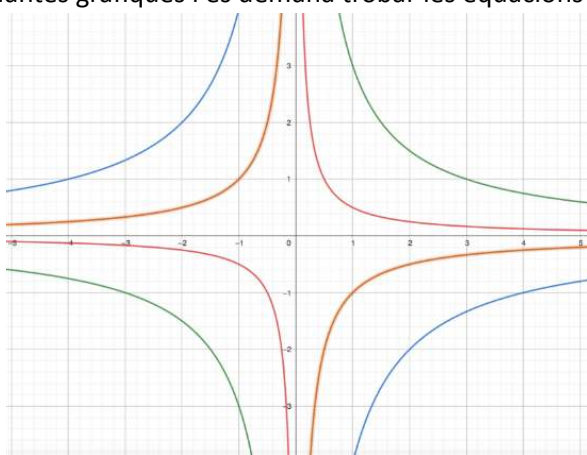
El que fa interessant aquesta proposta és que és l'alumnat qui va creant el full de treball des de zero, seguint les instruccions.



Font: [Funcions de primer i segon grau](#), de Josep Lluís Cañadilla.

Saber #3.ESP.VM.D

Per treballar el **saber #3.ESP.VM.D**, en concret la hipèrbola, hi ha moltes propostes amb GeoGebra, de forma similar a com passa amb la paràbola. Una d'aquestes propostes és [Funcions de proporcionalitat inversa](#), de Núria Serra. L'activitat comença introduint com és una funció de proporcionalitat inversa, quina forma té l'equació i de quin paràmetre depèn. Després proposa que l'alumnat experimenti i, movent un punt lliscant, esbrini com el paràmetre determina la forma de la gràfica. També posa èmfasi en els punts de tall amb els eixos de coordenades, el creixement i decreixement de la funció i la simetria. Per acabar, es donen unes quantes gràfiques i es demana trobar les equacions corresponents.



Font: [Funcions de proporcionalitat inversa](#), de Núria Serra.

Saber #3.ESP.VM.E

Per treballar el **saber #3.ESP.VM.E**, reconeixement de connexions entre el sentit espacial, la resta de sentits i altres àrees de coneixement properes a l'alumnat, el professorat ha de plantejar situacions i activitats en què aquest reconeixement sigui possible. A través del coneixement espacial es pot descriure i interpretar el món on vivim.

El treball del sentit espacial a 3r d'ESO ens obre les portes per poder connectar les matemàtiques amb altres matèries i disciplines de formes molt diverses. L'estudi de moviments al pla ens pot ser molt útil per relacionar les matemàtiques amb l'art i per plantejar projectes en què la creativitat de l'alumnat sigui un pilar fonamental. Però no només trobem aplicacions al món del disseny i l'art: també són importants, per

exemple, en robòtica, si s'han de programar recorreguts al pla. A la natura, la simetria també hi és molt present, cosa que permet establir fortes connexions amb el sentit espacial.

D'altra banda, el treball algebraic que es duu a terme a 3r (equacions de primer i segon grau, sistemes d'equacions, i funcions afins, de segon grau i de proporcionalitat inversa) ens proporciona contextos en què podem establir connexions interessants amb el sentit algebraic. Tal com es mostra als recursos anteriors, podem «geometritzar» l'àlgebra fent «demostracions» visuals de fórmules i donant sentit geomètric a càlculs algebraics o propietats numèriques.

La connexió amb el sentit de la mesura segueix sent forta, igual que en els cursos anteriors. Podem generar activitats interessants sobre càlculs de superfícies o de perímetres quan fem activitats sobre mosaics i recobriments.

Blocs de competències: processos matemàtics i gestió socioemocional

El conjunt de sabers que constitueixen el sentit espacial, com tots els altres sentits, s'ha de relacionar amb el conjunt de competències del currículum. Sense un coneixement dels sabers, difícilment es poden desenvolupar els processos per avançar en l'assoliment de les competències i, d'altra banda, la manera com s'introdueixen, es construeixen i s'utilitzen els sabers és clau per dur a terme un treball competencial.

Així doncs, tots els sabers poden contribuir a desenvolupar qualsevol competència si es treballen en activitats adequades, i un mateix saber pot ajudar a desenvolupar diverses competències.

Es presenta la relació entre els sentits i les competències específiques a través dels processos: resolució de problemes (competències específiques CE 1 i CE 2); raonament i prova (competències específiques CE 3 i CE 4); connexions, en què distingim les internes (competència específica CE 5) i les externes (competència específica CE 6); comunicació i representació (competència específica CE 7), i gestió socioemocional (competències específiques CE 8 i CE 9).

Aquesta relació, pel que fa al sentit espacial, es concreta, en el marc d'aquest exemple, de la manera que es descriu en els apartats següents, tot i que hi pot haver altres anàlisis igualment vàlides.

Resolució de problemes (CE 1 i CE 2)

El treball dels sabers del sentit espacial a 3r d'ESO propicia la investigació dibuixant, visualitzant, transformant, comparant i classificant objectes matemàtics.

Sabers

A tall d'exemple, entre els sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar la resolució de problemes trobem, entre altres coses, que:

- En el context d'un problema poden aparèixer sabers com ara equacions o sistemes d'equacions, i serà útil conèixer les representacions gràfiques en eixos cartesianes (**saber #3.ESP.VM.B**) per trobar-ne la solució.
- De la mateixa manera, la visualització geomètrica de nombres figurats (**saber #3.ESP.VM.C**) pot ajudar a trobar una expressió algebraica del terme general en una situació més àmplia.

Recursos

Molts dels recursos que s'han esmentat per treballar diferents sabers requereixen l'ús d'estratègies de

resolució de problemes. Per exemple:

- A la proposta per treballar el **saber #3.ESP.VM.B** que consisteix a trobar el punt del mapa de Matelàndia on es trobaran els tres amics, «Perduts a Matelàndia», una possible via de resolució és usar el model matemàtic dels sistemes d'equacions per trobar els punts de tall. Però els camins per arribar a la solució poden ser diversos, i és bo deixar que l'alumnat proposi i argumenti els seus.
- A l'hora de buscar tots els recobriments del pla en l'activitat Tessel·lem? proposada com a exemple per treballar el **saber #3.ESP.MT.B**, ens calen estratègies de pensament exhaustiu i, associat a aquestes, el fet de ser sistemàtics i perseverants en la recerca.
- La factorització de polinomis de segon grau utilitzant peces algebraïques «Models rectangulars i àlgebra» proposada per treballar el **saber #3.ESP.VM.A** també requereix utilitzar estratègies per aconseguir posar totes les peces formant un rectangle, més enllà de l'assaig i millora.

Raonament i prova (CE 3 i CE 4)

El raonament matemàtic es pot treballar amb profunditat en contextos geomètrics. La introducció de nous sabers es pot proposar a partir de materials manipulatius o d'imatges que s'hagin d'analitzar per trobar semblances i diferències, de manera que se'n pugui fer una classificació i determinar-ne i argumentar-ne les propietats. Per altra banda, l'ús de programari de geometria dinàmica o altres contribueixen a l'assoliment de la competència específica CE 4.

Sabers

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar el raonament són, entre d'altres:

- El **saber #3.ESP.MT.A**, que implica la comprensió i l'estudi del concepte de gir, translació i simetria i l'estudi dels elements que defineixen cada un dels moviments. Aquest estudi de les característiques que els defineixen requereix una argumentació a partir de conjetures que s'han de comprovar i validar.
- El **saber #3.ESP.MT.B**, l'estudi dels recobriments en el pla, que requereix fer conjetures sobre la propietat de les figures de tessellar o no un pla a partir de les seves característiques. Això contribueix al desenvolupament de la CE 3.
- El **saber #3.ESP.MT.C**, en particular l'ús de programes de geometria dinàmica, que afavoreix especialment l'assoliment de la CE 4.
- Pel que fa al **saber #3.ESP.VM.C**, la recerca de patrons senzills permet desenvolupar la capacitat de raonament lògic i d'argumentació (CE 3). Per altra banda, la mateixa recerca de patrons contribueix a l'assoliment de la CE 4.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers fan referència directa al procés de raonament i prova. Per exemple:

- La seqüència d'activitats Transformacions en el pla que es proposa com a recurs general per treballar tot el bloc Moviments i transformacions és d'exploració i construcció i, per tant, contribueix al desenvolupament de la competència específica CE 3. A més, tota la seqüència es proposa a partir del programa de geometria dinàmica GeoGebra, per la qual cosa afavoreix l'assoliment de la competència específica CE 4.
- La cerca i classificació dels diferents tipus de sanefes o mosaics que es proposen en les activitats Frisant pels frisos i Tessel·lem?, recursos per treballar els **sabers #3.ESP.MT.A i #3.ESP.MT.B**, requereixen un treball sistemàtic i l'organització i classificació de les descobertes, per la qual cosa

- promouen el desenvolupament de la competència específica CE 4.
- De la mateixa manera, totes les activitats que es basen en l'ús de geometria dinàmica o bé l'incorporen en alguna part de la tasca, com ara les de l'ARC per treballar les isometries que es proposen amb els **sabers #3.ESP.MT.A i #3.ESP.MT.C** (Els logotips i els moviments en el pla i Girs amb GeoGebra), ajuden a desenvolupar la CE 4.
 - Les demostracions visuals proposades a Model geomètric per al desenvolupament del quadrat de la suma, Model geomètric per al desenvolupament d' $(a + b) \cdot (a - b)$ i Cub d'un binomi (**saber #3.ESP.VM.A**) ajuden a visualitzar allò que representen, a donar sentit a les fórmules i a argumentar, així que afavoreixen el desenvolupament de la competència específica CE 3.

Connexions amb altres parts de la matemàtica (CE 5)

Les connexions internes més fortes del sentit espacial als cursos de 1r i 2n d'ESO són amb els sentits numèric i de la mesura. En canvi, el curs de 3r d'ESO té un fort component algebraic amb la introducció de nous tipus d'equacions, inequacions i sistemes d'equacions lineals, així com nous tipus de funcions (quadràtica i proporcionalitat inversa). El sentit espacial es nodreix de tots aquests sabers, alhora que el sentit algebraic es veu fortament enriquit amb la visualització geomètrica. La geometria ens ajuda a donar sentit a tots aquests objectes abstractes de manera que siguin més comprensibles per a l'alumnat, i això fa que a 3r d'ESO les connexions més fortes del sentit espacial siguin amb el sentit algebraic, especialment en el bloc de visualització i modelització.

Tal com diu Anton Aubanell a les [Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria](#):

«Un tractament més geomètric dels continguts algebraics no tan sols dona més presència a la geometria sinó que, sobretot, dona més sentit als processos de manipulació simbòlica.» (Aubanell, 2015, pàg. 68)

Sabers

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit poden ajudar a reforçar les connexions internes. Així, trobem, entre altres observacions, que:

- El **saber #3.ESP.MT.A** connecta de forma directa amb la geometria analítica i el seu treball pot contribuir a desenvolupar la competència específica CE 5.
- El bloc Visualització i modelització geomètrica ajuda a l'estudi i l'aprenentatge de les equacions (**sabers #3.ESP.VM.A i #3.ESP.VM.B**), a la cerca de patrons (**#3.ESP.VM.C**) i a l'estudi de funcions (**#3.ESP.VM.D**) i, per tant, treballant-los es contribueix a l'assoliment de la CE 5.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers aporten o utilitzen connexions internes. Per exemple:

- Els models geomètrics per al desenvolupament de les identitats notables o el cub d'un binomi que podem trobar per treballar els **sabers #3.ESP.VM.A i #3.ESP.VM.E** són un exemple de connexió entre el sentit espacial i l'algebraic.
- El recurs Perduts a Matelàndia proposat per treballar el **saber #ESP.VM.B** és també una clara connexió entre el sentit espacial i l'algebraic.
- Altres exemples són els vídeos sobre nombres triangulars (**saber #ESP.VM.C**) i els altres recursos proposats per treballar els nombres amb forma, així com l'activitat Escala per sumar progressions (**saber #3.ESP.VM.C**). A més de treballar els patrons (i, per tant, el sentit algebraic) tenim connexions amb la numeració.

- L'ús de programes de geometria dinàmica com ara GeoGebra en activitats com Funcions de primer i segon grau (**saber #3.ESP.VM.D**), Funcions de proporcionalitat inversa (**saber #3.ESP.VM.D**) o també en la creació de les peces de Mosaics de Penrose amb peces magnètiques (**saber #3.ESP.MT.B**) afavoreixen el pensament computacional, també inclòs en el sentit algebraic.

Connexions amb altres matèries i amb l'entorn (CE 6)

Les connexions més fortes amb l'entorn del sentit espacial de 3r d'ESO les trobem al bloc Moviments i transformacions, donat el vessant artístic d'aquest bloc de sabers. El bloc Visualització i modelització geomètrica, en tant que dona eines per modelitzar situacions, ens proporciona una connexió amb altres àrees de coneixement, com ara la física.

Sabers

A tall d'exemple, esmentem alguns sabers d'aquest sentit que, entre altres, poden ajudar a reforçar les connexions externes:

- El **saber #3.ESP.MT.A**, comprensió i estudi del concepte de gir, translació i simetria i estudi dels elements que defineixen cadascun dels moviments, ens ofereix la possibilitat de descobrir aquests sabers matemàtics en el nostre entorn: la publicitat, la natura o l'art estan plens d'oportunitats per treballar-los.
- El **saber #3.ESP.MT.B**, estudi dels recobriments del pla. Podem trobar frisos i mosaics en molts entorns, tant quotidians (els diferents motius dels enrajolats urbans i de les cases) com en monuments artístics com ara l'Alhambra de Granada.

Cal destacar especialment el **saber #3.ESP.VM.E**, reconeixement de connexions entre el sentit espacial, la resta de sentits i altres àrees de coneixement properes a l'alumnat, que té com a objectiu que aquestes connexions es facin explícites per a l'alumnat i aquest esdevingui capaç de reconèixer-les.

Recursos

Molts dels recursos descrits per treballar diferents sabers del sentit espacial ofereixen oportunitats per fer connexions externes. Per exemple:

- Tots els recursos relacionats amb les creacions artístiques de frisos, com l'activitat Frisant pels frisos que es proposa per treballar el **saber #3.ESP.MT.A**, o de mosaics, com Tessel·lem? o Mosaics dibuixant (tots dos recursos proposats per treballar els **sabers #3.ESP.MT.B** i **#3.ESP.MT.C**) incideixen especialment en el desenvolupament de la competència específica CE 6.
- També connecta fortament amb l'entorn la cerca de simetries, girs i translacions en els logotips comercials que es proposa al recurs Els logotips i els moviments en el pla (**sabers #3.ESP.MT.A** i **#3.ESP.MT.C**).

Comunicació i representació (CE 7)

El bloc Moviments i transformacions requereix una manera de comunicar i representar les diferents possibilitats de recobriments del pla en funció dels moviments que les deixen invariants. Per altra banda, tots els sabers del bloc Visualització i modelització són pròpiament maneres de representar de manera geomètrica objectes i propietats matemàtiques.

Sabers

A tall d'exemple, hi ha alguns sabers d'aquest sentit que, entre altres, poden ajudar a reforçar la comunicació i la representació:

- El **saber #ESP.MT.A** consisteix a estudiar els girs, les translacions i les simetries. Per dur-lo a terme d'una manera exhaustiva i completa, caldrà representar els diferents tipus de moviments de manera gràfica o cercar una manera de codificar-los per descriure les característiques de cadascun.
- El **saber #ESP.MT.B**, l'estudi dels recobriments del pla, requereix també una forma de representació que pot ser gràfica o analítica, en funció del nivell i de les eines de les quals disposi l'alumnat.

En tots dos casos, la comunicació de les idees matemàtiques que hi ha darrere dels conceptes requereix un vocabulari específic i acurat.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar sabers del sentit espacial a 3r d'ESO fan referència al procés de comunicació i representació. Per exemple:

- La representació visual de la unitat, la incògnita d'una equació de segon grau i el seu quadrat que podem trobar a la proposta Models rectangulars i àlgebra (**saber #3.ESP.VM.A**).
- La representació gràfica d'objectes algebraics com ara els sistemes d'equacions i les seves solucions que es descriuen a l'activitat Sistemes 2 x 2 o les rectes de Perduts a Matelàndia del **saber #3.ESP.VM.B**, o les representacions de les funcions descrites als recursos Funció quadràtica, Funcions de primer i segon grau i Funcions de proporcionalitat inversa del **saber #3.ESP.VM.D**.
- Les representacions amb cubets encaixables de diferents propietats numèriques (Triangulars consecutius i altres) o bé l'Escala per sumar progressions que es descriuen dins del **saber #ESP.VM.C**.

Gestió socioemocional (CE 8 i CE 9)

Tot i que la introducció al llenguatge algebraic ha tingut lloc en els cursos anteriors, la complexitat del pas a l'abstracció requereix posar-hi especial atenció per fer-ho de manera gradual i molt acompanyada, de manera que l'alumnat adquireixi autoconfiança en les seves pròpies possibilitats i disposi d'eines emocionals per enfrontar-se a les noves situacions que se li plantegin. En aquest sentit, l'ús de models que ajudin l'alumne a visualitzar i donar sentit als objectes matemàtics més abstractes i les seves relacions i propietats és una gran eina per treballar la gestió socioemocional.

La gestió socioemocional està vinculada a dues competències específiques:

- CE 8, relacionada amb el desenvolupament d'habilitats personals com les creences, les actituds i les emocions envers les matemàtiques.
- CE 9, centrada en el desenvolupament d'habilitats socials com el treball en equip i la presa de decisions.

A continuació s'indiquen alguns aspectes que, treballats des del sentit espacial, poden contribuir al desenvolupament de les competències CE 8 i CE 9.

Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 8

- Si el plantejament de les activitats proposades s'acompanya d'un ambient de repte, és molt probable que desperti la curiositat i l'interès de l'alumnat i que, per tant, contribueixi a augmentar la perseverança i la resiliència a l'hora de resoldre-les. Això és possible fer-ho en totes les activitats, tant d'aquest sentit com dels altres.
- Les diferents representacions dels objectes i dels processos matemàtics que apareixen al bloc Visualització i modelització (**#ESP.VM**) són una bona eina per ajudar l'alumnat a valorar la importància de les representacions i el llenguatge matemàtic, alhora que ajuden a interpretar i entendre millor el que volen representar.

Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 9

Al llarg de tot el sentit espacial, es proporcionen múltiples oportunitats per treballar en equip, promoure actituds positives, implicació en la presa de decisions i respecte per les aportacions dels altres, i superar qualsevol idea limitant sobre les habilitats pròpies o alienes en matemàtiques. A continuació, es destaquen algunes activitats concretes en aquest àmbit:

- Les activitats que proposen una anàlisi d'objectes per estudiar-ne certes característiques, com ara Els logotips i els moviments en el pla o Tessel·lem?, del bloc **#ESP.MT**, són bones propostes per treballar en petits grups, així com altres propostes de creació de mosaics gegants que es poden fer en el marc de celebracions matemàtiques, que no només promouen les competències socioemocionals de treball en grup sinó que, a més, fomenten un sentiment de pertinença i d'unió en el grup.
- Una altra activitat adequada per treballar en grup és Mosaics de Penrose amb peces magnètiques, descrita al **saber #3.ESP.MT.B**.
- Totes les activitats relacionades amb la manipulació, com ara la factorització de polinomis de segon grau utilitzant rajoles algebraïques (**saber #3.ESP.VM.A**) o la manipulació amb eines digitals com GeoGebra (Sistemes 2 x 2 del **saber #3.ESP.VM.B**, l'estudi de les propietats de les funcions quadràtiques del **saber #3.ESP.VM.D**, etc.) afavoreixen les destreses socioemocionals si es treballen en grup.