

TOR 3r d'ESO: Sentit de la mesura

Consideracions generals.....	1
Blocs de sabers.....	2
Magnitud.....	2
Sabers.....	2
Descripció i orientacions.....	2
Reflexions inicials.....	2
Comentaris sobre les connexions.....	3
Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació.....	3
Recursos i activitats.....	3
Recursos i activitats per treballar sabers concrets.....	3
Mesurament.....	7
Sabers.....	7
Descripció i orientacions.....	7
Reflexions inicials.....	7
Comentaris sobre les connexions.....	7
Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació.....	8
Observacions sobre alguns sabers específics.....	8
Recursos i activitats.....	9
Recursos i activitats generals per al bloc de sabers.....	9
Recursos i activitats per treballar sabers concrets.....	10
Saber #3.MES.ME.A.....	10
saber #3.MES.ME.B.....	11
saber #3.MES.ME.C.....	15
saber #3.MES.ME.D.....	28
saber #3.MES.ME.E.....	38
saber #3.MES.ME.F.....	43
Estimació i relacions.....	46
Sabers.....	46
Descripció i orientacions.....	46
Reflexions inicials.....	46
Comentaris sobre les connexions.....	46
Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació.....	46
Recursos i activitats.....	47
Recursos i activitats per treballar sabers concrets.....	47
saber #3.MES.ER.A.....	47

saber #3.MES.ER.B.....	50
saber #3.MES.ER.C.....	54
Blocs de competències: processos matemàtics i gestió socioemocional.....	58
Resolució de problemes (CE 1 i CE 2).....	58
Sabers.....	58
Recursos.....	59
Raonament i prova (CE 3 i CE 4).....	59
Sabers.....	59
Recursos.....	60
Connexions amb altres parts de la matemàtica (CE 5).....	60
Sabers.....	61
Recursos.....	61
Connexions amb altres matèries i amb l'entorn (CE 6).....	61
Sabers.....	62
Recursos.....	62
Comunicació i representació (CE 7).....	62
Sabers.....	63
Recursos.....	63
Gestió socioemocional (CE 8 i CE 9).....	63
Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 8:.....	64
Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 9:.....	65

Consideracions generals

El conjunt de sabers en el currículum de matemàtiques de secundària està distribuït en dos blocs temporals: un que estableix els cursos de 1r a 3r de la secundària obligatòria, i l'altre només per a 4t. Per tant, hem arribat al final d'aquest primer bloc i pot ser interessant, així com recomanable, fer una lectura pausada com a mínim d'aquells sabers considerats essencials al llarg d'aquests tres cursos, i avaluar en quins aprenentatges cal fer incidència per tal que el nostre alumnat hagi tingut l'oportunitat de fer una construcció robusta de coneixement i desenvolupament de les competències necessàries per poder fer front als estudis de final d'etapa.

Com ja s'ha assenyalat en les propostes de cursos anteriors, les experiències d'aprenentatge que treballen el sentit de la mesura impliquen un conjunt d'accions que faciliten, de manera immediata, la connexió amb la resta de sentits del currículum.

En aquesta línia, cal posar en relleu les paraules de Bishop en el seu llibre *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural* (Bishop, 1999):

La mesura constitueix una de les principals activitats humanes a partir de les quals es desenvolupa la matemàtica. Està present en totes les cultures, atès que permet comparar, ordenar, estimar i calcular, amb més o menys precisió, diferents magnituds.

Els sabers que conformen el sentit de la mesura venen agrupats en tres blocs: magnitud, mesurament i estimació i relacions. Una lectura en l'ordre en què s'han escrit pot donar estructura i una visió completa del que volem treballar amb el nostre alumnat, però en el moment de dur-la a l'aula amb activitats d'experimentació, aquesta seqüenciació no és tan rígida, ja que la interacció entre els sabers de diferents blocs apareix de forma natural.

De la mateixa manera que amb la resta de sentits, volem que la resolució de problemes sigui l'eix vertebrador de l'aprenentatge de les matemàtiques. En aquest curs proposem un treball mitjançant activitats d'experimentació centrades en el volum i la capacitat, sense oblidar les magnituds lineals, angulars i de superfície, aparegudes en cursos anteriors. Serà un bon moment perquè es faci la descoberta de com es relacionen les raons entre les mesures de longitud, àrea i volum en figures semblants, i deduir-ne les constants de proporcionalitat. A més a més, després de la descoberta dels teoremes de Tales i Pitàgores proposada a segon, així com algunes de les seves aplicacions, aquest curs es treballaran en propostes de càlculs de mesures indirectes i en situacions de resolució de problemes fonamentals per a la introducció de la trigonometria en cursos posteriors. Pel que fa a la mesura de la probabilitat i connectant amb els sabers propis del sentit estocàstic, s'analitzaran situacions en què apareguin esdeveniments no equiprobables.

Tal com indica el professor Anton Aubanell (2015, pàg. 72):

[...] són moltes les activitats que es poden fer a classe entorn de la mesura. Serà bo que els alumnes treballin en grups, amb un bon grau d'autonomia i amb un ambient d'intercanvi d'idees, al llarg d'un procés per al qual es pot proposar un cert patró general de possibles accions:

- 1. Conjecturar, fer una estimació de la mesura que es busca. Si pot ser, posar-la en comú argumentant les raons que l'han fonamentada.*
- 2. Establir la unitat de mesura més adequada.*
- 3. Buscar o construir l'eina de mesura i conèixer bé com fer-la servir: cintes mètriques, làsers, goniòmetres, etc. La construcció d'un goniòmetre per part del mateixos alumnes és una proposta molt instructiva.*
- 4. Mesurar tant com calgui amb les millors condicions per garantir la màxima exactitud.*

5. *Prendre consciència de l'existència d'errors en la mesura i de procediments que poden millorar-ne la precisió. Per exemple, fer la mateixa mesura repetidament i fer la mitjana dels resultats.*
6. *A vegades s'estarà fent una mesura indirecta. En aquest cas, la mesura que s'està determinant no és la que s'ha mesurat directament, sinó que ha de ser deduïda per mitjà de procediments geomètrics o trigonomètrics. En aquests casos cal tenir en compte dues coses:*
 - *El domini dels conceptes i les relacions que cal posar en joc. (...)*
 - *La propagació d'errors en el procés de càlcul. Els errors en els mesuraments inicials poden créixer i afectar significativament el resultat final. (...) Sovint, en aquest context, els alumnes tenen tendència a donar el resultat de les operacions realitzades amb moltes xifres decimals, com si més xifres impliquessin més exactitud. És important subratllar el fet que no podem atorgar al resultat final més exactitud que la que tenien les dades de partida i que, potser, encara se n'ha perdut al llarg del procés de càlcul.*
7. *Valorar la plausibilitat de la mesura obtinguda («Té sentit en el context?» «És coherent amb altres dades de què es disposa?») i la seva precisió, i expressar-la adequadament atenent, en especial, a les xifres significatives i a les unitats.*
8. *Si és possible, fer comprovacions comparant el resultat obtingut en el mesurament amb mesures procedents d'altres fonts: si es tracta d'un edifici, preguntant a un veí; si es tracta d'un objecte petit, submergint-lo en aigua i mesurant l'augment de volum; en altres casos, embolicant l'objecte per aproximar-nos a la mesura de la seva àrea o emplenant-lo per al volum.*
9. *Reprendre les conjectures fetes inicialment i valorar el nivell d'aproximació que s'havia assolit.*

Així doncs, es proposa treballar el sentit de la mesura a partir dels processos matemàtics, cinc engranatges ben connectats el principal dels quals és la resolució de problemes que acaba posant en funcionament el raonament i prova, les connexions internes i externes, la representació i comunicació, i la gestió socioemocional. Les propostes han d'implicar els tres blocs de sabers: magnitud, mesurament i estimació i relacions, d'aquesta manera s'anirà desenvolupant el sentit com un tot, i no pas com la suma disjunta d'unes parts. Es definiran i es consolidaran els conceptes quan calgui, procurant no avançar-ne l'aparició. La representació i plantejament de les diferents situacions de mesura directa viscudes, així com la seva resolució, dotaran l'alumne de models que li permetran atacar nous escenaris i apropar-lo al càlcul de mesures indirectes.

Blocs de sabers

Magnitud

Sabers

- A. Ús de factors de conversió que permetin comparar unitats de volum i capacitat, adequades a cada situació. [ESS] #NUM.RP

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

En aquest bloc només hem considerat un saber, on es comparen les unitats de volum i capacitat. L'aparició de situacions en què el context aporta informació rellevant a l'alumnat i, alhora, facilita la seva identificació amb el problema, permet que l'estudiant pugui fer-se una representació mental de diferents unitats de

volum i capacitat que li possibilita, més tard, fer mesuraments, estimacions, comparacions, etc. En aquesta línia, recomanem oferir experiències de mesurament en què es treballin no només amb aquesta magnitud derivada, la capacitat, sinó que reculli aprenentatges assolits en cursos anteriors relacionats amb altres magnituds, per tal d'afavorir la construcció de coneixement.

Comentaris sobre les connexions

En general, quan es concreten activitats que treballen el sentit de la mesura, és difícil que no hi hagi connexió amb el sentit espacial. Tots dos sentits acostumen a aparèixer simultàniament. A més a més, però, justament en el **saber #3.MES.MA.A** també trobarem una connexió amb el raonament proporcional, propi del sentit numèric. La resolució de problemes en diferents situacions i contextos en què aparegui la comparació d'unitats de volum i capacitat, ja sigui mitjançant taules de proporcionalitat o amb factors de conversió, facilitarà la connexió amb **#NUM.RP**.

Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

El fet de considerar un únic saber dins aquest bloc del sentit de la mesura ens porta directament a proposar-lo com a essencial. Alhora, cal tenir present la seva connexió, ja esmentada anteriorment, amb el sentit numèric. Això permet dissenyar propostes relacionades amb aquest saber que afavoreixin un aprenentatge significatiu i ben connectat.

La comparació entre unitats de volum i capacitat, així com la seva adequació segons l'objecte i l'ordre de la magnitud mesurada, serà fonamental per ajudar l'alumnat a establir unitats patró de mesura. Aquestes unitats els permetran fer estimacions i mesuraments en situacions de resolució de problemes.

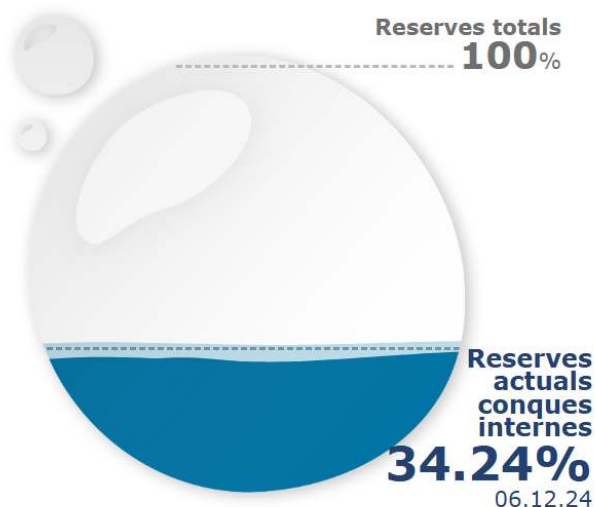
Recursos i activitats

Recursos i activitats per treballar sabers concrets

Per treballar el **saber #3.MES.MA.A** proposem activitats contextualitzades en què calgui comparar unitats de capacitat i volum. Sovint aquesta comparació no serà objecte d'estudi, sinó que formarà part del procés de la mateixa activitat. Si volem que les propostes siguin riques, el més habitual serà que, a part de tenir una forta connexió externa, amb continguts aliens a la matemàtica, es mobilitzin moltes de les competències específiques i es treballin també sabers referents al bloc de mesurament i al de l'estimació.

ELS EMBASSAMENTS A CATALUNYA

La capacitat total dels embassaments de les conques internes a Catalunya és d'uns 700 hm³. I en situació de normalitat, Catalunya consumeix 1 hm³ diari d'aigua.



Font: [Estat de les reserves d'aigua als embassaments](#)
Autoria: Agència Catalana de l'Aigua

En la imatge anterior, obtinguda d'aquest [portal](#) de la Generalitat, tenim representat el percentatge de les reserves d'aigua en data 6 de desembre de 2024. Podem convidar l'alumnat que exposi quines preguntes els suggereix aquesta imatge. Amb la informació que tenim, es pot saber la quantitat d'aigua que hi ha en els embassaments? És molta, poca, suficient? Quina informació necessitem per poder decidir amb criteri la resposta a la pregunta anterior?

Des de les [Dades Obertes de la Generalitat](#) es pot accedir a la quantitat d'aigua als embassaments de les conques internes de Catalunya.

Es poden fer estudis de l'evolució de l'aigua als embassaments durant un any sencer, o fer comparacions fixant el dia i el mes, i observar-ne l'evolució modificant l'any, etc.

Ara bé, què vol dir que diàriament a Catalunya consumim 1 hm^3 d'aigua? Podem imaginar-nos què és 1 hm^3 ?

Per arribar a concebre aquesta quantitat necessitem oferir propostes d'experimentació a l'alumnat que l'ajudin a trobar una unitat patró que li permeti aquesta visualització.

Un exemple interessant el van proposar les professores Laura Morera i Cecilia Calvo en la Jornada d'Educació Matemàtica 2024 de l'associació APMCM, amb la seva conferència [Mesures que deixen empremta: Trajectòries d'aprenentatge a l'educació obligatòria](#). Proposen una activitat de comparació en què, a partir de la conversa entre el grup classe, o en petits grups, caldrà decidir si un seguit d'afirmacions són certes o falses. No es tracta de calcular, sinó de raonar la veracitat d'aquestes sentències a partir de les referències que tenen els mateixos alumnes.

La importància de les referències

	Cert	Fals
En un got hi caben 250 ml.		
En una ampolla de 2 l hi caben uns 8 gots d'aigua.		
1 l equival a 10 ml.		
En una banyera hi caben 2.000 l.		
El mar Mediterrani conté més aigua que l'oceà Atlàntic.		
En una piscina olímpica hi caben 2 milions i mig de litres.		

Font: [Mesures que deixen empremta: Trajectòries d'aprenentatge a l'educació obligatòria](#)

Autores: Laura Morera i Cecília Calvo

Un cop completada la taula, es planteja la següent pregunta: quantes piscines olímpiques plenes d'aigua necessitem per tenir un hectòmetre cúbic?

Seguint amb l'estudi dels embassaments a Catalunya, cal destacar que el dia 8 de març de 2024 es va assolir un mínim històric de 100,09 hm³, equivalent al 14,41 % de la seva capacitat. D'acord amb aquesta dada, podem investigar a partir de quina quantitat es declara l'estat d'excepcionalitat, en quin punt s'activa l'estat d'alerta, quines restriccions de consum s'aproven i què representen aquestes quantitats en termes pràctics.

Sabem quantes piscines hi ha a Catalunya? Enmig d'una situació de sequera per manca de pluges, al febrer de l'any 2024 els diaris publicaven una notícia referent a la quantitat de piscines que hi havia al país. Per exemple, podeu consultar la notícia que publicava el diari *La Vanguardia*, el 18 de febrer de 2024, sota el títol [El país de les 200.000 piscines](#).

Pot ser un exercici interessant considerar les mides d'una piscina mitjana, la seva capacitat, i el consum que representa omplir-les totes.

La connexió entre les matemàtiques i la societat en aquest cas es fa evident. Aprofitant un context actual i proper, com és el canvi climàtic i els períodes de sequera a Catalunya, podem treballar el sentit de la mesura i analitzar quines accions com a col·lectiu ens convenen per tal de cuidar el medi ambient.

AMPOLLES I RECIPIENTS

Una observació de les capacitats d'algunes ampolles de begudes comercials o recipients que contenen líquid pot provocar certes preguntes sobre unitats, conversió entre aquestes, conveniència d'emprar múltiples i submúltiples en funció del context on es troben: llaunes de refresc de 237 ml, ampolles de vi de 750 ml, etc. En alguns casos trobarem una invitació a conèixer les [unitats imperials](#), com ara el galó americà, i com els seus múltiples i submúltiples no són amb potències de 10, com passa amb les unitats del sistema mètric decimal, sinó amb potències de 2.

1 Galó															
$\frac{1}{2}$ Galó								$\frac{1}{2}$ Galó							
1 Quart				1 Quart				1 Quart				1 Quart			
1 Pinta		1 Pinta		1 Pinta		1 Pinta		1 Pinta		1 Pinta		1 Pinta		1 Pinta	
1 tassa	1 tassa	1 tassa	1 tassa	1 tassa	1 tassa	1 tassa	1 tassa	1 tassa	1 tassa	1 tassa	1 tassa	1 tassa	1 tassa	1 tassa	1 tassa
2 gills	2 gills	2 gills	2 gills	2 gills	2 gills	2 gills	2 gills	2 gills	2 gills	2 gills	2 gills	2 gills	2 gills	2 gills	2 gills
8 oz	8 oz	8 oz	8 oz	8 oz	8 oz	8 oz	8 oz	8 oz	8 oz	8 oz	8 oz	8 oz	8 oz	8 oz	8 oz

Font: [Mesures que deixen empremta: Trajectòries d'aprenentatge a l'educació obligatòria](#)

Autores: Laura Morera i Cecília Calvo

Hi ha molts exemples que connecten el sentit espacial i el de la mesura amb el nostre dia a dia, i amb objectes quotidians. Són una oportunitat idònia per treballar la mirada matemàtica del nostre alumnat i evidenciar-la en el quotidià. Tal com assenyala Alsina (2022, pàg. 61):

No deja de ser curioso que en el caso del vino se haya impuesto el tamaño de 75 cl. ¿Por qué no son de 1 litro? El origen parece provenir de Francia, donde se consideró (fijate bien en lo que viene) que 75 cl era ideal para marcar una cantidad razonable que un solo obrero podía consumir durante el almuerzo para seguir trabajando por la tarde.

Mesurament

Sabers

- A. Selecció i ús d'instruments (analògics o digitals) i unitats adequades per mesurar de manera directa angles i longituds.
- B. Deducció, interpretació i aplicació de diferents estratègies (desplegament, descomposició en figures més senzilles...) per obtenir longituds o distàncies, àrees i volums a través de material manipulatiu o aplicacions de geometria dinàmica.
- C. Ús de la relació entre les longituds, superfícies o volums de figures semblants per a la resolució de problemes. [ESS] #NUM.RP
- D. Ús dels teoremes de Tales i Pitàgores en el càlcul de mesures indirectes per a la resolució de problemes en contextos diversos. [ESS]
- E. Distinció entre àrees i volums de cossos geomètrics (piràmides i cons).
- F. Representació plana d'objectes tridimensionals (piràmides i cons) en la resolució de problemes.

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

Durant aquest tercer curs de la secundària, el conjunt de sabers pertanyent al grup de mesurament se centra principalment en l'obtenció i càlcul de longituds o distàncies, àrees, volums i mesures angulars. El treball amb unitats d'aquestes magnituds ja s'ha efectuat en cursos anteriors i, per tant, l'alumnat ja hauria de tenir la visualització d'algunes d'aquestes unitats per poder fer estimacions i mesuraments quan la situació ho requereixi. Així doncs, l'activitat matemàtica en aquest curs sobre el sentit de la mesura es fonamenta principalment en els sabers que conformen el grup de mesurament.

S'ofereixen a l'alumnat nous contextos perquè pugui aplicar els coneixements i destreses que ha anat assolint ja sigui en l'obtenció de mesures directes o en el càlcul d'indirectes. Les aplicacions dels dos grans teoremes, Tales i Pitàgores, descoberts a 2n d'ESO, permetran donar solució a nous problemes amb forta connexió amb el sentit espacial.

Per treballar alguns d'aquests sabers serà important continuar amb el treball de camp. L'obtenció de mesures directes d'angles i distàncies, a partir d'instruments adients, i el tractament posterior de les dades recollides per tal de minimitzar l'error, juntament amb els teoremes esmentats i el context històric, aproparan els alumnes al càlcul de mesures inaccessibles.

Es recomana afavorir el treball en grups heterogenis d'unes tres persones, amb l'objectiu de promoure la conversa matemàtica, compartir conjectures i prendre decisions consensuades i fonamentades en el raonament. Tanmateix, cal dedicar estones al treball individual i educar l'alumnat a enfrontar-se als problemes per tal que aquests esdevinguin reptes personals i no limitadors d'aprenentatge.

Comentaris sobre les connexions

En aquest curs, recomanem plantejar situacions i problemes en què intervinguin les relacions entre longituds, superfícies o volums de figures semblants. La descoberta i aplicació d'aquestes relacions permet treballar conjuntament el sentit de la mesura i el sentit numèric, especialment el raonament proporcional. És fonamental que aquestes relacions de proporcionalitat en el mesurament de figures semblants sorgeixin com a resultat d'activitats d'investigació, de manera que l'alumnat les pugui descobrir a partir de les seves pròpies observacions.

Per facilitar aquesta comprensió, suggerim utilitzar les taules de proporcionalitat, ja que permeten visualitzar en tot moment la relació d'equivalència entre dues magnituds. Quan sigui adient, es poden establir connexions amb la regla de tres, l'equació de proporcionalitat o el càlcul de percentatges aplicant un tant per u. A més, aquestes activitats ofereixen una bona oportunitat per introduir eines tecnològiques, com la calculadora o el full de càlcul, la qual cosa fomenta un ús aplicat de les matemàtiques.

D'aquesta manera, es reforça la idea que les matemàtiques no són simplement un conjunt de «fórmules màgiques» per memoritzar, sinó que es basen en el raonament i en connexions internes que afavoreixen un aprenentatge més profund i significatiu.

Tal com es pot observar amb una simple lectura dels sabers, tots ells tenen una gran connexió amb el sentit espacial. Serà gairebé impossible que en les propostes d'activitats no es reconeguin sabers d'un i l'altre sentit. En el nostre cas, però, els sabers de l'espacial sovint formaran part del procés en les propostes de mesurament.

El treball amb instruments de mesura per a longituds i angles, així com l'estudi del seu ús, fa que aquesta part de la matemàtica es connecti amb coneixements propis de l'àmbit de la tecnologia i de les ciències experimentals.

Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

Considerem essencial el **saber #3.MES.ME.C**, tant per la seva connexió amb el sentit numèric com per les múltiples aplicacions que ofereix en un entorn d'experimentació i resolució de problemes. Aquest enfocament permet que l'alumnat descobreixi no només les connexions internes dins les matemàtiques, sinó també les nombroses relacions amb altres àmbits.

A través d'aquest treball, es fomenta la mirada matemàtica de l'alumnat i se li presenten nous contextos d'aplicació, com les ampliacions i reduccions d'imatges, les mides dels formats DIN, o l'estudi de la variació de la longitud, l'àrea i el volum en figures semblants.

També considerem essencial l'aplicació i l'ús dels teoremes de Tales i Pitàgores en contextos diversos. El **saber #3.MES.ME.D** permet a l'alumnat consolidar el coneixement d'aquests teoremes i, alhora, analitzar les condicions necessàries per aplicar-los en la resolució de problemes o en el càlcul de mesures indirectes. Això els ajuda a valorar si disposen de prou informació per utilitzar-los correctament. Aquestes situacions afavoreixen el desenvolupament del raonament, l'argumentació, la representació i la comunicació matemàtica.

Observacions sobre alguns sabers específics

És important deixar constància de l'interès perquè les propostes que es facin siguin riques i variades en el format en què es proposen (activitat de camp, d'aula, d'experimentació, de conversa matemàtica, de resolució de problemes...) i també pel que fa al suport sobre el qual se sustenten. En uns quants sabers serà propici l'ús de materials manipulatius, com és en el cas del **saber #3.MES.ME.B**. En d'altres, ajudarà el treball amb eines tecnològiques, com el full de càlcul i els programes de geometria dinàmica. En aquest sentit, és un bon moment per presentar les prestacions de la finestra 3D del GeoGebra.

Amb el **saber #3.MES.ME.E** i el **saber #3.MES.ME.F** es busca consolidar la diferència entre àrea i volum mitjançant el treball amb piràmides i cons. Cal recordar que aquest aspecte ja s'ha abordat prèviament amb cilindres i prismes a segon. Alhora, serà important proposar situacions que requereixin la representació d'objectes tridimensionals i el seu desplegament en 2D per resoldre-les. En el cas dels políedres, poden

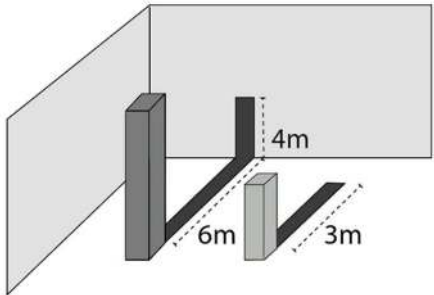
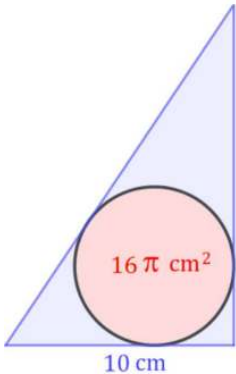
resultar útils materials manipulatius com el Polydron o el Lokon, així com aplicacions tecnològiques com GeoGebra o Polypad.

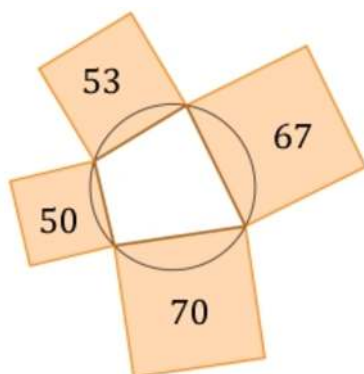
Recursos i activitats

Recursos i activitats generals per al bloc de sabers

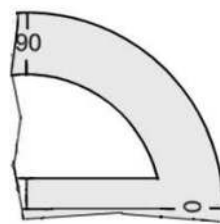
Per treballar el sentit de la mesura, i en particular els sabers del bloc de mesurament, en un ambient de resolució de problemes, podem aprofitar algunes de les propostes que trobarem en els concursos promoguts per la Societat Catalana de Matemàtiques. Ens referim a la [Copa Cangur](#), els [Problemes a l'Esprint](#), la [Marató de Problemes](#) i la [Prova Cangur](#).

Fixem-nos en alguns dels problemes que hi podem trobar:

La barra més petita fa 2 m d'altura. Quina és l'altura de la barra més alta?  Font: Copa Cangur 2024 Autoria: Comissió Cangur (SCM)	Un triangle rectangle té un catet de 10 cm i el cercle inscrit al triangle té una àrea de $16\pi \text{ cm}^2$. Quina és, en cm^2, l'àrea del triangle?  Font: Problemes a l'Esprint 2023 Autoria: Comissió Cangur (SCM)
La figura mostra un quadrilàter inscrit en un cercle. S'han traçat cap a l'exterior del cercle els quatre quadrats que tenen com a base els costats del quadrilàter, i s'indiquen les àrees d'aquests quadrats, que són, ordenadament, 50, 70, 67 i 53 cm^2. Quina és l'àrea del cercle?	La Maria té un semicercle graduat, però és ben especial perquè només té la marca inicial i la de l'angle recte. A la figura en podeu veure una part. Quin és el mínim nombre de marques que ha de fer entre les marques de 0° i de 90° perquè pugui mesurar directament els angles de 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70° i 80°, agafant per a cada angle dues d'aquestes marques (considerant la de 0°, la de 90° i les que faci)?



Font: [Marató de Problemes 2023](#)
 Autoria: Comissió Cangur (SCM)



Font: [Cangur 2023](#)
 Autoria: Comissió Cangur (SCM)

Recursos i activitats per treballar sabers concrets

Saber #3.MES.ME.A

En el càlcul de mesures directes és fonamental l'estudi dels instruments de mesura. La selecció del més adient en funció de la magnitud que cal quantificar i l'ordre d'aquesta, l'ús i la lectura en l'obtenció de resultats, així com el control de l'error en el mateix acte de mesurar i la precisió de l'aparell, formaran part de tot el procés de treball de camp.

En aquesta línia, la precisió en la presa de mesures és clau per garantir resultats fiables en qualsevol experimentació. Tal com s'indica en el bloc [Experimentació lliure](#), tota mesura comporta una certa incertesa, que depèn tant de l'habilitat de qui mesura com de l'instrument utilitzat. Per exemple, mesurar un objecte amb un regle graduat en centímetres genera una incertesa més gran que fer-ho amb un regle mil·limetrat. Així mateix, cal diferenciar entre exactitud i precisió: mentre que l'exactitud indica la proximitat d'una mesura al valor real, la precisió es refereix a la consistència dels resultats en mesures repetides. En aquest sentit, és fonamental seleccionar instruments adequats i conèixer-ne les limitacions per minimitzar errors i obtenir dades més fiables.

L'estudi de magnituds lineals i de superfície en cursos anteriors a partir d'activitats d'experimentació i de mesura directa, ha vingut acompanyat del treball amb instruments de mesura com el peu de rei, l'hodòmetre, etc. Per a aquest curs proposem l'anàlisi d'instruments per mesurar angles. Entenem que aquest saber es podria ubicar perfectament en un altre curs, però volem situar-lo aquí per la importància que prendrà a l'hora de realitzar activitats en context amb càlculs de distàncies o altures, i on caldrà obtenir dades angulars per aplicar els teoremes de Pitàgores o el de Tales. Aquestes activitats prepararan l'alumnat per a l'estudi de la trigonometria en cursos posteriors.

GONIÒMETRES PER A TREBALLS DE CAMP

Aquesta [activitat](#), del professor Anton Aubanell, i que podem trobar a l'ARC, és una bona proposta per treballar el **saber #3.MES.ME.A**. La construcció artesana de [goniòmetres](#) i [clinòmetres](#) aportarà al nostre alumnat coneixement matemàtic, i servirà com a recurs per a l'obtenció de mesures directes. Cal tenir en compte els problemes de precisió que poden donar aquests aparells; i és per això que per tal de minimitzar

els errors de les dades obtingudes caldrà fer-ne moltes observacions, i treballar amb la mitjana d'aquestes, per exemple. També serà interessant proposar diferents experiències amb situacions on calgui prendre mesures angulars: angles d'elevació i depressió, mesures fetes respecte de l'horitzontal, angles diedres, etc.

Un repte seria mesurar els angles que formen dues cares qualssevol d'un políedre.



Font: Laboratori de matemàtiques de La Salle Bonanova
Autor: Manel Martínez



Font: [Polydron Protractor](#)
Autoria: Digital Commons

saber #3.MES.ME.B

ARQUIMEDES A TRAVÉS D'UNA TARONJA

L'àrea d'una esfera és $4\pi r^2$ on r és el seu radi. La següent [activitat](#) d'experimentació, que podem trobar a l'ARC, pretén que l'alumnat dedueixi aquesta relació a partir d'una taronja i la quantitat de pela que té.

S'agafen taronges força esfèriques i es dona una a cada grup de tres alumnes. Es talla la taronja per la meitat, assegurant que el tall fet pel ganivet és el cercle més gran, és a dir, que divideix la taronja en dos hemisferis aproximadament iguals. Es col·loca una de les meitats, costat humit cap per avall, sobre un full de paper DIN-A3 i prement s'estampa el cercle diverses vegades (almenys 5).

Tot seguit, cal fer una estimació. Es demana a l'alumnat que si pelen la taronja sencera, quants dels cercles estampats podran omplir amb la pela de la seva taronja.



Autor: Manel Martínez

Tenint en compte que cada cercle estampat té per àrea πr^2 on r és el seu radi, l'àrea de l'esfera ha ocupat quatre cercles d'aquests. Per tant, l'activitat ha provocat la descoberta!

VOLUMS AMB AIGUA

Dins de la campanya de Laboratori de matemàtiques del CREAMAT, trobem l'apartat dels [Volums amb aigua](#). Hi trobarem diferents activitats d'experimentació perquè l'alumnat pugui treballar el **saber #3.MES.ME.B.** Algunes de les propostes, les quatre primeres, s'han pogut veure en cursos anteriors. En cas contrari, es poden fer també a 3r d'ESO.

Quantes vegades hi cabrà la piràmide dins del prisma amb igual base i altura? La resposta a aquesta pregunta no és fàcil si utilitzem el llenguatge algebraic per respondre-la. Hem de tenir present que no tot el nostre alumnat té el mateix nivell de maduresa ni d'abstracció perquè el llenguatge algebraic li sigui amable. Amb tot, l'experimentació a partir del transvasament de líquids d'un objecte a l'altre permetrà trobar relacions entre els seus volums.



Font: [Volums d'aigua](#)

Autoria: CREAMAT

És important que no ens avancem a les descobertes. Deixar que l'alumnat manipuli els objectes i observi les relacions que apareixen ajuda al seu procés de deducció i raonament. Per tal de refermar les propietats trobades poden utilitzar les aplicacions fetes en GeoGebra que s'adjunten en la mateixa pàgina del CREAMAT.

Tot seguit s'utilitza el mateix procediment per trobar relacions entre els volums de l'esfera, el cilindre i el con. Els tres objectes de metacrilat tenen el mateix radi, i l'altura del con i el cilindre és igual al diàmetre de l'esfera.

L'alumnat deduirà que:

Volum de l'esfera + Volum del con = Volum del cilindre

3 Volum del con = Volum del cilindre

Volum d'una esfera = 2 Volum del con

A més a més, en cas que es vulgui anar més enllà es pot emprar el [principi de Cavalieri](#) per demostrar la igualtat entre els volums de l'esfera, el con i el cilindre. Els programes de geometria dinàmica ajuden en aquests casos a la visualització i comprensió del principi.

El professor Raül Fernández i la professora Paula López van enregistrar un vídeo per al CREAMAT en què es recullen diverses activitats relacionades amb aquest material.



Font: [Volums Raül & Paula](#)

Autoria: CREAMAT

Recomanem al professorat que el visualitzin per tal de tenir en compte alguns aspectes relacionats amb la preparació i la gestió de les activitats.

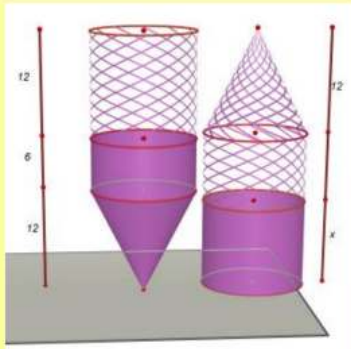
UN CILINDRE I UN CON

El problema següent, aparegut en el [Calendari matemàtic](#) de la SEMCV, els dies 11 i 12 de setembre de 2024, és un bon exemple per treballar el **saber #3.MES.ME.B**. L'objecte està format a partir d'un cilindre i un con, amb un volum d'aigua a dins. Sabent a l'altura que arriba l'aigua quan l'objecte està col·locat amb el vèrtex del con cap per avall, es vol conèixer a quina altura arriba el líquid quan es capgira l'objecte.

11**

12

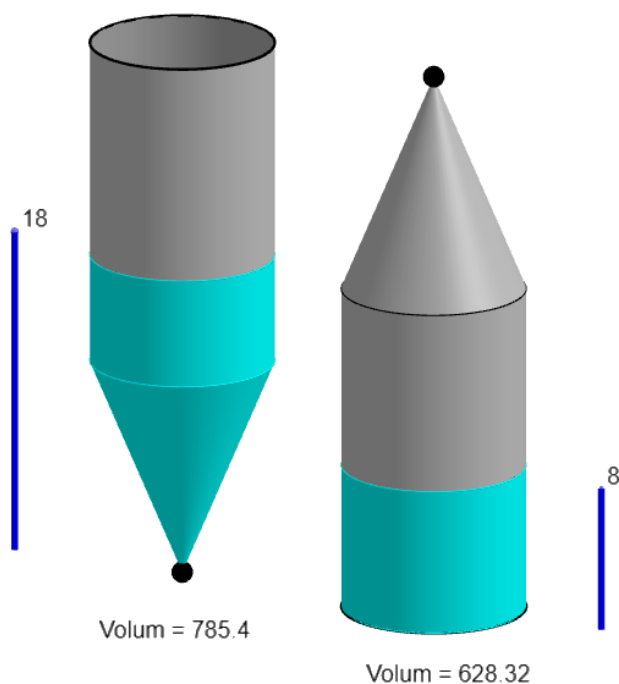
En la imatge adjunta les dues figures són iguals i contenen el mateix volum d'aigua. El con té una alçada de 12 cm. En la de l'esquerra, l'aigua del cilindre arriba a una alçada de 6 cm dels 18 que té en total. Troba l'altura a la qual arriba l'aigua en la figura de la dreta.



Font: [Calendari matemàtic - Setembre 2024](#)

Autoria: SEMCV

Els programes de geometria dinàmica permeten calcular el volum d'alguns cossos, entre els quals cons i cilindres. L'experimentació amb aquests programes poden ajudar l'alumnat a interpretar els problemes i cercar-ne possibles solucions. La imatge següent correspon a una construcció feta amb GeoGebra que simula les dades del problema inicial. Modificant l'altura a la qual arriba el líquid s'obté el volum.



Font: [Volum dipòsit 1](#)
Autor: Manel Martínez

saber #3.MES.ME.C

TREBALLEM AMB DIN's

La professora Clara García i els seus grups de 3r d'ESO de La Salle Bonanova es van preguntar quin DIN havien de construir perquè hi cabés tota la promoció. Arran d'aquesta activitat d'experimentació van concursar al [vídeoMAT](#) amb el següent vídeo:



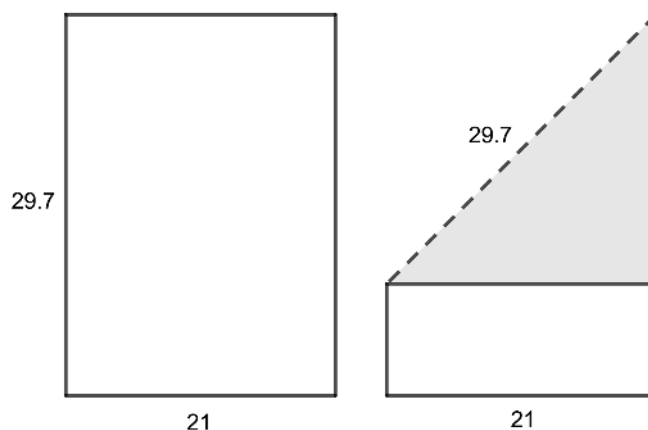
Font: [VIDEOMAT2017. Quin DIN A necessitem?](#)

Autoria: Alumnat de 3r d'ESO de La Salle Bonanova (curs 2016/17)

La proposta amb una pregunta estretament lligada al sentit de la mesura té moltes connexions amb el sentit numèric (raonament proporcional, nombres irracionals, potències, operacions amb nombres decimals, percentatges) i amb el sentit espacial (semblança).

També es pot començar donant a cada grup de tres alumnes un DIN-A4 i un DIN-A3, i demanar que els observin i anotin totes les relacions que hi troben. Fàcilment deduiran que l'àrea del DIN-A3 és el doble que l'àrea del DIN-A4. Si comparen els seus costats, veuran que el costat llarg del DIN-A4 correspon al costat curt del DIN-A3, i que el costat llarg del DIN-A3 és justament el doble del costat curt del DIN-A4.

Si dobleguem el DIN-A4 per la diagonal d'un quadrat de costat el petit del DIN-A4, aquesta diagonal mesura exactament el mateix que el costat llarg del DIN-A4 i, per tant, és el costat curt del DIN-A3.



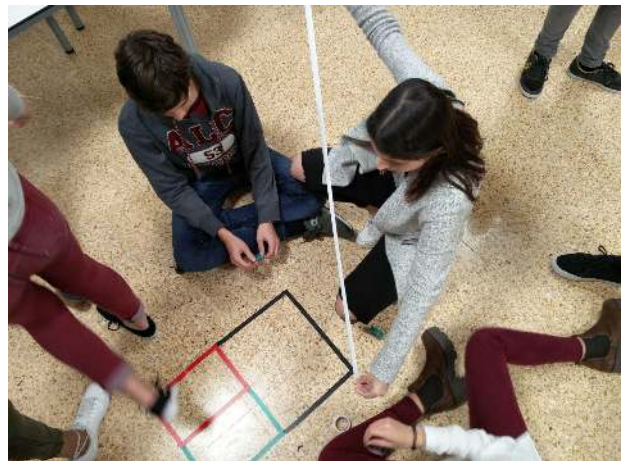
Font: [GeoGebra associat al recurs](#)

Autor: Manel Martínez

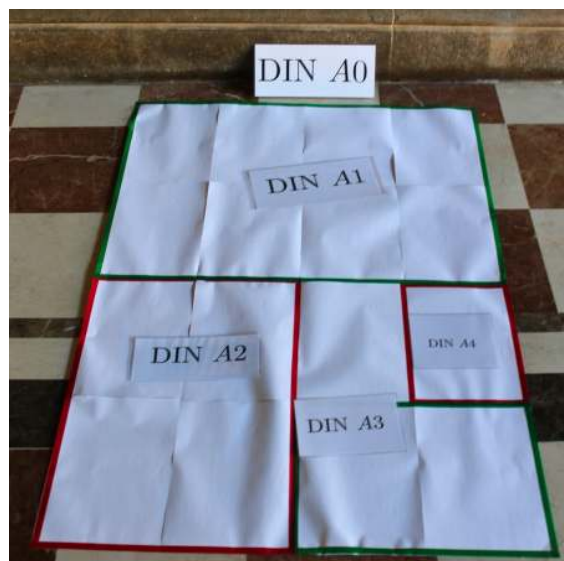
El treball permetrà l'alumnat observar que els perímetres creixen amb una raó de $k = \sqrt{2}$ i, per tant, les àrees creixen amb una raó de $k^2 = 2$.

Continuant amb la construcció s'arribarà a un DIN-A0, un rectangle de costats en raó $\sqrt{2}$ que té per àrea un metre quadrat. Aquest és un moment brillant de l'activitat, ja que precisament en el DIN-A0 tenim la unitat de mesura d'àrea, el metre quadrat.

El procés de construcció a terra utilitzant cintes de colors per marcar els perímetres també aporta coneixement a l'alumnat. Vegem-ne algunes imatges que mostren aquest procés:



Font: Laboratori de matemàtiques de La Salle Bonanova
Autor: Manel Martínez

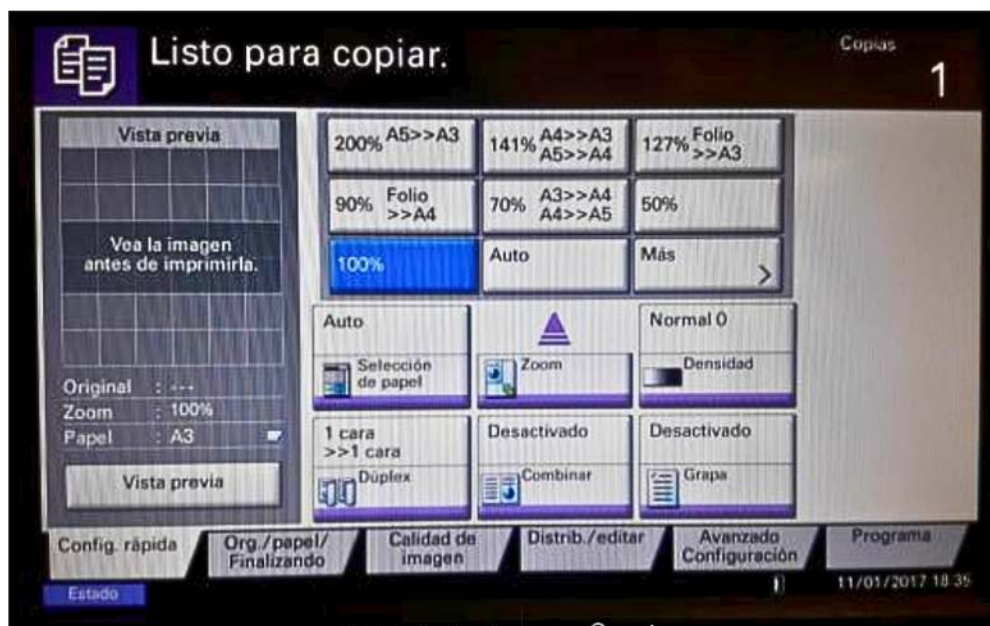


Font: Laboratori de matemàtiques de La Salle Bonanova
Autor: Manel Martínez

Tot seguit adjuntem la [fitxa de l'activitat](#) que va preparar el professor Manel Martínez per treballar amb els DINs.

Un cop feta l'activitat, podríem proposar al nostre alumnat la següent pregunta:

Us heu fixat mai en la pantalla de la fotocopidora i la informació que posa en el seu menú per fer ampliacions o reduccions? Podeu explicar per què apareixen els percentatges 200 %, 141 % i 70 % ?



Font: Elaboració pròpia

LA SEMBLANÇA EN UNA, DUES I TRES DIMENSIONS

Al [MMACA](#) podem trobar un seguit de mòduls sota el nom [Longitud, àrea i volum](#).



Autoria: MMACA

En el primer mòdul se'ns planteja comparar la longitud de tres circumferències, de manera que el diàmetre d'una és la suma dels diàmetres de les altres dues, essent aquestes últimes iguals, tal com es veu a l'esquerra de la imatge.



Autoria: MMACA

Així doncs, què té més longitud: la circumferència gran o la suma de les dues petites?

És important permetre que l'alumnat faci les seves pròpies conjetures. Podrien pensar que recórrer el camí sinuós format pel perímetre de les dues circumferències petites és més llarg que seguir directament la circumferència gran.

Amb un cordill, però, podem comprovar que els recorreguts són exactament igual de llargs.

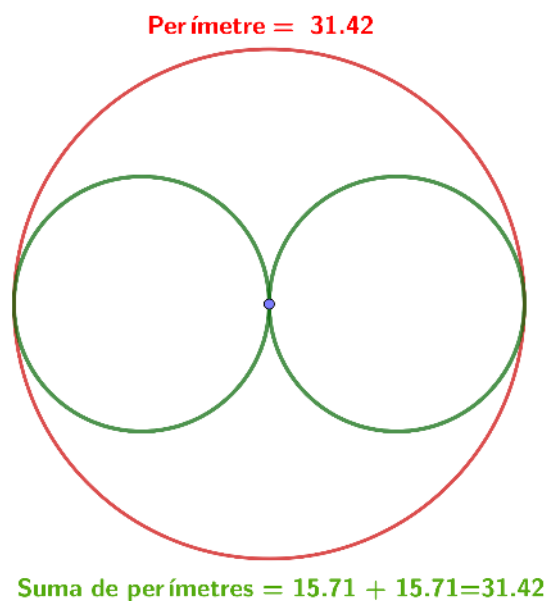
I si les dues circumferències petites no fossin iguals, però la suma dels seus diàmetres continués sent igual al diàmetre de la circumferència gran?

Cal fomentar en l'alumnat l'hàbit de fer-se preguntes, ja que aquestes són el punt de partida de nous reptes i problemes. L'ús de material manipulatiu, com ara el cordill, els permetrà visualitzar que la propietat es manté: el perímetre de la circumferència gran és igual a la suma dels perímetres de les dues petites.

En cas de no tenir material manipulatiu, el problema es pot atacar fàcilment amb GeoGebra. Recomanem que els alumnes facin la construcció de manera no guiada pel docent. En principi, si no tenen gaire experiència amb el programa es pot fer que treballin en parelles. La mateixa construcció mobilitzarà certes competències específiques i formarà part de la resolució del problema en si. Fins i tot, en una mateixa construcció poden mostrar-se juntes les dues propostes anteriors.

En l'aplicació enllaçada podem modificar la mida de les circumferències petites movent el punt de tangència.

Ara bé, quines altres preguntes ens podríem fer a partir d'aquest problema? Deixem que l'alumnat mostri la seva creativitat.



Font: [MMACA 1](#)
Autor: Manel Martínez

Passaria el mateix si en lloc de dues, fossin tres circumferències petites? O quatre?...

Podem optar per veure si els grups poden demostrar aquesta propietat. Hem de tenir en compte que segurament no tothom arribarà a la demostració, però això no ha de ser un impediment perquè suposi un bon repte per als qui realment estiguin preparats.

En el mòdul següent, es presenten tres tubs. Un amb un diàmetre gran, i dos de petits iguals, de manera que la suma dels seus diàmetres dona el diàmetre del gran. És a dir, una situació similar a la del primer cas. Ara la pregunta és per on creiem que passarà més aire, si pel tub gran o pels dos petits.

Si s'ha fet l'experiència anterior, la tendència és dir que passarà la mateixa quantitat d'aire. Però es poden introduir els dos petits dins del gran i es veu que encara queda espai entremig.

La manipulació del material permet que sigui el mateix alumnat qui faci aquests raonaments. Cal ser curosos i no avançar-nos a l'hora de fer observacions. És preferible que siguin els alumnes que arribin a fer les descobertes.



Autoria: MMACA



Autoria: MMACA

Ara bé, quantes vegades la secció del tub gran és més gran que la del petit?



Autoria: MMACA

Posant les seccions dels tubs de la manera que s'observa en la imatge anterior, queden quatre zones limitades. Utilitzant cigrons, l'alumnat s'adonarà que les quatre zones tenen la mateixa àrea, i per tant podrà concloure que l'àrea de la secció de tub gran és quatre vegades l'àrea de la secció del tub petit.

La raó entre els diàmetres del tub gran i el petit és 2, mentre que la raó entre les seves superfícies és 4.

El darrer mòdul té una balança i uns cilindres de fusta, tots de la mateixa altura. Un d'ells té per diàmetre el doble que els altres. Quants cilindres petits necessitem per equilibrar el pes del cilindre gran? Amb aquesta pregunta es pot validar si s'ha assolit la descoberta feta en el mòdul anterior, ja que, naturalment, en caldran quatre.



Autoria: MMACA

Ara bé, què succeirà si en lloc de cilindres tenim esferes massisses, una d'elles amb el radi el doble de gran que les altres? Quantes en necessitem de les petites per equilibrar el pes de la gran?



Autoria: MMACA



Autoria: MMACA

De la mateixa manera que amb els casos anteriors, cal deixar que l'alumnat faci les seves conjeitures. La manipulació els portarà a concloure que en calen 8.

La raó entre els diàmetres d'una esfera gran i una de petita és 2, mentre que la raó entre els seus volums és 8.

Amb aquestes activitats es treballa amb profunditat el **saber #3.MES.ME.C** i des de l'experimentació s'arriba a la descoberta, i posteriorment formalització, que si la raó de semblança o escala entre dues figures és $1:K$, llavors la raó entre tots els elements longitudinals és també $1:K$. La raó entre les superfícies és $1:K^2$ i la raó entre els volums és $1:K^3$.

En la pàgina web del MMACA trobem tota l'[activitat detallada](#) i, a més a més, enllacem l'article [Longitud, àrea i volum](#) (Aubanell, 2017c, pàg. 111-115) que el professor Anton Aubanell va publicar a la revista NouBiaix.

TRES QUARTS DE LLUM

La [fotografia matemàtica](#) és un magnífic recurs per poder representar idees, conceptes i propietats matemàtiques. En el cas que es presenta, l'alumne Augusto Castelló va fotografiar un problema. Quina fracció de llum queda representada? La solució a aquest problema acabarà donant nom a la fotografia. La imatge ens proporciona un context per fer-nos preguntes. L'ús de fotografies matemàtiques a l'aula i la realització per part de l'alumnat educarà la seva mirada matemàtica, i alhora serà motor de nous problemes.

Deduir com l'Augusto va arribar a la conclusió que hi havia tres quarts de llum està relacionat amb treballar el **saber #3.MES.ME.C**. Tenim l'opció de presentar la imatge sense dir el títol, fer que l'alumnat es plantegi

preguntes i, en cas que no surti res, plantejar nosaltres quina part del total el cercle gran queda il·luminat. O també podem presentar la fotografia amb el títol i demanar la raó justificada de per què es diu així.



Font: [Tres quarts de llum](#)

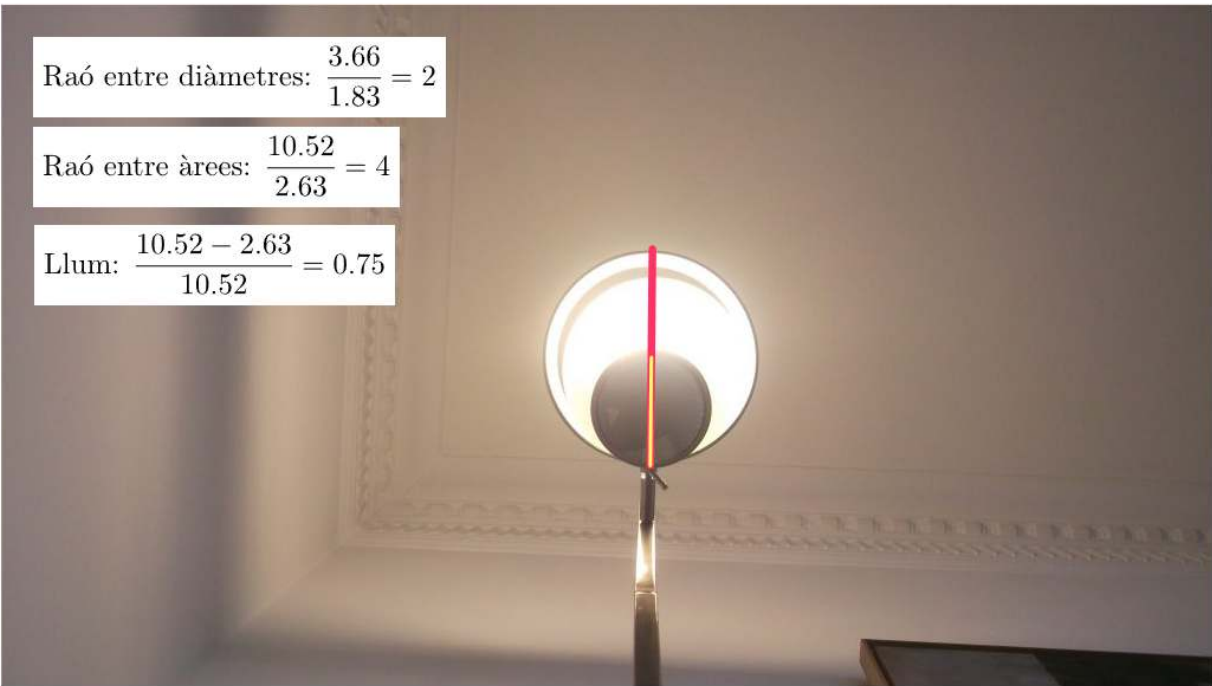
Autor: Augusto Castelló

Sovint la fotografia matemàtica pot esdevenir un recurs complementari amb el GeoGebra. En aquest cas es pot suggerir una activitat de comprovació que permeti validar el títol de la mateixa fotografia. La determinació dels centres de les circumferències i les construccions d'aquestes són un bon recurs per establir connexions amb el sentit espacial. A més a més, facilita al nostre alumnat una eina per poder validar les seves pròpies conjectures.

Raó entre diàmetres: $\frac{3.66}{1.83} = 2$

Raó entre àrees: $\frac{10.52}{2.63} = 4$

Llum: $\frac{10.52 - 2.63}{10.52} = 0.75$



☐ Circumferència gran
☐ Circumferència petita
☒ Diàmetres
☒ Àrees



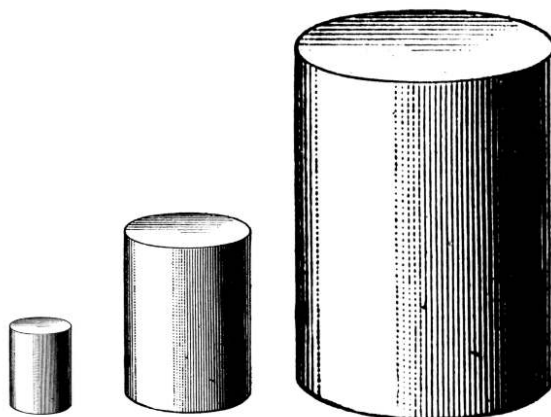
Font: [GeoGebra associat a la fotografia Tres quarts de llum](#)

Autor: Manel Martínez

QÜESTIONS RELATIVES AL VOLUM DE CILINDRES

El professor Don Steward, a la seva [pàgina web](#), proposa un conjunt d'activitats relacionades amb el volum dels cilindres. Aquestes activitats tenen una entrada accessible, ja que comencen recordant quines dimensions intervenen en el seu càlcul i després les apliquen a situacions reals.

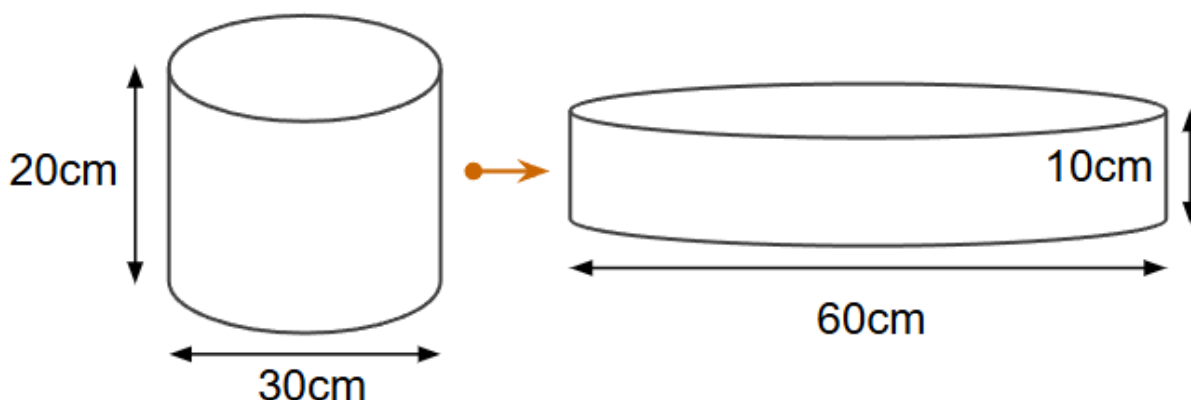
D'entre totes les activitats, en volem destacar dues de relacionades amb el saber que tractem aquí:



Font: [Cylinder volume questions](#)

Autor: Don Steward

Estudiar com es comporta el volum dels cilindres quan doblem les seves dimensions (tant el diàmetre com l'altura).



Font: [Cylinder volume questions](#)
Autor: Don Steward

I quina és la raó entre els volums quan dupliquem el diàmetre, però reduïm a la meitat l'altura? Les propostes les podem trobar en forma de presentació en la mateixa web o en la següent [versió traduïda](#).

EL PLÀTAN D'EN PERE FI

Les històries i representacions creatives ofereixen una eina poderosa per explorar conceptes matemàtics d'una manera atractiva i significativa. El recurs [El plàtan d'en Pere Fi](#), ideat per Josep Lluís Cañadilla, aprofita aquesta estratègia per plantejar un problema fascinant que combina narrativa i matemàtiques. Aquesta petita història permet a l'alumnat investigar com les relacions entre les longituds de figures semblants afecten magnituds com el volum i, en aquest cas, la massa de la fruita gegant que es descriu a la història.

L'activitat se centra en el **saber #3.MES.ME.C**, essencial en el desenvolupament del pensament geomètric. Així, s'evidencia que si la longitud d'un objecte es multiplica per un factor determinat, la superfície augmenta amb el quadrat d'aquest factor i el volum amb el cub. Aquesta connexió és fonamental per entendre també la relació amb altres propietats físiques, com la massa, que depèn directament del volum i de la densitat.

A més, aquesta proposta s'emmarca en un context lúdic que fomenta la curiositat i el pensament crític, fent servir una història que connecta amb l'imaginari col·lectiu dels contes i narracions, com les aventures de Gulliver o personatges de pel·lícules amb proporcions desmesurades. Aquest tipus de recursos no només desperten l'interès sinó que també permeten fer connexions transversals entre les matemàtiques i altres disciplines, com les ciències naturals, les quals ajuden l'alumnat a construir un coneixement més integrat.

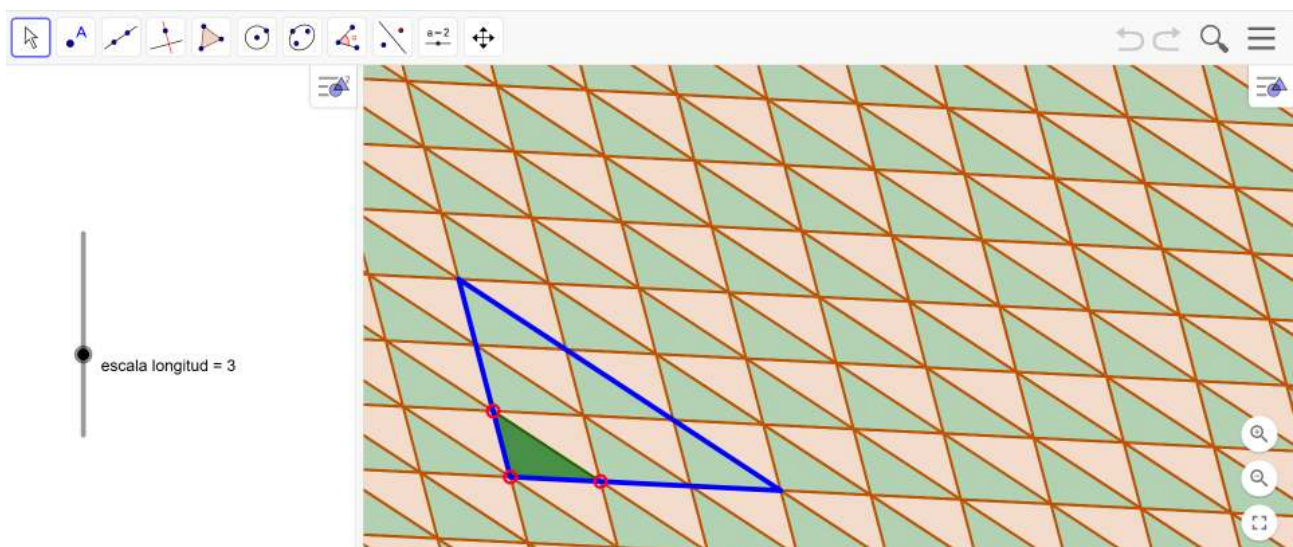
Una proposta interessant per intentar anar més enllà en el recurs proposat és analitzar altres històries de ciència-ficció (dibuixos animats, pel·lícules, contes...) i cercar altres relacions entre magnituds similars a les proposades en el text inicial.



Font: [La fruita d'en Pere Fi](#)
Autor: Josep Lluís Cañadilla

UNA TESSEL·LACIÓ AMB TRIANGLES

La proposta didàctica Una tessellació amb triangles es basa en l'aplicació GeoGebra [Tes Triangles](#) de Manel Martínez.



Font: [Tes Triangles](#)
Autor: Manel Martínez

És recomanable que l'alumnat treballi en grups de 2 o 3 persones per fomentar el diàleg matemàtic i enriquir les observacions. L'activitat es desenvolupa al voltant del mètode *Notice and Wonder* (Què

observes i quines preguntes et venen al cap?), que convida els alumnes a explorar lliurement el recurs abans d'obrir un espai per compartir idees. Molt probablement, es podran donar les següents observacions (agrupades per nivells):

Observacions inicials

L'alumnat identificarà primer aspectes més evidents:

- És una tessel·lació del pla amb triangles.
- Els punts vermells modifiquen la forma dels triangles.
- El lliscant «escala de longitud» canvia la mida del triangle blau.

Aquestes primeres observacions són la base per avançar en l'anàlisi.

Nivells d'aprofundiment

Un segon nivell d'observacions pot incloure:

- La suma dels angles d'un triangle és sempre 180° .
- Tot triangle pot tessel·lar el pla.
- A mesura que es modifica l'escala de longitud, el nombre total de petits triangles segueix una relació quadràtica amb aquest factor.

Observacions avançades

Els alumnes més atents poden descobrir patrons més complexos, com ara:

- Els triangles orientats en una direcció segueixen la suma $1 + 2 + \dots + k$.
 - Els triangles orientats en la direcció oposada segueixen $1 + 2 + \dots + (k-1)$.
- Aquests dos patrons reflecteixen la suma de nombres naturals consecutius.

Finalment, el recompte total per files mostra una seqüència de nombres imparells: 1, 3, 5, ..., $2k-1$... Aquesta relació ens porta a una connexió visual entre la suma de nombres imparells i el quadrat del factor d'escala: k^2 .

Connexions i reflexió

L'activitat permet treballar el saber essencial sobre l'ús de la relació entre longituds, superfícies i volums per resoldre problemes, alhora que connecta el sentit espacial, numèric i el de la mesura. La seva base visual i manipulativa facilita que l'alumnat construeixi significat mentre aprofundeix en conceptes geomètrics i algebraics d'una manera integrada i significativa.

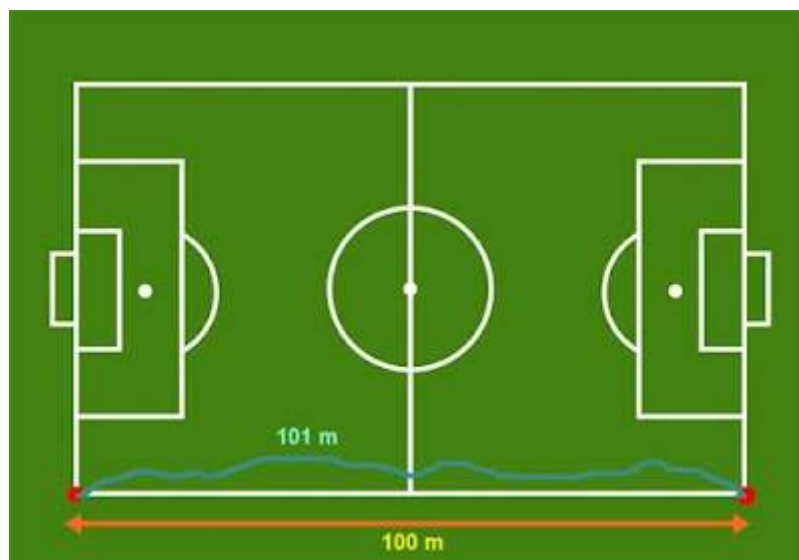
saber #3.MES.ME.D

Tradicionalment es treballen molts problemes a les nostres aules per assolir el **saber #3.MES.ME.D**. S'aconsella, però, no presentar-los de forma classificada de manera que l'alumnat no esperi emprar el teorema de Tales o el de Pitàgores simplement perquè ja se li indica, sinó que la situació plantejada li provoqui recórrer a aquests teoremes per argumentar-ne la solució. Cal fer notar també la connexió natural que es donarà entre els sentits espacial i de la mesura en les propostes referents a aquest saber.

TIBANT LA CORDA

La següent situació és interessant perquè trenca amb la intuïció, la qual cosa aporta un component de motivació i sorpresa que facilita l'interès per l'estudi i la conceptualització. L'[activitat](#) es presenta a l'inici de l'entrada que el professor Joan Jareño fa en el seu espai web, el blog del Calaix +ie.

Imaginem que lliguem una corda a dos dels banderins de córner d'un camp de futbol. Els que estan oposats, a camps diferents, dins d'una mateixa banda. És a dir, al costat llarg del camp. El camp té 100 m de llarg i la corda (sense tenir en compte la que cal per fer els nusos) és un metre més llarga: 101 m.



Font: [Tibant la corda](#)

Autor: Joan Jareño

Volem estirar la corda, verticalment cap a dalt, per obtenir l'altura màxima possible. I, abans de fer-ho, ens demanem quin animal podrà passar per sota sense tocar la corda: un ratolí, un gat, un gos, un humà, un cavall, un elefant, una girafa...?



Font: [Tibant la corda](#)

Autor: Joan Jareño

És important deixar que l'alumnat faci les seves estimacions. S'aconseguirà la mateixa altura si s'estira per qualsevol punt de la corda?

Com a bastida es pot canviar la unitat de mesura i donar una corda de 101 cm. Es fixen els seus extrems separats una distància d'un metre, i d'aquesta manera poden observar què succeeix a mesura que tiben la corda verticalment en punts diferents. L'experimentació els permet veure que l'alçada màxima s'assoleix

quan es tiba des del punt mitjà de la corda, i aquesta és considerable! Una mica més de 7 cm. En el cas del problema inicial serà poc més de 7 m, cosa que permetria fer passar perfectament una girafa.

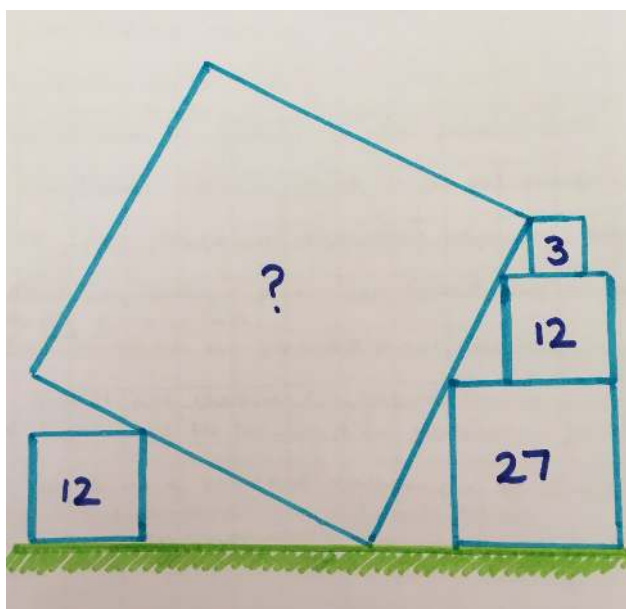
El teorema de Pitàgores serà l'eina que ajudarà a trobar la solució.

En cas que ho veiem oportú pot ser interessant estirar l'activitat i investigar quina corba determina el conjunt de punts que donen l'altura quan es tiba la corda, a mesura que es va canviant de punt. D'aquesta manera es farà una connexió amb el sentit espacial i, si ho considera el docent, es podrà introduir el concepte de lloc geomètric, en particular, el de l'el·lipse.

PUZLES GEOMÈTRICS

Els puzles geomètrics tenen unes característiques que els fa idonis per treballar la resolució de problemes, el raonament, les connexions internes i la comunicació i representació. Per començar tenen una presentació gràfica minimalista on s'incorporen només aquelles dades necessàries per atacar el problema, i alhora s'explicita clarament la pregunta. Això fa que la comprensió sigui fàcil per a tothom, i alhora no condiciona el tipus de raonament que cal emprar per solucionar-lo. Acostumen a poder-se resoldre de diferents maneres; per tant, es promou la creativitat i la diversitat en l'expressió. I finalment, tots tenen un component de repte que els fan atractius i motivadors. Alguns d'aquests puzles són autèntics escenaris on poder aplicar els teoremes de Tales i de Pitàgores per solucionar-los. En podem trobar alguns en les publicacions *Geometry Snacks* (Southall & Pantaloni, 2017) i *More Geometry Snacks* (Southall & Pantaloni, 2018).

En aquesta mateixa línia, són interessants les [propostes](#) dissenyades per Catriona Shearer, [@Cshearer41](#). Tot seguit en veiem un puzle on es demana la superfície del quadrat recolzat sobre quatre quadrats d'àrea coneguda.

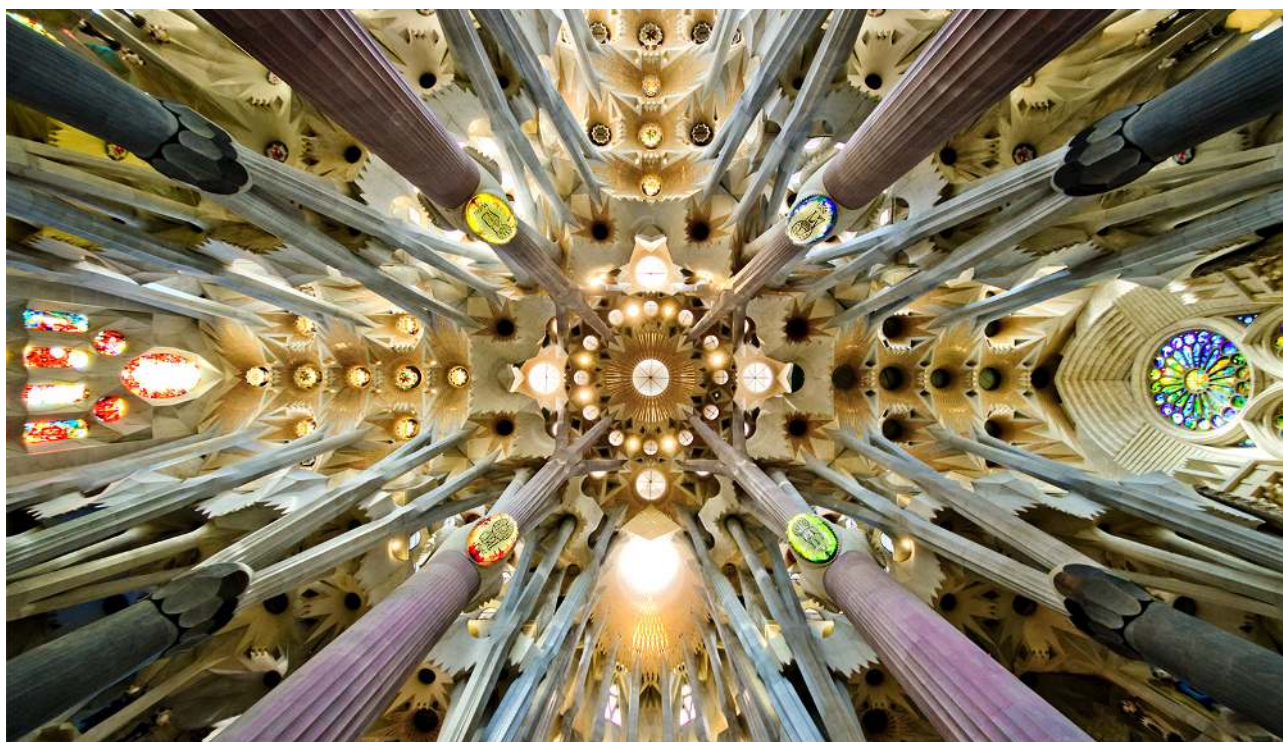


Autora: Catriona Shearer

QUANT OCUPA UNA IMATGE?

Treballar amb les dimensions d'una imatge digital i la mida del fitxer permet abordar el **saber essencial #3.MES.ME.D** a través d'un context pràctic i proper per a l'alumnat. Imaginem que es vol reduir la mida d'una imatge per enviar-la per correu electrònic. Quan es modifiquen les dimensions d'una imatge mantenint la proporció, el teorema de Tales és clau per calcular les noves dimensions de manera proporcional.

La següent fotografia mostra el sostre de la nau central de la Sagrada Família:



Font: [Sagrada Família](#)

Autoria: Wikimedia Commons

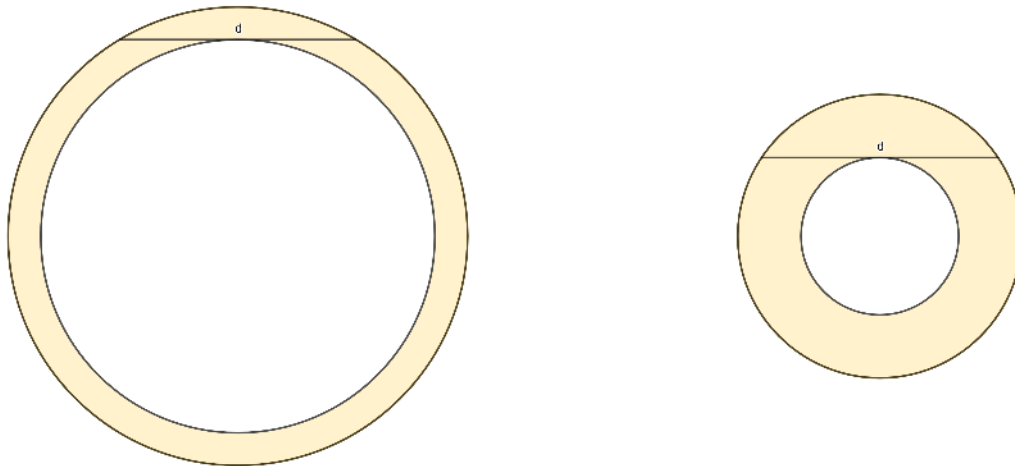
L'arxiu seleccionat ocupa 3,95 MB i té una resolució de 1555 x 889 píxels. Per evitar les variacions associades a la compressió de formats com el JPG, s'ha transformat a format BMP, que preserva les dimensions originals sense alteracions. Suposem que volem modificar-ne les dimensions per tal de reduir-ne l'espai de memòria que ocupa, aplicant un factor d'escala d'1:3. La resolució de la imatge modificada serà de 518 x 296 píxels, però com es veurà afectada la mida de l'arxiu? Quant ocuparà?

Com que el factor d'escala és 1:3, cada dimensió de la imatge es redueix a un terç. Això significa que l'àrea total es redueix a $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, ja que l'àrea és proporcional al producte de les dimensions. Per tant, la imatge modificada ocuparà, aproximadament, una novena part de la mida original, és a dir, uns 0,44 MB.

Aquest exercici mostra que la mida del fitxer no disminueix de manera directa amb les dimensions, sinó de forma quadràtica, ja que depèn del nombre total de píxels. Això convida l'alumnat a explorar com les proporcions geomètriques impacten en magnituds derivades, i ofereix una visió transversal que vincula les matemàtiques amb la tecnologia. A més, fomenta discussions sobre conceptes pràctics com la compressió d'imatges, la qualitat i l'optimització en la gestió d'arxius digitals, relacionant el treball amb el teorema de Tales en contextos propers a la quotidianitat dels estudiants.

CORONES CIRCULARS

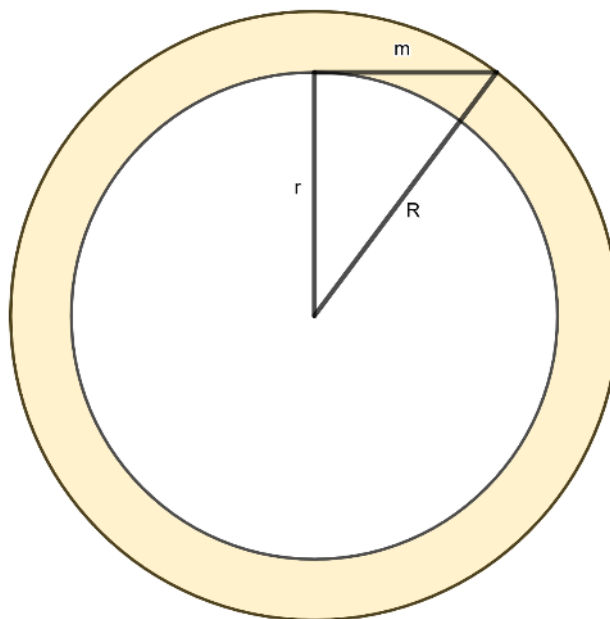
Quina de les dues corones circulars té més superfície?



Autor: Jordi Font

Aquesta pregunta serveix com a punt de partida per explorar conceptes com el teorema de Pitàgores i el valor de π , alhora que promou el raonament crític de l'alumnat.

Recordem que l'àrea d'una corona circular s'obté com la diferència entre les àrees de les circumferències que la defineixen:



Font: Àrea = $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi \cdot (R^2 - r^2)$

Autor: Jordi Font

Ara, observem el triangle rectangle format pels segments m i r com a catets, i R com a hipotenusa. El teorema de Pitàgores ens dona la relació següent:

$$m^2 = R^2 - r^2$$

Substituint aquesta relació en la fórmula de l'àrea, obtenim:

$$\text{Àrea} = \pi m^2$$

Aquest resultat mostra que l'àrea d'una corona circular depèn únicament del segment m , independentment del radi r . Així, les dues corones circulars proposades tenen exactament la mateixa superfície, encara que les seves dimensions puguin semblar diferents a primera vista.

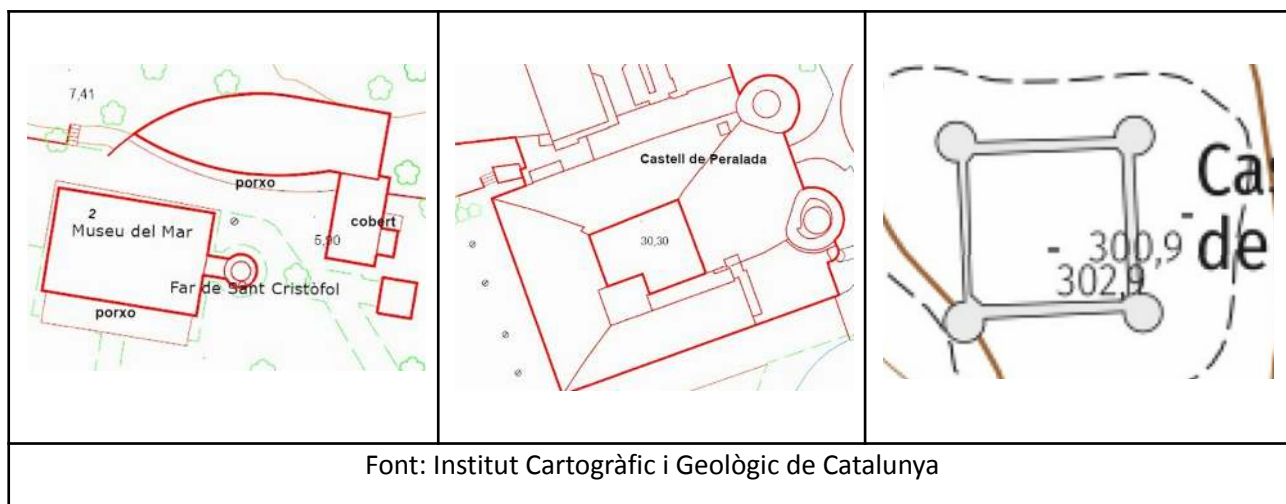
Aquest recurs visual i sorprenent permet a l'alumnat descobrir resultats no intuïtius i entendre com les matemàtiques ofereixen eines rigoroses per analitzar situacions complexes. A més, l'activitat fomenta una comprensió integrada de la geometria i l'àlgebra mitjançant la representació gràfica i la formulació d'equacions.

Aquest problema forma part de la [Pi-Xerrada del 2021](#), una iniciativa del MMACA per commemorar el Dia Internacional de les Matemàtiques. La conferència, que combina exemples pràctics i teòrics, aprofundeix en el paper central del número π a la matemàtica i les seves aplicacions en contextos diversos.

MESUREM UNA TORRE CIRCULAR

Què tenen en comú el castell de Peralada, el castell del Montgrí i el far de Sant Cristòfol de Vilanova i la Geltrú? La resposta gira entorn que totes tres construccions incorporen una torre cilíndrica en la seva arquitectura. Si volem determinar el radi d'una d'aquestes torres, no podem fer servir directament la relació entre el perímetre de la base i el radi amb el nombre π , ja que aquesta informació sovint no està disponible.

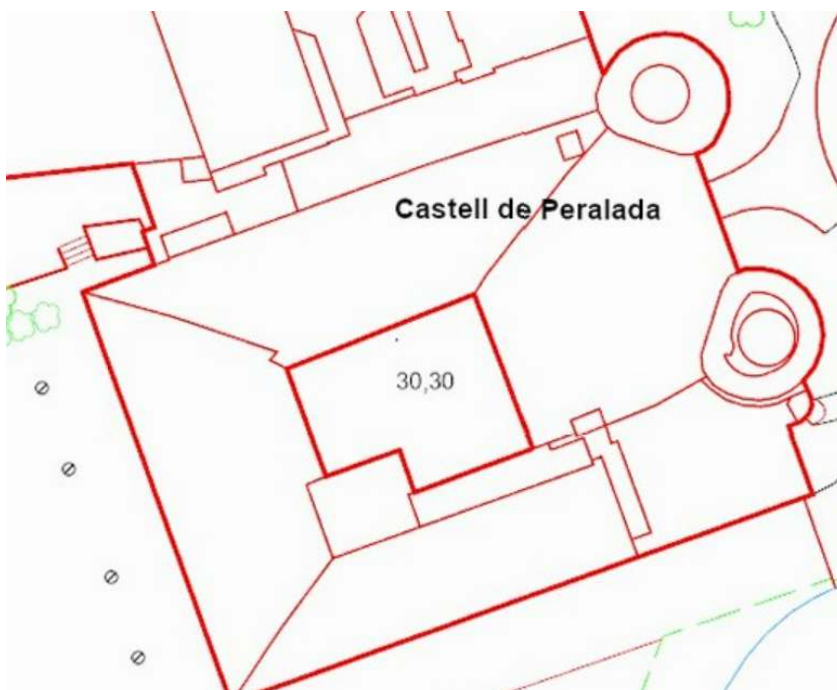
		
Font: Far de Sant Cristòfol	Font: Castell de Peralada	Font: Castell de Montgrí



Far de Sant Cristòfo



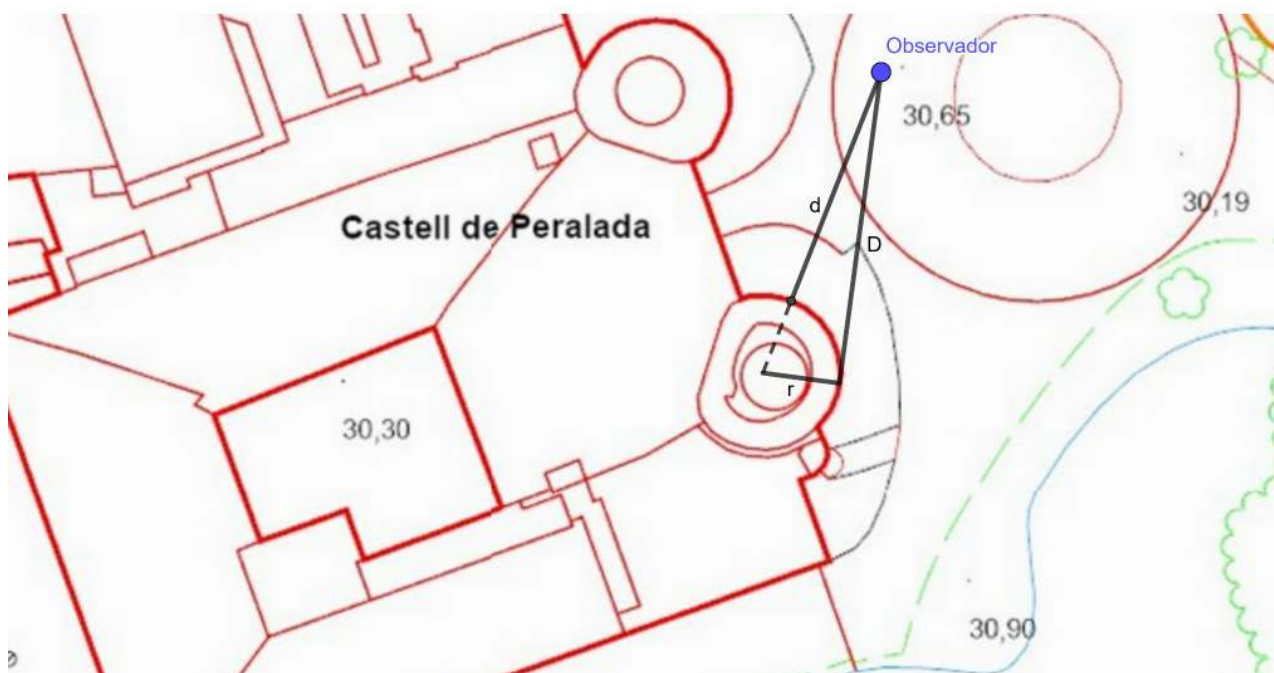
Castell de Peralada



Castell de Montgrí



Per calcular el radi, necessitem prendre dues mesures específiques. Primer, fixem un punt d'observació (**Observador**) i mesurem la distància d des d'aquest punt fins al centre suposat de la base de la torre (el punt més proper a l'observador). Des del mateix punt, també mesurem la distància D fins a un dels dos punts de tangència de la visual respecte a la base circular.



Font: Elaboració pròpia

El triangle format pel radi r , la primera visual $d + r$, i la visual tangent D és rectangle. Utilitzant el teorema de Pitàgores, podem deduir r mitjançant el desenvolupament següent:

$$(d + r)^2 = r^2 + D^2$$

$$d^2 + 2dr + r^2 = r^2 + D^2$$

$$2dr = D^2 - d^2$$

$$r = \frac{D^2 - d^2}{2d}$$

Aquest treball de camp permet connectar de manera efectiva el sentit geomètric amb l'àlgebra, destacant el desenvolupament d'un producte notable en els càlculs inicials. A més, és recomanable que els grups de treball repeteixin la recollida de dades diverses vegades. Això permet construir una taula de valors amb els resultats dels diferents grups i fer-ne un estudi estadístic. Encara que cap resultat coincidirà exactament amb un altre, la majoria estaran dins d'un interval centrat en el radi real de la torre.

Aquest procés posa en pràctica el mètode científic i permet a l'alumnat determinar una mesura aproximada i avaluar l'error comès si, finalment, es pot obtenir la magnitud real. Aquesta reflexió final ofereix una valuosa oportunitat per entendre com les matemàtiques es poden aplicar a la resolució de problemes pràctics i connectar-les amb el món real.

saber #3.MES.ME.E

Una bona manera de treballar el **saber #3.MES.ME.E** és fer-ho a partir d'activitats contextualitzades en què apareguin conjuntament els conceptes d'àrea i volum. Cal tenir present també que les variables que determinen les àrees laterals de piràmides i cons, i les seves relacions per mesurar les superfícies i els volums, són una oportunitat per mobilitzar sabers previs del sentit de la mesura i amb moltes connexions

internes, ja siguin amb el sentit algebraic o amb l'espacial. La identificació en primera instància d'aquestes figures geomètriques en la vida quotidiana, i la posterior manipulació amb objectes piramidals o cònics que calgui cobrir, embolicar o pintar, per analitzar l'àrea, i omplir-los per observar el volum, facilitarà la distinció entre aquestes dues magnituds derivades.

TEMPLATEMAKER

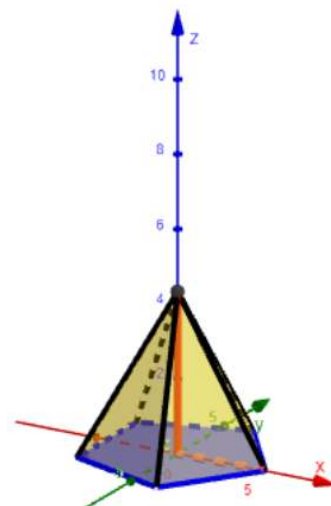
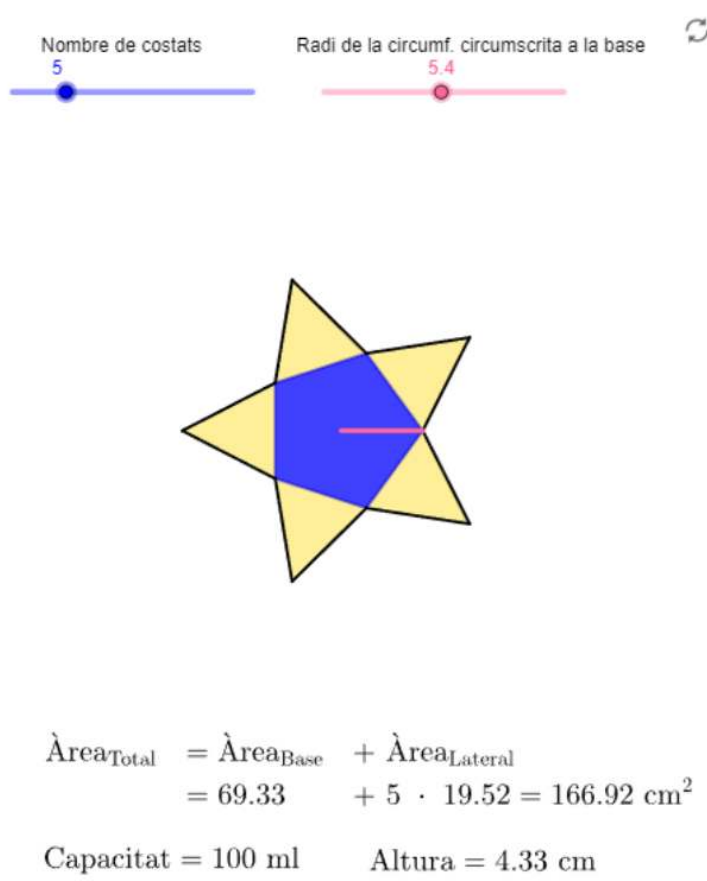
La pàgina [Templatemaker](#) ens ofereix un espai perquè l'alumnat pugui crear plantilles de caps i formes 3D introduint unes determinades mesures. Es generen, gratuïtament, arxius en format PDF, SVG i DXF del desenvolupament pla dels objectes que es vulguin dissenyar. La manipulació d'aquesta web amb la corresponent creació de plantilles permet crear activitats per al càlcul de superfícies, el muntatge de les figures tridimensionals i l'estimació del volum que poden contenir.

UN RECIPIENT DE 100 ml

Es vol dissenyar un recipient amb una capacitat de 100 ml de colònia. L'objecte ha de tenir forma de piràmide amb base un polígon regular de fins a dotze costats. L'objectiu és aconseguir la figura que donarà l'àrea mínima. En aquesta situació, la modelització amb GeoGebra és una bona eina per a l'experimentació. Recollint els aprenentatges de cursos anteriors, es demana a l'alumnat la construcció de la base a partir d'una circumferència de radi variable, i una quantitat de costats del polígon que pren valors entre 3 i 12, per exemple. La base està inscrita en aquesta circumferència i el seu radi és la distància entre el centre del polígon i un vèrtex qualsevol. A partir d'aquí, l'altura de la piràmide queda determinada per la capacitat, 100 ml, i l'àrea de la base que la dona GeoGebra.

Tal com es pot observar, la construcció amb GeoGebra permet que l'alumnat treballi molts aspectes relacionats amb el sentit algebraic i amb l'espacial. El mateix programa mostra el desplegament de les piràmides i el valor de les àrees de totes les seves cares. Això facilita que, si s'ha modelitzat bé la situació, es pugui estimar amb quin dels recipients s'assoleix la menor superfície.

L'activitat es pot seguir pas a pas en el document de GeoGebra l'[Ampolla de 100 ml](#), creat per Manel Martínez. Es recomana fer-la en parelles per fomentar la conversa matemàtica entre iguals, tant durant la modelització amb el programa de geometria dinàmica com en la discussió del problema en si.



Font: [Ampolla de 100 ml](#)
 Autor: Manel Martínez

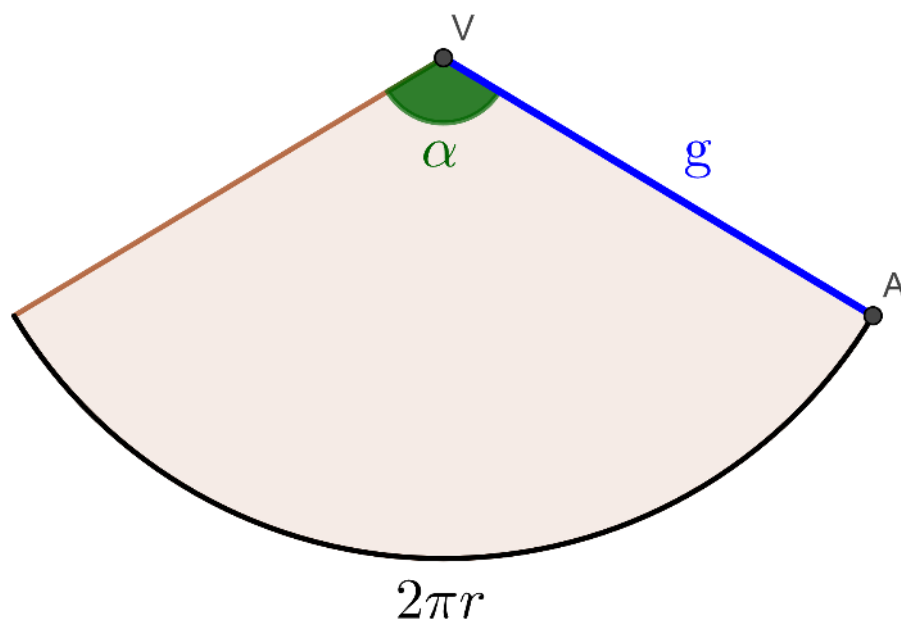
PAPERINES DE LA MATEIXA ÀREA

Amb aquesta activitat es treballen conjuntament els conceptes de volum i superfície en cons.

Es pot veure com a partir d'una àrea fixada es poden dissenyar diferents paperines que acabaran donant cons de volum diferent.

A mesura que avancen els cursos de la secundària obligatòria el sentit algebraic té més presència en el planejament de resolució de problemes i en la comunicació de l'alumnat quan els resol. Les relacions entre diferents magnituds s'acaben expressant en igualtats entre variables que permeten estudiar el comportament d'una en funció de les altres.

En el desenvolupament pla de la paperina trobem tres magnituds, tal com es pot veure en la figura:



Font: Elaboració pròpia

Aquesta figura plana és un sector circular d'angle α , radi g (la generatriu del con) i arc $2\pi r$ (on r és el radi de la base del con). L'alumnat pot trobar la relació entre aquestes tres variables seguint un raonament de proporcionalitat entre l'angle interior i la longitud de l'arc que abraça.

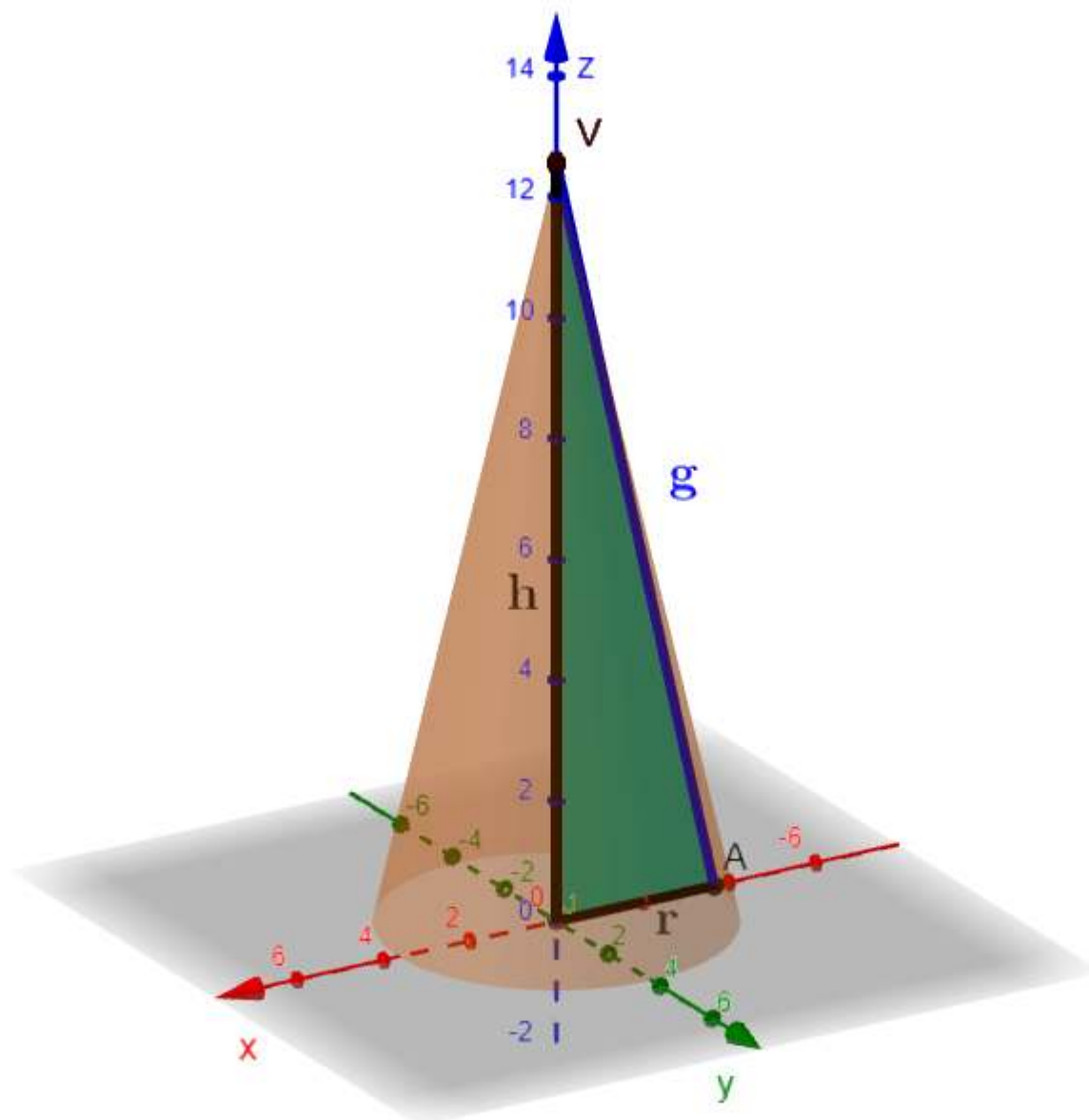
$$\frac{360^\circ}{2\pi g} = \frac{\alpha}{2\pi r} \Rightarrow \frac{360^\circ}{g} = \frac{\alpha}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{r}{g} 360^\circ$$

Tot seguit es pot demanar que trobin la relació entre la superfície (S), la generatriu i el radi. El raonament de proporcionalitat és similar a l'anterior, comparant l'angle interior amb la superfície del sector circular.

$$\frac{360^\circ}{\pi g^2} = \frac{\alpha}{S} \Rightarrow S = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi g^2 = \frac{r}{g} \frac{360^\circ}{360^\circ} \pi g^2 \Rightarrow S = \pi r g$$

D'aquesta manera, coneguda la superfície, S , i el radi de la base, queda determinada la generatriu, i també l'altura del con, ja que per Pitàgores:

$$h = \sqrt{g^2 - r^2} = \sqrt{\frac{S^2}{\pi^2 r^2} - r^2} = \frac{1}{\pi r} \sqrt{S^2 - \pi^2 r^4}$$



Font: Elaboració pròpia

I per tant, el volum del con es pot expressar en funció de la superfície, S , i el radi de la base, r .

$$\text{volum} = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h = \frac{r}{3} \sqrt{S^2 - \pi^2 r^4}$$

Arribat a aquest punt es pot experimentar amb un full de càlcul per tal de trobar quines mesures ha de tenir un con amb una àrea fixada, perquè assoleixi un volum màxim.

També es pot treballar a partir del full de GeoGebra [Paperines de la mateixa àrea](#) de Manel Martínez, o demanant als mateixos alumnes que utilitzin el programa per fer la construcció i arribar a les conclusions pertinents.

LA VOLTA AL MÓN EN... 8 EDIFICIS

Aquesta és una proposta molt interessant de l'[Equip ICE de Matemàtiques de la UdL](#) format per Germán Arbiol Oliver, Ramon Miquel Bergadà Marimon, Rosa Castillo Cervelló, M. Montserrat Córdoba Marsà, Andreu Grau Bernadó, Palmira Ortiz Escoda i Montserrat Siscart Alberich. Es tracta d'un [itinerari](#) format per nou unitats didàctiques i que podem trobar catalogat a l'ARC. Cada unitat, a excepció de l'última, té com a protagonista un cos geomètric i un edifici del món que el representa. És ideal per treballar com a projecte amb moltes connexions externes amb la geografia econòmica, política, la cultura, etc. Les activitats de les unitats són molt diverses i estan contextualitzades en el seu entorn. N'hi ha de resolució de problemes, de modelització, manipulables, de geometria dinàmica... La darrera unitat està pensada com a síntesi de tot l'itinerari. Pel que fa al **saber #3.MES.ME.E**, l'alumnat el pot assolir treballant qualsevol unitat de l'itinerari, però volem destacar especialment les unitats 5 i 7 que fan referència a la piràmide i l'Hotel Luxor, i al con i el Melbourne Central. La quantitat d'hores que s'ha d'emprar és gran si el vol fer tot. És important, per això, dissenyar com es vol dur a l'aula, tenint en compte la importància que tot l'alumnat pugui treballar tots els cossos geomètrics entre 2n i 3r d'ESO. En aquest sentit recomanem no repartir les unitats per grups de manera que un grup només treballi una part del contingut, encara que al final hi hagi una exposició de totes les investigacions i feines fetes. Les diferents propostes són prou riques perquè l'alumnat pugui mobilitzar totes i cadascuna de les competències específiques.

En l'exemple que mostrem aquí proposem fer un treball de les unitats 1 i 2 a 1r d'ESO, de les 3, 4 i 6 a 2n d'ESO, i de les 5, 7, 8 i 9 a 3r d'ESO.

En la mateixa [pàgina](#) de l'ARC hi ha un document amb una descripció detallada de l'itinerari, amb observacions didàctiques i metodològiques.

saber #3.MES.ME.F

El **saber #3.MES.ME.F** simplifica l'estudi de figures geomètriques complexes, afavorint la comprensió de les seves propietats i relacions espacials. És fonamental per convertir formes tridimensionals en representacions bidimensionals més manejables, potenciant el raonament geomètric i l'anàlisi visual. Activitats com desplegar un tetraedre o un con permeten a l'alumnat establir connexions entre dues i tres dimensions i desenvolupar estratègies efectives per resoldre problemes que involucren el càlcul de mesures o l'optimització de formes.

UNA FORMIGA EN UN TETRAEDRE

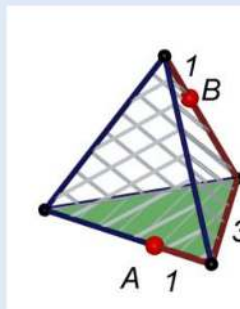
Un bon problema de matemàtiques és aquell que disposa l'alumnat davant d'un repte. Cal que sigui fàcil d'entendre i alhora permeti fer unes primeres exploracions i conjectures, però en cap cas ha de ser evident. El professor Ricard Peiró en té un bon recull en la seva [pàgina web](#), especialment per treballar el sentit de la mesura i l'espacial. Col·labora en la creació del [Calendari matemàtic](#) de la SEMCV, en què ens proposa el següent problema per als dies 20 i 21 de novembre de 2024:

20 ggb

21

En un tetraedre regular d'aresta 3 cm, col·loquem dos punts A i B en dues arestes oposades, a 1 cm de distància del vèrtex més proper.

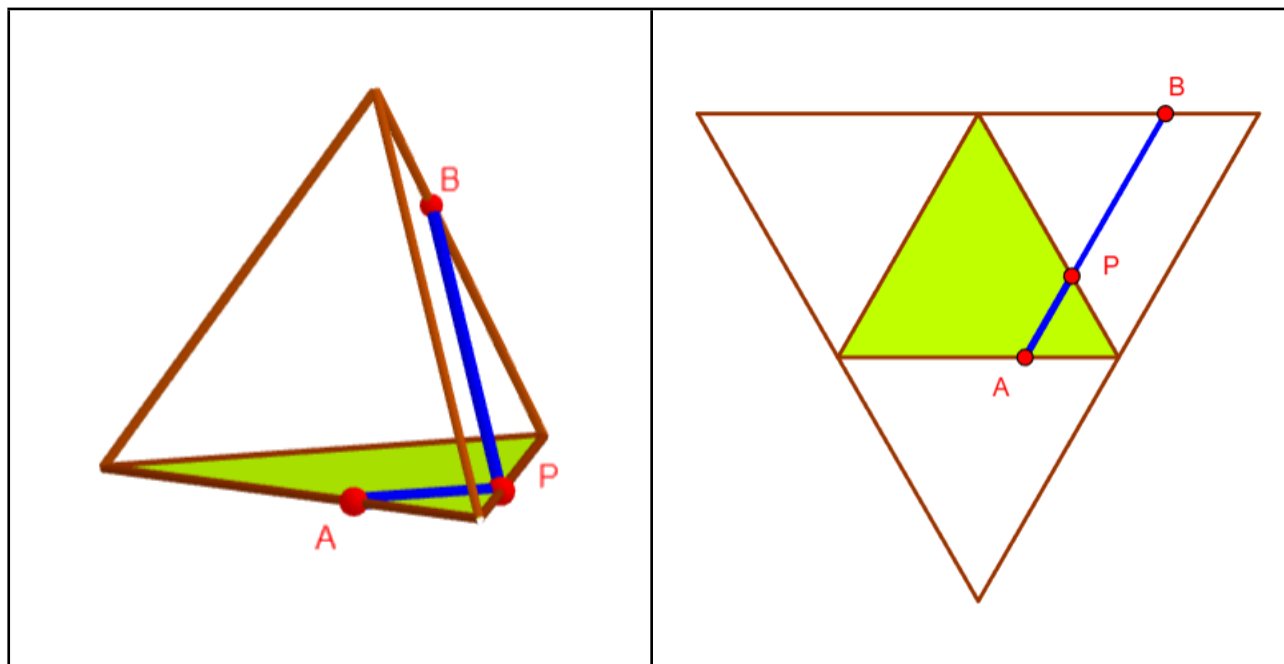
Calculeu la distància mínima que ha de recórrer una formiga per anar d'A a B si ha de passar per sobre de les cares.



Font: [Novembre de 2024](#)

Autoria: SEMCV

Una primera exploració amb GeoGebra pot ajudar a resoldre'l. És important acostumar l'alumnat a fer ús de les tecnologies i, en aquest cas, de les aplicacions de Geometria Dinàmica per tal d'interpretar alguns problemes. La mateixa construcció ja porta implícit un aprenentatge matemàtic.



Font: [Novembre de 2024](#)

Autoria: SEMCV

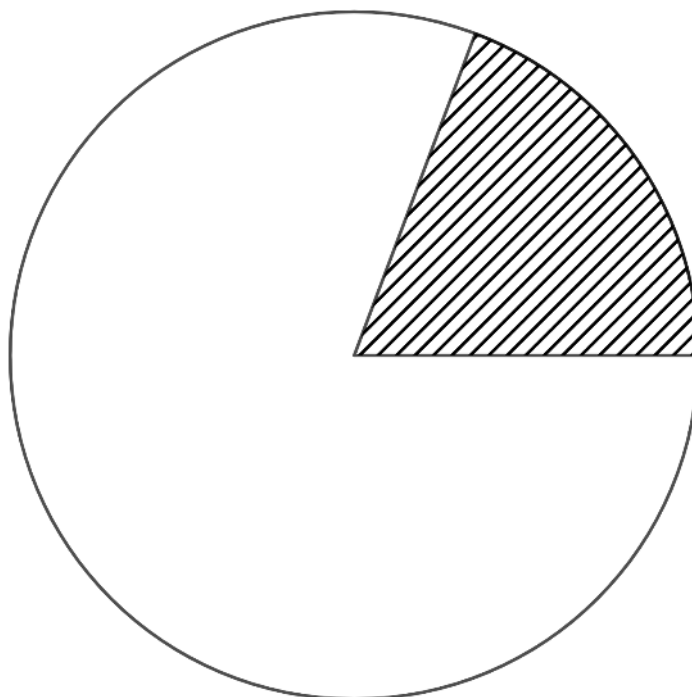
El desplegament del tetraedre és una estratègia fonamental per abordar el problema, ja que permet observar que la distància més curta correspon a la longitud del segment AB en el tetraedre desplegat. Per obtenir aquesta longitud, es poden aplicar diferents raonaments, com l'ús del teorema de Tales. Ara bé, aquesta estratègia pot no ser immediata per a l'alumnat, per la qual cosa, si s'escau, el docent haurà de proporcionar pistes o bastides per guiar-los en la seva descoberta.

Es poden trobar més propostes, fins a 90, en el llibre *Reptes de Geometria* (Peiró i Estruch, 2024).

EL MILLOR CON

Quan despleguem la superfície lateral d'un con, obtenim un sector circular amb un angle i una obertura determinats per les magnituds del con inicial. En aquest problema es planteja el procés invers:

*D'un cercle de radi 10 cm s'extreu un sector circular, amb el qual es construeix un con. Quin con tindrà el volum màxim? Aquesta activitat està extreta del volum 2 de la col·lecció de problemes *Points of Departure* (Hardy & Haworth, 1986).*



Font: Elaboració pròpia

Aquest problema és un repte excel·lent per treballar l'optimització a 2n de batxillerat. Tot i això, sense la necessitat d'arribar a una solució exacta, podem aproximar-nos a la resposta buscada de manera experimental.

Una possible seqüència didàctica podria ser començar la classe repartint als alumnes un full de paper amb un cercle de radi 10 cm imprès, incloent-hi el centre. Cada alumne fixa un angle del sector circular, assegurant que les obertures dels sectors siguin variades dintre del grup classe. A continuació, es retalla el sector i es construeix el con. Amb les dades inicials (radi i obertura del sector), es determinen les dimensions del con: quina és la seva alçada? Quin és el perímetre de la base?

Aquest procés permet observar que cada angle genera un con amb un volum diferent. Quins angles generen un volum nul? Dels cons construïts a classe, quin és el que té el volum més gran? Podria haver-hi un volum més gran que els obtinguts pel grup? De què depèn exactament el volum del con?

Finalment, es pot plantejar l'ús d'un full de càlcul per provar diverses obertures del sector circular i comparar resultats amb els cons construïts manualment, cercant el volum màxim de manera més precisa.

Estimació i relacions

Sabers

- A. Estimació de mesures de longituds, àrees i volums a partir de l'experiència o dels atributs d'altres objectes. **[ESS]**
- B. Coneixement i ús de l'error absolut i relatiu per convenir i adequar la precisió dels resultats en situacions de mesura. **[ESS]** **#NUM.QU**
- C. Formulació de conjectures sobre l'anàlisi de la incertesa associada a un fenomen aleatori, basant-nos en l'estimació i l'experimentació. **#EST.PI**

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

L'estimació i les relacions són elements fonamentals en el desenvolupament de competències matemàtiques a 3r d'ESO. Aquest bloc fomenta l'habilitat de prendre decisions informades basant-se en dades aproximades, especialment en contextos on la precisió absoluta no és viable o necessària. Això permet a l'alumnat enfrontar-se a situacions de la vida quotidiana amb rigor i coherència. Treballar amb estimacions, errors i conjectures és més que una pràctica matemàtica; és un procés de raonament crític que enllaça l'experiència directa amb conceptes abstractes, oferint un pont entre les matemàtiques i la quotidianitat.

Aquesta reflexió es fonamenta en la idea que la comprensió dels errors i la incertesa no només millora les competències matemàtiques, sinó que prepara els estudiants per a la presa de decisions en entorns canviants. Així, s'ofereix una visió de les matemàtiques com a eina viva i rellevant.

Comentaris sobre les connexions

Les connexions internes a les matemàtiques en aquest bloc són àmplies i inclouen la relació amb el sentit numèric, treballant els errors absoluts i relatius per analitzar resultats amb precisió. També s'explora el sentit estocàstic, amb l'anàlisi d'incertesa i formulació de conjectures en fenòmens aleatoris, i el sentit espacial, aplicant estimacions a mesures geomètriques com longituds, àrees i volums, oferint una base per a la comprensió integrada dels continguts matemàtics.

Pel que fa a les connexions externes, destaca la vinculació amb la física, per entendre la precisió i la incertesa en mesuraments, i amb la química, en el càlcul d'aproximacions i errors en processos experimentals. A més, s'aprofita la tecnologia per utilitzar eines digitals en les estimacions i l'anàlisi de dades. Aquestes connexions permeten situar l'aprenentatge en contextos quotidians, interdisciplinaris i propers a l'alumne.

Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

Els sabers essencials d'aquest bloc es focalitzen en dos aspectes clau. Primer, l'habilitat per estimar mesures de longituds, àrees i volums, utilitzant l'experiència prèvia i les característiques d'objectes coneguts com a referents. Aquest saber permet desenvolupar una intuïció matemàtica útil en contextos reals. En segon lloc, es treballa el coneixement de l'error absolut i relatiu, així com la seva aplicació per ajustar la precisió de resultats segons les necessitats específiques de cada situació de mesura, promovent un ús conscient i adequat de les dades matemàtiques.

Recursos i activitats

Recursos i activitats per treballar sabers concrets

saber #3.MES.ER.A

Desenvolupar de forma meticulosa el **saber #3.MES.ER.A** és essencial per comprendre i aplicar conceptes geomètrics en situacions reals. Aquesta pràctica permet als alumnes apropar-se a valors de longituds, àrees o volums de manera intuïtiva, utilitzant el coneixement previ i comparant dimensions amb objectes coneguts. Aquest saber convida a identificar les característiques geomètriques dels elements de l'entorn i relacionar-les amb referències familiars i potenciar l'experiència pràctica amb les matemàtiques.

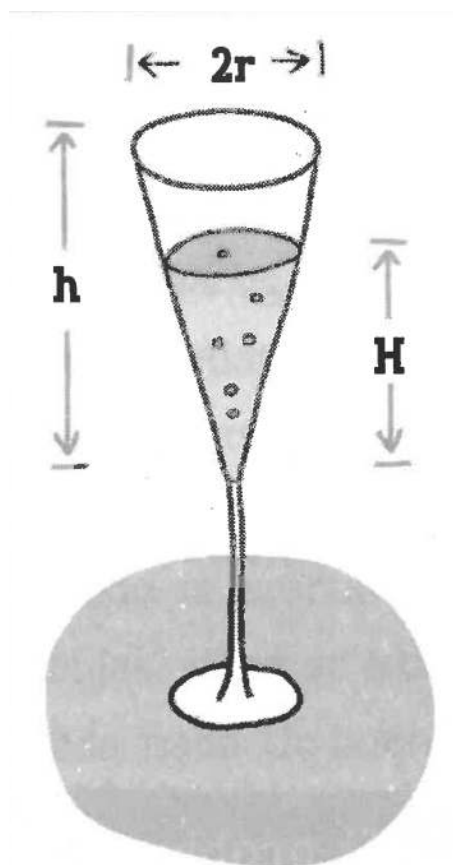
Els teoremes de Pitàgores i Tales, introduïts a 2n d'ESO i aprofundits en el curs actual, aporten eines útils per reforçar aquest procés. Pitàgores facilita l'estimació de longituds en contextos on no és possible mesurar directament, com calcular distàncies en triangles rectangles mitjançant relacions entre costats. Per la seva banda, Tales ofereix solucions pràctiques en l'estimació de proporcions o distàncies utilitzant ombres o mètodes visuals, especialment en objectes de grans dimensions o de difícil accés. Aquestes aplicacions no només desenvolupen la intuïció sinó que també connecten els alumnes amb estratègies geomètriques rigoroses.

Estimant mesures abans de mesurar-les amb precisió, els alumnes poden fer conjectures que s'aproximin als resultats reals, validant-les posteriorment i ajustant-ne els raonaments. Aquesta seqüència contribueix al desenvolupament del sentit geomètric i numèric, fomentant la creativitat i la capacitat crítica en tasques com la planificació d'espais o el disseny d'objectes. Aquesta pràctica esdevé fonamental per vincular les matemàtiques amb situacions quotidianes i afavorir una comprensió més profunda del món que ens envolta.

LA COPA DE CAVA

«En muchas fiestas y celebraciones donde aparecen las copas de cava a rellenar parece que una actitud ponderada entre la timidez del sorbito y la audacia del «copa llena, por favor», es que usted pronuncie la esperada frase «póngame media copa». Como siempre, a base de medias copas puede necesitar ser acompañado/a a casa en taxi o perder todos los puntos de su carné de conducir en su regreso motorizado, pero la discreción de las medias copas es siempre satisfactoria para el que bebe y discreta para el que reparte.

Si se trata de un vaso cilíndrico, será siempre fácil marcar la «media copa», pues esta se corresponde con la mitad de la altura.



Autoria: Claudi Alsina

Pero las copas de cava suelen tener forma de cono invertido. ¿Qué sucede si usted marca tímidamente con un dedo la mitad de la altura de la copa? Gracias a lo que Tales ya observó, si $h/2$ es la mitad de la altura de la copa el radio del círculo líquido, $r/2$, será la mitad del radio r que correspondería a la copa llena, por lo cual, recordando que el volumen del cono es un tercio del área de la base por la altura, su «media copa» le llevará a beber solo un octavo de la copa llena. [...]
(Alsina, 2010)

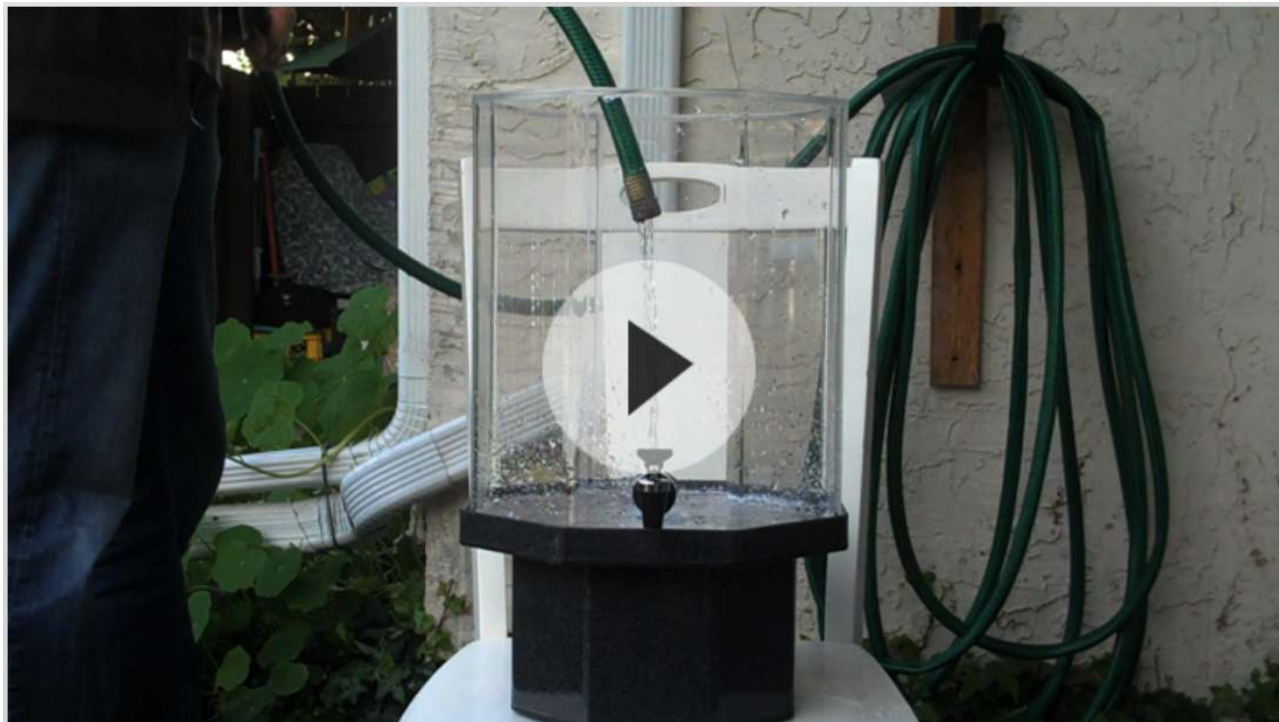
La lectura d'aquest text pot esdevenir el punt de partida d'un repte atractiu per portar a l'aula. Amb una copa en forma de con i una gerra d'aigua, es pot plantejar a l'alumnat una pregunta aparentment senzilla però plena de matisos: fins a quina altura hem d'omplir la copa perquè realment contingui la meitat del seu volum? Aquesta qüestió permet connectar conceptes geomètrics amb la vida quotidiana d'una manera sorprenent i significativa.

La dinàmica es pot iniciar demanant als estudiants que facin una estimació inicial, tot marcant amb el dit el punt on creuen que caldria arribar per aconseguir la «mitja copa». Posteriorment, es poden mesurar les propostes obtingudes i comparar-les amb el volum total del con mitjançant càlculs geomètrics rigorosos.

Finalment, es pot tancar l'activitat amb la lectura del fragment de Claudi Alsina, analitzant el raonament matemàtic que s'hi exposa i comparant-lo amb els resultats obtinguts a classe. Això donarà peu a una discussió sobre el càlcul precís de l'altura necessària per omplir exactament la meitat del volum de la copa, fet que aprofundeix en la relació entre proporcions geomètriques i volums.

WATER TANK

L'activitat dels tres actes de Dan Meyer, basada en el volum del dipòsit d'aigua, [Water tank](#), és un excel·lent recurs per treballar l'estimació de volums a través d'una experiència interactiva i motivadora.



Font: [Water tank](#)

Autor: Dan Meyer

El guió del recurs s'estructura en tres actes, destacant com es pot posar èmfasi en el procés d'estimació i verificació de volums:

Acte 1: La curiositat desperta les preguntes

La proposta comença amb la presentació d'un vídeo que mostra un gran dipòsit d'aigua de forma prismàtica, destacant com es comença a omplir d'aigua. En aquesta fase inicial, es busca generar sorpresa i curiositat. Sense oferir dades concretes, es demana als alumnes que plantegin preguntes rellevants sobre la situació. Algunes preguntes poden ser:

- Quina quantitat d'aigua cal per omplir el dipòsit?
- Quant de temps trigarà a omplir-se?
- Quin és el volum del dipòsit?

Aquest acte incentiva l'alumnat a reflexionar sobre com podrien estimar el volum del dipòsit abans de disposar de cap informació detallada.

Acte 2: Recollint dades i planificant la resolució

En aquest segon acte es proporcionen més dades visuals, com ara imatges del dipòsit des de diferents angles i altres mesures necessàries, com el diàmetre i l'altura. Es convida l'alumnat a planificar com estimar

el volum del dipòsit i a fer hipòtesis inicials. La geometria del cilindre entra en joc, i és un moment clau per reforçar el càlcul del volum de figures geomètriques.

Els alumnes treballen amb les dades disponibles per calcular aproximacions, però es fomenta que facin primer una estimació inicial basada en la seva intuïció. Aquesta estimació pot comparar-se amb els resultats finals per analitzar la precisió dels càlculs i entendre millor el procés d'estimació.

Acte 3: Validant i creant noves preguntes

Finalment, es presenta un vídeo que mostra el dipòsit ple i això permet validar els càlculs fets. Això genera un gran impacte, ja que els alumnes poden contrastar la seva estimació inicial amb el resultat real. En aquest punt, es poden plantejar noves preguntes com:

- Quina seria la quantitat necessària si el dipòsit tingués el doble d'altura?
- Quins altres factors influirien si el dipòsit no fos prismàtic? I si tingués forma de piràmide?

Aquest acte clou l'activitat reforçant la rellevància de les matemàtiques en problemes reals i fomentant la reflexió crítica sobre els mètodes utilitzats.

saber #3.MES.ER.B

La mesura, un dels fonaments de les matemàtiques, no només ens permet quantificar el món que ens envolta, sinó també establir connexions entre fenòmens aparentment allunyats. A 3r d'ESO aprofundirem en el **saber #3.MES.ER.B** per valorar el grau de precisió d'un resultat segons el context. Aquest enfocament convida l'alumnat a reflexionar sobre les limitacions inherents a tot procés de mesura, especialment en situacions on el mesurament directe no és viable.

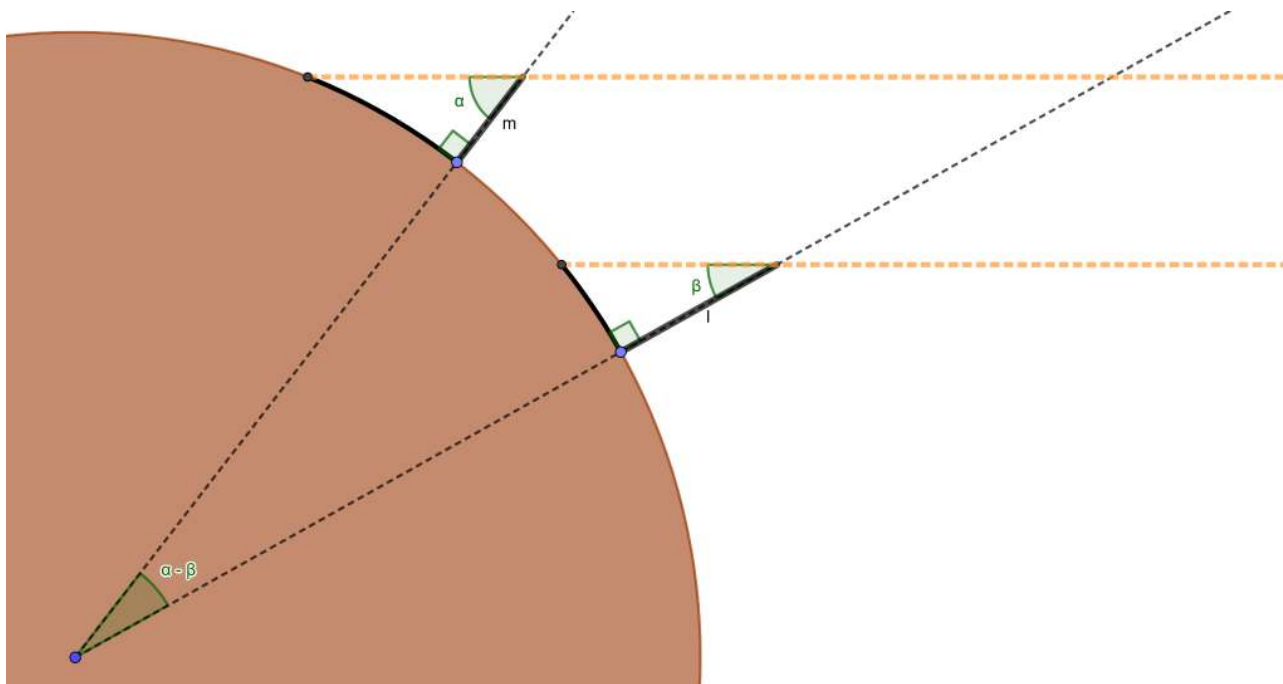
En aquest marc, esdevé fonamental treballar amb mètodes indirectes que amplien la perspectiva de sabers adquirits en cursos anteriors, com els que giren entorn del teorema de Pitàgores o el teorema de Tales. Aquest enfocament no només reforça la connexió entre geometria i mesura, sinó que també obre la porta a estudis inspiradors de la història de la ciència. Revisarem, per exemple, els procediments utilitzats per Eratòstenes per mesurar la circumferència de la Terra i els càlculs d'Aristarc de Samos per determinar la mida de la Lluna i la seva distància respecte de la Terra. Aquestes fites històriques ens permetran explorar com, a partir de mesures locals i raonament matemàtic, es poden obtenir resultats que abasten dimensions planetàries.

A més d'aquests exemples clàssics, també farem treballs de camp que permetin aplicar aquests coneixements en entorns quotidians. Per exemple, mesurarem l'alçada del centre educatiu o d'algun edifici emblemàtic del nostre municipi emprant mètodes indirectes. Aquestes activitats no només reforçaran la comprensió de conceptes matemàtics essencials, sinó que també permetran reflexionar sobre l'impacte de l'error absolut i relatiu en els càlculs, posant en relleu la importància de treballar amb mesures precises i ben raonades.

EL RADI DE LA TERRA

Un recurs valuós per introduir l'alumnat en el **saber #3.MES.ER.B** és inspirar-se en experiments realitzats fa segles a l'antiga Grècia. Una proposta enriquidora és visualitzar el fragment de la sèrie «Cosmos» de Carl Sagan ([Eratosthenes](#)), que explica de manera didàctica i visual el mètode d'Eratòstenes per determinar la circumferència terrestre. Aquest vídeo il·lustra l'enginy del científic grec i ajuda els estudiants a comprendre com una observació aparentment senzilla —la diferent longitud de l'ombra d'un pal en dues ciutats— pot conduir a conclusions sorprenents sobre la grandària del nostre planeta. Coneixent la distància entre

Alexandria i Syene (l'actual Assuan) i mesurant l'angle que es generava entre la punta d'un [gnòmon](#) i la seva ombra en ambdues localitzacions, Eratòstenes va poder aproximar la circumferència terrestre. A partir d'aquest càlcul, només cal un petit pas per determinar la longitud del radi de la Terra. Però, com de precisos van ser els seus resultats?



Autoria: Jordi Font

L'activitat pot continuar aprofundint en els factors que van generar errors en el càlcul d'Eratòstenes. És interessant analitzar aspectes com la suposició que Alexandria i Syene es trobaven exactament sobre el mateix meridià, la imprecisió en la distància estimada entre les dues ciutats i l'assumpció que els raigs solars que incidien sobre aquestes localitzacions eren estrictament paral·lels. Aquest tipus de discussió ofereix una oportunitat única per reflexionar sobre la influència dels errors, tant absoluts com relatius, en la precisió dels resultats, subratllant la importància de treballar amb aproximacions ben raonades i rigoroses.

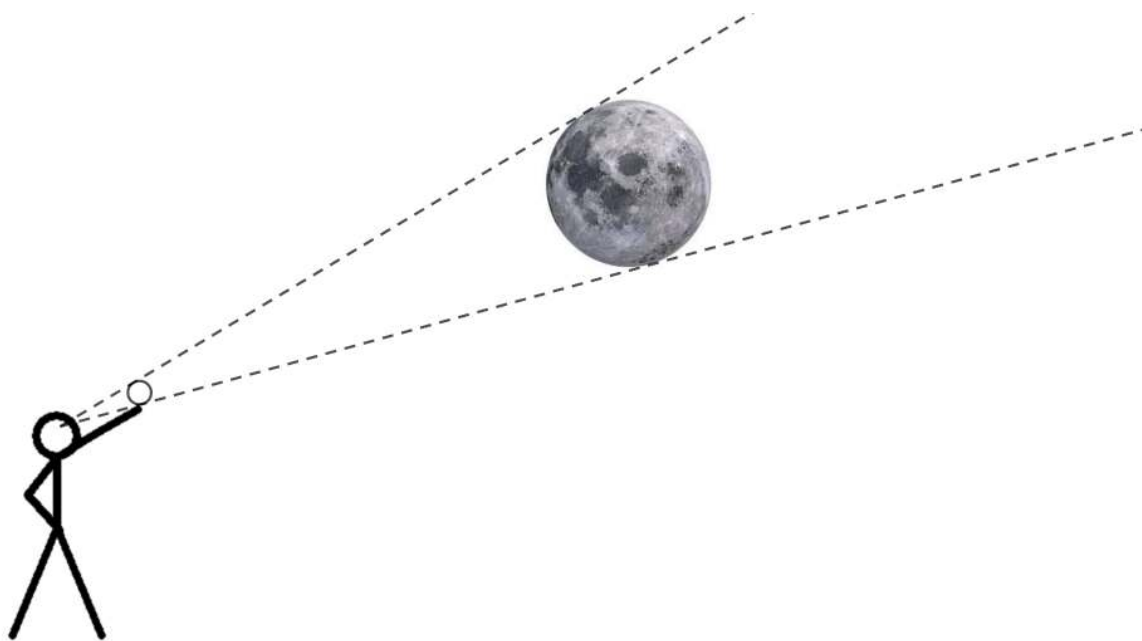
Finalment, es pot proposar la participació en el [Projecte Eratòstenes](#), que convida estudiants d'arreu del món a replicar el càlcul del radi terrestre en una experiència col·laborativa i experimental. El projecte consisteix a mesurar l'ombra d'un gnòmon al migdia solar durant el solstici i comparar les dades amb altres centres educatius situats a diferents latituds. Aquesta activitat connecta l'alumnat amb un treball científic pràctic, integrant coneixements de geometria i mesura, alhora que fomenta el treball en xarxa a escala global. Aquesta proposta combina teoria, història i pràctica, i ofereix a l'alumnat una comprensió profunda de com el raonament matemàtic pot transcendir els límits locals i proporcionar respostes a preguntes de dimensió planetària.

LES MESURES DE LA LLUNA

Un altre recurs interessant per continuar treballant el tema de la mesura indirecta, iniciat amb el càlcul del radi terrestre d'Eratòstenes, és explorar el treball d'Aristarc de Samos sobre la dimensió de la Lluna i la seva distància respecte de la Terra. Aristarc va fer un pas més en l'ús de l'observació i el raonament geomètric per desxifrar qüestions astronòmiques, emprant el teorema de Tales com a eina fonamental.

Aristarc va començar analitzant els eclipsis lunars, moments en què l'ombra de la Terra cobreix la Lluna. Observant aquests fenòmens, va concloure que la Lluna tenia aproximadament $\frac{1}{3}$ del diàmetre terrestre, basant-se en la comparació entre la mida de l'ombra de la Terra i el diàmetre lunar. Tot i que els seus càlculs van contenir errors significatius —ja que aproximadament el diàmetre de la Lluna és realment $\frac{1}{3,7}$ del de la Terra i no exactament $\frac{1}{3}$ —, aquest mètode va establir un precedent notable en l'ús de la geometria per determinar dimensions planetàries. A partir d'aquesta proporció, es pot introduir una connexió interessant amb el **saber #3.MES.ME.C:** si la relació entre els diàmetres és 1:3,7, quina relació existeix entre les superfícies dels dos cossos? I entre els seus volums?

A l'aula, aquest treball es pot complementar amb un experiment senzill però visualment impactant. Es tracta de determinar la distància aproximada entre la Terra i la Lluna utilitzant una moneda i el concepte d'angles visuals. L'activitat consisteix a mantenir una moneda a certa distància de l'ull fins que cobreixi exactament el perímetre aparent de la Lluna al cel. Sabent el diàmetre d'una moneda i la distància entre l'ull i aquesta, l'alumnat pot calcular l'angle visual de la Lluna i, emprant proporcions, estimar-ne la distància respecte a la Terra. Aquesta activitat introdueix de manera pràctica conceptes com la triangulació i el teorema de Tales, alhora que reforça la importància de les proporcions en el càlcul geomètric.



Autoria: Jordi Font

Per tancar l'activitat, es pot construir un model a escala del sistema Terra-Lluna utilitzant materials quotidians, com una pilota de bàsquet per representar la Terra i una pilota de tennis per a la Lluna. Sabent que el diàmetre de la Terra és unes 3,7 vegades el de la Lluna, les mides relatives de les pilotes poden ajustar-se fàcilment. Ara bé, perquè el model representi també la distància real, les dues pilotes haurien d'estar separades aproximadament 9,5 m. Aquest exercici ajuda a visualitzar la immensa separació relativa entre els dos cossos celestes i proporciona una comprensió tangible de les escales astronòmiques.

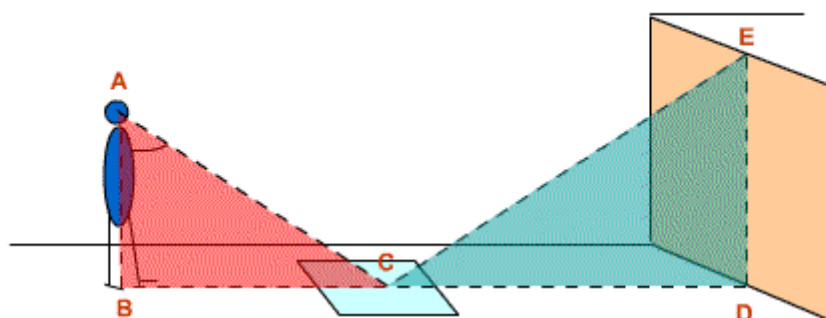
En la línia de la proposta descrita, pot ser molt interessant llegir la publicació de Maria Rosa Massa, [Una aproximació a l'obra d'Aristarc de Samos](#) (Massa, 2009), on s'exploren altres aspectes de la figura d'Aristarc de Samos i el seu treball en el camp de l'astronomia.

COM PODEM MESURAR AQUEST EDIFICI?

Una activitat senzilla però amb un gran potencial educatiu és intentar determinar l'alçada d'un edifici emblemàtic o, fins i tot, del mateix institut on estudia l'alumnat. La proximitat física i emocional amb l'edifici dona un plus d'interès i significat a l'activitat, i l'ús de mètodes diversos fomenta tant la creativitat com el pensament crític.

L'activitat comença amb una pregunta plantejada obertament: *Com podem mesurar l'alçada del nostre institut?* En aquest punt, es recullen les propostes de l'alumnat en una pluja d'idees que, molt probablement, seran algunes de les següents:

1. **Mitjançant l'ombra de l'edifici**, simulant el mètode utilitzat per Tales per calcular l'alçada de les piràmides. Es tracta de mesurar l'ombra del mateix edifici i comparar-la amb la d'un objecte de mida coneguda, com un pal o una persona, aplicant proporcions geomètriques.
2. **Fotografiant l'edifici amb una persona o objecte conegut al costat**, de manera que es pugui establir una proporció entre les altures observades a la imatge i les reals.
3. **Utilitzant un mirall i un làser**, en un procediment inspirat també en el teorema de Tales: un mirall es col·loca al terra a certa distància de l'edifici, i es busca un punt des d'on el reflex del cap de l'edifici sigui visible. Amb les distàncies del mirall a l'observador i a l'edifici i amb l'alçada de l'observador se'n pot calcular l'alçada. Es pot consultar l'ARC, on apareix la [proposta](#) d'Enric Brasó.
4. **Amb un llapis** com a referència visual: es pot observar l'edifici a través del llapis mantingut a certa distància i comparar-ne la mida aparent amb la d'una persona o objecte conegut proper, utilitzant proporcions.
5. Algunes propostes ja descrites anteriorment i d'altres d'allò més interessants es poden consultar en la publicació de Joan Jareño que porta per títol [Mesurar amb enginy\(s\)](#).



Font: [Mesurant amb un mirall](#)

Autoria: Joan Jareño

Un cop recollides les idees, l'alumnat es divideix en grups per posar-les en pràctica. Cada mètode implica amidaments directes i indirectes, cosa que permet contrastar els resultats obtinguts. Durant el procés, es poden anar registrant possibles dificultats, com errors en la presa de mesures, desviacions a causa de l'angle de la llum solar, o altres factors ambientals que puguin influir en els càlculs.

Amb les dades recollides, es duu a terme un estudi estadístic dels resultats obtinguts per cada mètode. Es calculen els valors mitjans i les desviacions, i es comparen els errors absoluts i relatius respecte al valor real de l'alçada (si es disposa d'aquest valor, com ara a través de plànols de l'edifici). Aquest pas permet reflexionar sobre la precisió i l'eficiència dels diferents mètodes, així com sobre les limitacions pràctiques i teòriques de cadascun.

Finalment, es fa una anàlisi crítica col·lectiva. L'alumnat discuteix els motius que han generat els errors observats per cada mètode i reflexiona sobre quins factors es podrien millorar en futurs experiments. Aquesta fase fomenta la reflexió sobre el procés científic en general: l'ús d'aproximacions, la gestió de l'error i la importància de combinar diverses tècniques per obtenir resultats fiables.

saber #3.MES.ER.C

L'anàlisi de fenòmens aleatoris continua a 3r d'ESO aprofundint en les bases establertes a 2n d'ESO. En aquesta nova etapa, posem l'atenció en esdeveniments no equiprobables amb el treball del **saber #3.MES.ER.C** que desafia encara més la intuïció de l'alumnat i que requereix una mirada més crítica i sistemàtica. El treball experimental i l'observació empírica esdevenen claus per comprendre com la probabilitat es manifesta en contextos reals, especialment quan els esdeveniments simples no tenen la mateixa probabilitat d'ocurrència. Situacions com el llançament d'una xinxeta, en què pot caure de punta o de costat, o l'ús de [tabes](#), exemplifiquen aquest tipus d'esdeveniments i ofereixen oportunitats per formular conjectures raonades basades en dades reals.

En aquest curs, a més d'analitzar els esdeveniments simples, ens endinsarem en els esdeveniments compostos no equiprobables, explorant com el seu comportament evoluciona a mesura que s'acumulen dades a través de múltiples experiments. Aquest treball no només ajuda a entendre millor la variabilitat inherent dels fenòmens aleatoris, sinó que també permet observar com els resultats tendeixen a estabilitzar-se, en línia amb el que descriu la llei dels grans nombres. D'aquesta manera, s'amplien i es consoliden els sabers associats al camp de la probabilitat.

LLANÇAMENT D'OBJECTES NO EQUIPROBABLES

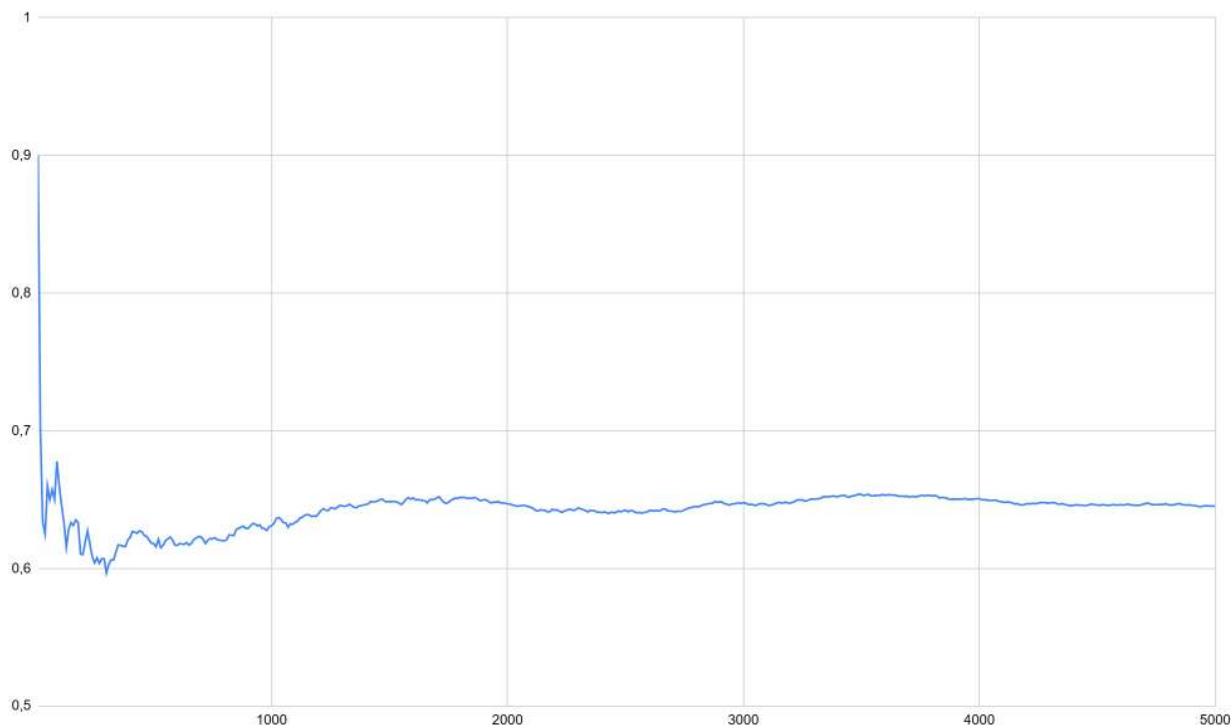
[Com cau una xinxeta?](#) és el títol i, alhora, la pregunta clau de l'activitat de l'ARC del professor Anton Aubanell. En aquest cas, és força evident que no podem aplicar la regla de Laplace, ja que els esdeveniments «xinxeta tombada» o «xinxeta cap amunt» no han de ser pas equiprobables. L'única manera de determinar el grau d'incertesa de cadascun dels dos esdeveniments és a través de l'experimentació.



Font: [Com cau una xinxeta?](#)

Autor: Anton Aubanell

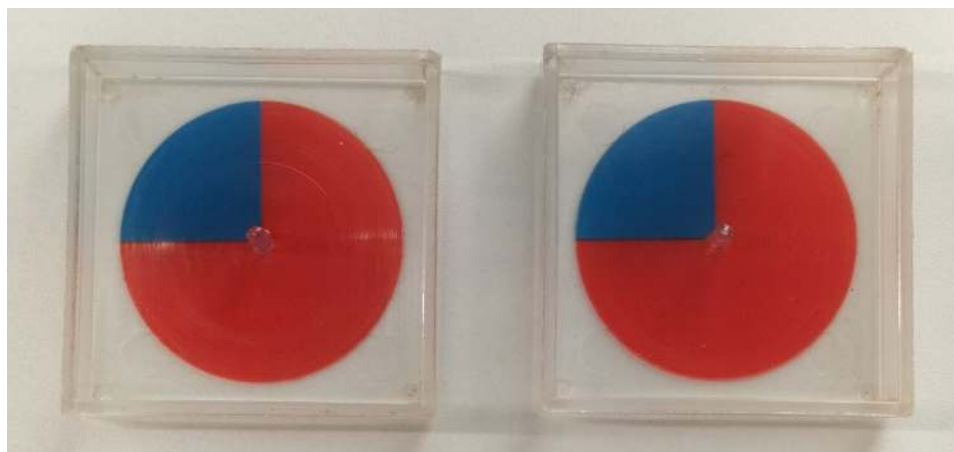
Una proposta que pot ser molt efectiva consisteix a repartir 10 xinxetes a cada parella d'estudiants d'un grup classe. Cada parella repeteix l'experiment 20 vegades (equivalent a llançar un total de 200 xinxetes) i introdueix els resultats de cadascun dels 20 experiments en un formulari. En una classe de 30 alumnes (15 parelles), es podrien analitzar els resultats de 3.000 xinxetes (300 llançaments de 10 xinxetes). Una vegada recollits tots els experiments, s'analitzen els resultats obtinguts. Una primera aproximació podria ser l'estudi de la freqüència relativa dels dos casos possibles («tombada» o «cap amunt»). Un segon estudi, encara més interessant, seria observar com evolucionen les freqüències relatives a mesura que s'acumulen les dades. A la imatge adjunta es pot observar el comportament de la freqüència relativa associada a l'esdeveniment «cap amunt» en funció del nombre acumulat de llançaments (en aquest cas, fins a 6.000).



Autoria: Elaboració pròpia

Si es vol fer un estudi més detallat, es podria construir un diagrama de barres amb les freqüències relatives (o absolutes) dels esdeveniments 0, 1, 2..., 10 xinxetes «cap amunt» en llançar 10 xinxetes. Això permetria observar que, tot i que aproximadament $\frac{2}{3}$ parts de les vegades la xinxeta roman «cap amunt», hi ha ocasions en què, en un llançament de 10 xinxetes, totes 10 poden acabar tombades.

Activitats similars a la que s'acaba de descriure es poden fer amb ruletes amb sectors circulars de diferents colors (vegeu imatge adjunta) o amb maquinetes de fer punta. Per a més informació, podeu consultar l'[activitat](#) catalogada a l'ARC, d'Enric Brasó.



Font: [Ruletes de la Caixa de Varga](#)

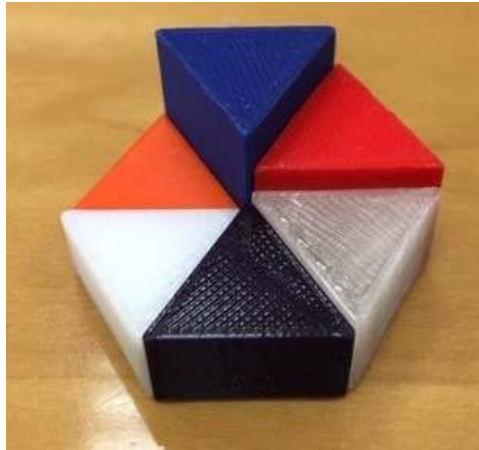
Autoria: Institut El Joncar

Un altre exemple històricament interessant són les tabes, daus no equiprobables fets amb astràgals. L'ús de les tabes està documentat des de l'antiga Grècia, i encara avui es poden trobar llocs a Espanya i Sud-amèrica on es continua jugant amb elles. En qualsevol cas, el fet que els daus no estiguin ben calibrats ofereix a l'alumnat una oportunitat per fer-ne un estudi similar al descrit al començament d'aquest text.

L'ESTUDI DE DAUS PRISMÀTICS

En la campanya [Impressió 3D i matemàtiques](#) del CREAMAT, trobem l'activitat [Daus prismàtics](#). Aquesta proposta té un perfil similar a altres activitats vinculades al «Llançament d'objectes no equiprobables», esmentada en el **saber #3.MES.ER.C**, i segueix un enfocament similar en el treball amb l'alumnat. Tanmateix, el que fa que aquest recurs tingui un caràcter singular és que és l'alumnat mateix qui dissenya els seus daus.

En el document associat a aquesta activitat, s'analitzen daus prismàtics amb una mateixa base però amb altures diferents. Això planteja preguntes interessants: com es comportaran els esdeveniments «bases triangulars» i «cares laterals» en funció de l'altura del dau? Determinar les seves probabilitats de manera teòrica pot semblar un repte complex, gairebé inassolible. Tanmateix, mitjançant l'anàlisi de les freqüències relatives obtingudes experimentalment i amb l'ajuda de la llei dels grans nombres, els estudiants poden consolidar de manera significativa el **saber #3.MES.ER.C**.



Font: [Daus prismàtics](#)

Autoria: CREAMAT

El fet que, en els darrers temps, s'hagin anat incorporant impressores 3D als centres educatius fa que no puguem desapropiar l'oportunitat de generar els nostres daus per dur a terme investigacions matemàtiques.

L'ATZAR TÉ PATRONS?

L'entrada [L'atzar té patrons?](#) del Bloc del Calaix de Joan Jareño té per objectiu com d'aleatori pot ser una sèrie de llançaments de monedes amb cares (C) i creus (X). En el text apareixen diferents estudis que es poden dur a terme a l'aula de manera graduada, amb una entrada suau i avançant en la seva profunditat.

D'entrada, sembla molt plausible (altrament, podríem pensar que la moneda està trucada) que, aproximadament, la meitat dels llançaments seran cara i la meitat seran creu. D'altra banda, sembla igual d'evident que molt difícilment podríem obtenir, en una seqüència de 20 tirades, la següent seqüència:

CXCXCXCXCXCXCXCXCXCXC

Tot i que la freqüència relativa de cares i creus ha estat la mateixa, hom podria sospitar que aquesta seqüència no ha estat generada aleatòriament (tot i ser possible, és poc probable). Quin és el problema? Que no es donen ratxes de més de dues repeticions i «facin una seqüència tan purament alternada sembla poc natural», tal com apunta el mateix autor. Partint de l'estudi de les ratxes que apareixen en una seqüència llarga, podem analitzar fins a quin punt una seqüència de tirades és realment aleatòria.

Blocs de competències: processos matemàtics i gestió socioemocional

El conjunt de sabers que constitueixen el sentit de la mesura, com tots els altres sentits, s'han de relacionar amb el conjunt de competències del currículum. Sense un coneixement dels sabers difícilment es poden desenvolupar els processos per avançar en l'assoliment de les competències i, d'altra banda, la manera com s'introdueixen, es construeixen i s'utilitzen els sabers és clau per fer un treball competencial.

Així doncs, tots els sabers poden contribuir a desenvolupar qualsevol competència si es treballen en activitats adequades. Igualment, un saber pot contribuir a desenvolupar diverses competències.

Es presenta la relació entre els sentits i les competències específiques a través dels processos: Resolució de problemes (competències específiques CE 1 i CE 2), Raonament i prova (competències específiques CE 3 i CE 4), Connexions, on distingim les internes (competència específica CE 5) i les externes (competència específica CE 6), Comunicació i representació (competència específica CE 7) i Gestió socioemocional (competències específiques CE 8 i CE 9).

Aquesta relació, pel que fa al sentit de la mesura, es concreta, en el marc d'aquest exemple, de la manera que es descriu en els apartats següents, tot i que poden existir altres anàlisis igualment vàlides.

Resolució de problemes (CE 1 i CE 2)

Treballar el sentit de la mesura a 3r d'ESO requereix un enfocament centrat en la resolució de problemes que connectin els continguts matemàtics amb situacions properes a l'alumne. És essencial plantejar reptes basats en contextos quotidians on les relacions geomètriques i la mesura siguin protagonistes, per tal de permetre a l'alumnat experimentar amb estratègies diverses i abordar el càlcul de longituds, superfícies o volums. Aquest enfocament fomenta la comprensió de conceptes clau, com l'ús de proporcions en figures semblants o la determinació de mesures indirectes a través de teoremes com els de Tales i Pitàgores.

La presentació de situacions de resposta no immediata és clau per motivar la reflexió i el debat entre iguals. Aquestes activitats han d'estar dissenyades per generar discussions, de manera que l'alumnat tingui l'oportunitat de justificar els seus raonaments i explorar diferents aproximacions a la resolució del problema. La gestió docent en aquest procés és fonamental, plantejant preguntes obertes que ajudin a descobrir relacions geomètriques i numèriques complexes i a construir un raonament més profund.

Finalment, és important incloure moments de valoració i reflexió sobre els resultats obtinguts, considerant possibles errors i la seva rellevància. Això ajuda els alumnes a entendre la precisió i les limitacions dels càlculs i a aplicar aquests coneixements a altres contextos pràctics. Aquesta metodologia no només reforça les competències matemàtiques, sinó que també fomenta un aprenentatge actiu i connectat amb la realitat.

Sabers

Alguns sabers d'aquest sentit fan referència directa al procés de resolució de problemes. Per exemple:

- El **saber #3.MES.ME.C** facilita que l'alumnat desenvolupi estratègies per abordar situacions en què les proporcions geomètriques són fonamentals. Aquest treball permet aplicar raonaments lògics de manera rigorosa, impulsant la recerca de solucions adequades en contextos diversos.
- El **saber #3.MES.ME.D** permet que l'alumnat utilitzi els teoremes de Tales i Pitàgores per abordar el càlcul de mesures indirectes en diversos contextos. Aquesta aplicació fomenta el desenvolupament de raonaments lògics, alhora que potencia l'habilitat de connectar conceptes geomètrics amb situacions reals i facilita la recerca de solucions precises i adaptades a les necessitats plantejades.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers fan referència directa al procés de resolució de problemes, i és que no volem perdre l'oportunitat de recordar com d'important és que les classes de matemàtiques siguin impartides sota un ambient de resolució de problemes, ja que aquests són l'essència de les matemàtiques. Amb tot, a tall d'exemple, podem esmentar que:

- En el **saber #3.MES.ME.C** trobem la seqüència d'activitats del professor Dan Steward titulada *Qüestions relatives al volum de cilindres*, que se centra en l'estudi del volum dels cilindres. Aquestes activitats ofereixen una introducció accessible i connectada a situacions reals. Entre els casos destacats, s'analitzen com varia el volum d'un cilindre quan se'n dupliquen les dimensions (diàmetre i altura) i quina és la relació entre els volums quan el diàmetre es duplica però l'altura es redueix a la meitat.
- Dins de les activitats relacionades amb el **saber #3.MES.ME.D**, en l'activitat [Tibant la corda](#) de Joan Jareño es planteja calcular l'altura màxima que pot assolir una corda de 101 metres lligada entre dos banderins de córner d'un camp de futbol de 100 metres. Mitjançant estimacions i experimentació, els alumnes descobreixen que aquesta altura màxima s'assoleix estirant la corda des del punt mitjà, fins a arribar a més de 7 metres, una alçada suficient perquè hi pugui passar una girafa. El teorema de Pitàgores permet resoldre el problema, i l'activitat es pot ampliar introduint el concepte d'el·lipse i lloc geomètric per explorar la corba formada pels punts d'altura màxima.
- La proposta extreta de la col·lecció *Points of Departure*, titulada *El millor con*, planteja el repte d'identificar quin con té el volum màxim a partir d'un cercle de radi 10 cm, del qual s'extreu un sector circular. Un cop construït el con amb el sector seleccionat, es treballen les dimensions del con resultant, com l'alçada i el perímetre de la base, analitzant com varien segons l'angle del sector. L'activitat permet explorar la relació entre l'obertura del sector i el volum del con, destacant com cada angle genera un volum diferent i identificant quins produeixen volums extrems, com nul o màxim. Aquesta proposta és un excel·lent exemple per treballar el **saber #3.MES.ME.F** en un context de resolució de problemes.

Raonament i prova (CE 3 i CE 4)

El raonament i l'argumentació, a partir de l'ús de material manipulatiu o tecnològic, permet deduir relacions entre magnituds i les seves expressions, fet que genera nou coneixement matemàtic. En el desenvolupament de la CE 3, l'alumnat adquireix la capacitat de formular conjetures pròpies, analitzar-les críticament, modificar-les, si cal, i validar-les novament mitjançant un procés iteratiu.

Les situacions de mesura directa, plantejades com a problemes, promouen l'organització de dades, la planificació d'estratègies i la descomposició en tasques simples per assolir una solució. Aquest procés desenvolupa el pensament computacional, especialment en el tractament de dades. Així mateix, es posa de manifest en la transició de la mesura directa a la mesura indirecta, en què l'alumnat identifica i aprofundeix les relacions entre magnituds per deduir-ne unes a partir del mesurament d'altres, fet que consolida una comprensió profunda de les interconnexions matemàtiques.

Sabers

Alguns sabers d'aquest sentit fan referència directa al procés de raonament i prova. Per exemple:

- El **saber #3.MES.ME.B** implica utilitzar estratègies visuals i manipulatives, com el desplegament de figures o la descomposició en formes més senzilles, per facilitar el càlcul de longituds, àrees i volums. A través de material físic o aplicacions de geometria dinàmica, els estudiants poden explorar i aplicar conceptes geomètrics de manera pràctica i intuïtiva.

- El saber **#3.MES.ME.E** permet als estudiants diferenciar entre les propietats d'àrees i volums de cossos geomètrics com les piràmides i els cons, desenvolupant habilitats per aplicar fórmules específiques en cada cas. L'alumnat ha de poder utilitzar argumentacions i demostracions per justificar el càlcul de les àrees i els volums, les quals afavoreixen la comprensió profunda de les relacions geomètriques i les tècniques d'aproximació i demostració.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers fan referència directa al procés de raonament i prova. Per exemple:

- L'activitat [Arquimedes a través d'una taronja](#) permet als alumnes deduir la fórmula de l'àrea d'una esfera ($4\pi r^2$) mitjançant una experiència pràctica amb taronges. En tallar una taronja per la meitat i estampar els cercles resultants sobre paper, els alumnes poden observar la quantitat de cercles necessaris per cobrir l'àrea de l'esfera, basant-se en l'estimació de la pela. Aquest procés fomenta l'ús del raonament per arribar a la conclusió de manera intuïtiva, combinant la manipulació pràctica amb una comprensió conceptual de les relacions geomètriques.
- El recurs de [Volums amb aigua](#) del CREAMAT permet als alumnes explorar la relació entre els volums de cossos geomètrics com piràmides, prismes, esferes, cons i cilindres a través d'activitats d'experimentació pràctica. Mitjançant el transvasament de líquids entre diferents objectes de metacrilat, els estudiants poden observar com es relacionen els volums de manera intuïtiva abans d'aplicar raonaments algebraics. L'ús d'aplicacions com GeoGebra facilita la visualització de les relacions i ajuda a reforçar el procés de deducció i raonament, establint connexions entre conceptes geomètrics i el principi de Cavalieri per justificar les igualtats de volums.
- El recurs La Semblança en una, dues i tres dimensions inspirat en el mòdul del MMACA «Longitud, àrea i volum», ofereix un conjunt d'activitats que permeten explorar la relació entre longituds, àrees i volums a través de mòduls experimentals. A partir de la manipulació de circumferències, tubs i cilindres, els estudiants poden descobrir que la relació entre les dimensions de les figures segueix patrons de semblança, com la relació entre longituds, àrees i volums. El material manipulatiu i les eines digitals com GeoGebra ajuden a visualitzar aquestes connexions, i els alumnes poden deduir que la raó entre els volums de figures de semblança 1:K és 1:K³. Aquest procés fomenta el raonament i la prova a partir de l'experimentació i les conjectures, proporcionant un camí cap a la formalització de les propietats geomètriques.

Connexions amb altres parts de la matemàtica (CE 5)

Les connexions entre el sentit de la mesura i altres àmbits de les matemàtiques sorgeixen de manera natural, tant quan la mesura forma part del procés d'altres sabers com quan la seva aplicació és l'objectiu final d'una activitat. Això és especialment evident en activitats relacionades amb el sentit espacial o estocàstic, en què la mesura pot ser un element essencial del desenvolupament. A més, també trobem connexions amb el sentit numèric en treballar amb nombres i quantitats, com en l'ús de la proporcionalitat numèrica i geomètrica, que enforteixen els sabers comuns dels sentits numèric i espacial. Aquests processos, juntament amb les simulacions per mesurar la incertesa, impliquen l'ús de pensament computacional, el qual està vinculat al sentit algebraic. Proposar situacions d'aprenentatge que fomentin la creació de connexions entre diferents conceptes i procediments matemàtics ajuda l'alumnat a desenvolupar una comprensió més àmplia del coneixement matemàtic i li permet percebre les matemàtiques com un tot integrat i no com un conjunt de parts aïllades. Aquesta visió global facilita l'elaboració de diverses estratègies per resoldre problemes.

Sabers

Alguns sabers treballats en el sentit de la mesura estan molt presents en tota la matemàtica, esdevenen eixos de connexió interna i, per tant, són peces fonamentals en el desenvolupament de la competència CE 5:

- El **saber #3.MES.MA.A** és essencial per comprendre com les diferents unitats poden expressar la mateixa magnitud en diversos contextos. A través d'aquest procés, l'alumnat adquireix habilitats per resoldre problemes en què es requereix fer comparacions de volums i capacitats en situacions diverses, com en àmbits pràctics de la vida quotidiana o en altres àrees de les matemàtiques tot establint connexions amb el sentit numèric.
- El **saber #3.MES.ER.C** és fonamental per desenvolupar la capacitat d'identificar i analitzar la incertesa en fenòmens aleatoris. Mitjançant l'estimació i l'experimentació, l'alumnat és capaç de formular conjectures sobre aquests fenòmens, establint connexions amb el sentit estocàstic.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers aporten o utilitzen connexions internes. Per exemple:

- La proposta didàctica [Una tessel·lació amb triangles](#) utilitza la construcció de GeoGebra [Tes triangles](#) per estudiar les relacions entre perímetres i àrees en funció d'un factor d'escala. L'alumnat treballa en grups per fer observacions i formular preguntes sobre les relacions geomètriques i algebraïques. L'activitat, a més, fomenta la connexió entre els sentits espacial, numèric i de la mesura, la qual cosa facilita l'aprenentatge mitjançant la manipulació visual i el treball en equip, i aprofundeix en la comprensió dels patrons geomètrics i la suma de nombres.
- Un altre exemple de recurs per treballar el **saber #3.MES.MA.D** és l'activitat [Corones circulars](#). A través d'aquesta proposta, l'alumnat descobreix que l'àrea d'una corona circular es calcula com la diferència entre les àrees de les circumferències que la defineixen. Mitjançant el teorema de Pitàgores, es demostra que l'àrea d'una corona circular depèn únicament del segment m , independentment del radi r . Això revela que dues corones circulars amb dimensions aparentment diferents poden tenir la mateixa superfície. L'activitat facilita una comprensió integrada de la geometria i l'àlgebra, utilitzant representacions gràfiques i formulacions d'equacions.
- L'activitat [Com cau una xinxeta?](#) exemplifica com treballar el **saber #3.MES.ER.C** tot explorant la incertesa en fenòmens aleatoris no equiprobables mitjançant l'experimentació. Els alumnes llancen xinxetes en parelles i analitzen les freqüències relatives dels esdeveniments «cap amunt» i «tombada». El treball col·lectiu del grup classe permet acumular un gran volum de dades i observar l'evolució d'aquestes freqüències. A més, es poden elaborar diagrames de barres per estudiar la distribució dels resultats. Activitats similars inclouen experiments amb ruletes o daus no equiprobables, com les tabes antigues, fet que ofereix connexions amb contextos històrics i matemàtics.

Connexions amb altres matèries i amb l'entorn (CE 6)

El sentit de la mesura s'integra de manera natural en una gran varietat d'àmbits de l'entorn i disciplines no estrictament matemàtiques. Presentar contextos quotidians on la mesura és imprescindible permet establir connexions entre les matemàtiques i altres matèries, alhora que es vincula amb situacions properes a l'alumnat. L'ús d'instruments de mesura en contextos històrics ens ofereix una perspectiva científica que consolida aquests enllaços.

A més, aspectes com les estimacions, el control i la propagació de l'error són procediments fonamentals que

connecten les matemàtiques amb àrees com la física, la química o la tecnologia, i tenen aplicacions pràctiques en el dia a dia.

Sabers

A continuació s'indiquen, a tall d'exemple, algun d'aquests sabers:

- El **saber #3.MES.ME.A** facilita connexions fonamentals entre les matemàtiques i disciplines com la física, la tecnologia i les ciències naturals. Aquest saber permet a l'alumnat interpretar i aplicar conceptes matemàtics en contextos quotidians i professionals, com la construcció d'edificis, la cartografia o el disseny d'objectes. L'elecció i ús adequats d'unitats, juntament amb la comprensió de les seves implicacions, enllacen directament el treball matemàtic amb la precisió i l'eficiència requerides en altres àmbits, fet que estableix vincles clars entre les matemàtiques i l'entorn que ens envolta.

Recursos

Molts dels recursos descrits per treballar diferents sabers del sentit de la mesura ofereixen oportunitats per fer connexions externes. Per exemple:

- Els recursos Els embassaments a Catalunya i Ampolles i recipients connecten de manera clara amb el **saber #3.MES.MA.A**, ja que treballen la selecció i ús d'unitats de mesura adequades en contextos quotidians. A través de l'anàlisi de les reserves d'aigua a Catalunya, es pot explorar la magnitud d'un hectòmetre cúbic i visualitzar-lo comparant-lo amb referents com piscines olímpiques. Això fomenta la comprensió de la capacitat i l'impacte ambiental del consum d'aigua. Paral·lelament, Ampolles i recipients proposa reflexionar sobre unitats mètriques i imperials analitzant-ne les diferències i aplicacions, així com les decisions culturals i històriques que determinen capacitats com les de les ampolles de vi. Aquests recursos no només desenvolupen el sentit de la mesura, sinó que també connecten les matemàtiques amb l'entorn i altres disciplines, promovent un aprenentatge pràctic i contextualitzat.
- L'activitat [Goniòmetres per a treballs de camp](#) d'Anton Aubanell és una proposta per treballar el **saber #3.MES.ME.A**, centrada en la construcció de goniòmetres i clinòmetres. Els alumnes aprenen a obtenir mesures directes, tot tenint en compte les limitacions de precisió dels instruments. Per minimitzar errors, es recomana fer moltes observacions i treballar amb la mitjana dels resultats. L'activitat també inclou experiències sobre mesura d'angles, com els d'elevació, depressió en contextos propers a l'alumnat.
- Els recursos sobre El radi de la Terra i Les mesures de la Lluna estan estretament vinculats per la seva temàtica de mesura indirecta i la seva connexió amb la història de la ciència. Ambdós poden ser treballats de manera seqüenciada per aprofundir en el **saber #3.MES.ER.B**. El primer, inspirat en l'experiment d'Eratòstenes, utilitza el càlcul de la circumferència terrestre per introduir conceptes de mesura i precisió mitjançant l'ús de gnòmons i l'observació de les ombres. D'altra banda, el segon recurs aplica el raonament geomètric per calcular la distància entre la Terra i la Lluna i la seva relació dimensional. Ambdues activitats no només permeten treballar conceptes matemàtics, com el teorema de Tales i les proporcions, sinó també connectar-los amb l'experimentació pràctica, mitjançant l'ús de models i observacions astronòmiques.

Totes aquestes activitats contribueixen al desenvolupament de la competència CE 6.

Comunicació i representació (CE 7)

La comunicació efectiva i l'ús precís del llenguatge són fonamentals en activitats que posen de manifest el

sentit de la mesura. L'intercanvi d'idees durant la resolució de problemes, la discussió i els acords presos en grup, així com l'expressió oral, escrita i gràfica, contribueixen a generar coneixement nou. L'ús adequat d'esbossos, escales, desplegaments, i altres eines gràfiques, juntament amb programes informàtics o instruments de representació, dona significat i persistència a les idees matemàtiques relacionades amb la mesura, la qual cosa facilita la resolució de problemes. La selecció de les unitats de mesura correctes és crucial per entendre les situacions de mesura plantejades i interpretar els resultats obtinguts. És molt important que l'alumnat desenvolupi la capacitat de representar amb precisió les dades obtingudes en processos de mesura directa, ja que una bona representació i exactitud no només afavoreixen la lectura i interpretació de les dades, sinó que també ajuden a evitar l'increment d'errors.

Sabers

Algun saber del sentit de la mesura pot contribuir de manera especial al desenvolupament de la competència CE 7. Per exemple:

- El **saber #3.MES.ME.F** és clau per resoldre problemes geomètrics relacionats amb la mesura. A través d'aquesta competència, l'alumnat aprèn a transformar formes tridimensionals en representacions bidimensionals, la qual cosa facilita la comprensió de les seves propietats i de les relacions entre les diferents dimensions. El procés inclou l'ús d'esbossos, projeccions, vistes en planta i alçat, desplegaments, etc., que permeten visualitzar de manera més clara les característiques dels objectes, com la seva altura, base o volum. Aquesta representació és essencial per resoldre problemes que impliquen el càlcul de volums, àrees de superfície o altres propietats geomètriques. A més, en aquest context, és fonamental desenvolupar la capacitat d'interpretar i crear representacions precises, ja que una bona representació plana facilita l'anàlisi de la figura tridimensional i l'aplicació de teoremes i mètodes de mesura, com el teorema de Pitàgores o les relacions entre volums i superfícies.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers del sentit de la mesura fan referència al procés de comunicació i representació. Per exemple:

- Tres quarts de llum, esmentada en el **saber #3.MES.ME.C**, promou la comunicació i representació matemàtica a partir de la fotografia. L'anàlisi de la imatge planteja preguntes sobre fraccions i geometria, estimulant la formulació i justificació de conjectures, amb eines com el GeoGebra per validar-les. Aquest enfocament afavoreix l'expressió d'idees i fomenta la connexió entre representacions visuals i conceptes abstractes.
- L'activitat Un recipient de 100 ml, recollida en el **saber #3.MES.ME.E**, convida l'alumnat a explorar la relació entre geometria i optimització a través de la modelització amb GeoGebra. Treballant amb piràmides de base poligonal regular, es planteja l'objectiu de minimitzar l'àrea total mantenint una capacitat fixa. L'ús del programa permet visualitzar i analitzar les figures creades, enriquint el procés d'experimentació i raonament matemàtic.
- La formiga en un tetraedre, proposta de Ricard Peiró en el calendari matemàtic de la SEMCV per als dies 20 i 21 de novembre de 2024, planteja un repte geomètric que convida l'alumnat a explorar i raonar mitjançant eines digitals. La resolució del problema, que exemplifica el treball del **saber #3.MES.ME.F**, requereix comprendre el desplegament d'un tetraedre i analitzar-ne la geometria per determinar la distància més curta entre dos punts, aplicant mètodes com el teorema de Tales.

Gestió socioemocional (CE 8 i CE 9)

La relació de l'alumnat amb les matemàtiques es pot abordar des de dues perspectives complementàries: la

individual i la col·lectiva. Des d'una perspectiva personal, és important dissenyar recursos per a l'aula que promoguin l'experimentació i la descoberta com a eixos centrals de l'aprenentatge. Aquest enfocament permet que l'alumnat explori, plantegi hipòtesis i descobreixi conceptes per si mateix. Alhora, un ambient ric en la resolució de problemes facilita l'aparició de dificultats i errors, que poden ser utilitzats com a oportunitats de millora i reflexió.

Pel que fa a la dimensió col·lectiva, activitats com el treball de camp en grup per a la presa de mesures i l'obtenció de dades de manera indirecta ofereixen una valuosa oportunitat d'aprenentatge. Aquestes experiències requereixen la col·laboració activa de tots els membres del grup, des del plantejament de la metodologia fins a la resolució de problemes pràctics. Aquest procés fomenta la comunicació, la capacitat d'escoltar diferents perspectives i el desenvolupament d'una mentalitat crítica per interpretar els resultats obtinguts.

En ambdues visions, la gestió docent té un paper determinant per guiar i facilitar el creixement personal i social de l'alumnat mitjançant el plantejament de bones preguntes, assegurant un equilibri entre els reptes individuals i les dinàmiques col·lectives.

La gestió socioemocional està vinculada a dues competències específiques:

- CE 8, relacionada amb el desenvolupament d'habilitats personals com les creences, les actituds i les emocions envers les matemàtiques.
- CE 9, centrada en el desenvolupament d'habilitats socials com el treball en equip i la presa de decisions.

A continuació s'indiquen alguns aspectes que, treballats des del sentit de la mesura, poden contribuir al desenvolupament de les competències CE 8 i CE 9.

Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 8:

- El treball amb el **saber #3.MES.ER.B** ajuda els alumnes a desenvolupar una actitud més positiva envers els errors, entenent-los com una part natural del procés d'aprenentatge. Aquest enfocament els permet millorar la seva capacitat per gestionar la precisió dels seus resultats i, alhora, reforçar la seva confiança en la resolució de problemes. En familiaritzar-se amb la idea que les discrepàncies entre les quantitats mesurades són normals, els estudiants aprenen a veure els errors com a oportunitats per perfeccionar-se, una habilitat fonamental per afrontar reptes amb una actitud constructiva. A més, aquest coneixement els anima a ser més responsables en la seva pràctica matemàtica, ja que comprenen millor com la precisió influeix en els resultats obtinguts.
- L'activitat proposada en el bloc L'atzar té patrons?, recollida en el **saber #3.MES.ER.C**, fomenta el desenvolupament de la competència CE 8 en treballar les creences, actituds i emocions dels estudiants envers les matemàtiques. Mitjançant l'anàlisi de seqüències aleatòries de llançaments de monedes, l'alumnat es veu desafiat a qüestionar les seves intuïcions sobre l'atzar i la probabilitat. Aquest procés ajuda a desenvolupar una actitud crítica i realista envers els resultats matemàtics, promovent la reflexió i l'acceptació de la incertesa. A més, l'activitat potencia emocions positives com la curiositat i l'interès, tot reforçant la perseverança i la gestió de l'error en el procés d'aprenentatge.
- L'activitat La copa de cava, que exemplifica el **saber #3.MES.ER.A**, és una excel·lent oportunitat per treballar la competència CE 8, ja que fomenta actituds i creences positives sobre les matemàtiques a través de la resolució de problemes connectats amb situacions quotidianes. El repte plantejat invita els estudiants a posar en pràctica les seves intuïcions, tot confrontant les seves estimacions

amb resultats obtinguts mitjançant càlculs rigorosos. Aquest procés els permet reflexionar sobre les seves emocions davant la sorpresa o la discrepància entre la percepció inicial i la solució matemàtica. A més, l'activitat promou la creació d'una actitud de perseverança i curiositat, així com l'acceptació de l'error com a part natural del procés d'aprenentatge, fet que reforça les habilitats per raonar i entendre les matemàtiques amb confiança.

Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 9:

El desenvolupament d'habilitats socials és essencial per fomentar un aprenentatge significatiu de les matemàtiques i una convivència respectuosa dins l'aula. En aquest sentit, treballar de manera col·laborativa permet als estudiants enfrontar-se a problemes matemàtics des de perspectives diverses i enriquir el procés de resolució. A més, promou el diàleg constructiu i l'aprenentatge mutu, habilitats clau per gestionar situacions en què és necessària la presa de decisions compartides.

El treball del **saber #3.MES.ER.A** ofereix una oportunitat ideal per integrar aquestes dinàmiques socials. Aquesta pràctica convida els alumnes a confrontar les seves percepcions amb les dels altres, comparant i discutint les seves aproximacions inicials. Això no només fomenta una major comprensió dels conceptes matemàtics implicats, sinó que també estimula l'empatia, el respecte i la capacitat d'escoltar i integrar aportacions alienes. Per exemple, en activitats en què es demana calcular aproximadament l'àrea d'un espai o el volum d'un objecte, els grups d'estudiants poden intercanviar punts de vista, justificar les seves estratègies i consensuar resultats.

Aquest enfocament col·laboratiu ajuda a superar prejudicis individuals sobre les capacitats matemàtiques pròpies o dels companys, mentre s'afavoreix una actitud més oberta i positiva cap al treball grupal. Alhora, permet consolidar la importància de la comunicació clara i el respecte per la diversitat d'idees, essencials en qualsevol procés de presa de decisions compartit. Aquest tipus d'activitats no només desenvolupa habilitats matemàtiques, sinó que també contribueix a crear un entorn d'aprenentatge inclusiu i enriquidor.

Aquesta perspectiva obre la porta a oportunitats per treballar en equip, promovent actituds positives, implicació en la presa de decisions i respecte per les aportacions dels altres, i superant qualsevol idea limitant sobre les habilitats pròpies o alienes en matemàtiques. A continuació, es destaquen tres activitats concretes en aquest àmbit:

- En l'activitat *Mesurem una torre circular*, recollida en el **saber #3.MES.ME.D**, es posa en joc el treball col·laboratiu en diferents etapes del procés. Els grups han de coordinar-se per seleccionar el punt d'observació i prendre mesures amb precisió, afavorint la comunicació i el repartiment de tasques. Durant els càlculs del radi, es fomenta la validació conjunta dels resultats i la presa de decisions compartida, consolidant el respecte per les aportacions individuals. Finalment, la posada en comú dels resultats entre grups, l'anàlisi estadística i la reflexió sobre l'error comès reforcen les habilitats socials i l'esperit de cooperació, promovent un entorn d'aprenentatge enriquidor i inclusiu.
- En l'activitat *Water Tank* de Dan Meyer, esmentada en el **saber #3.MES.ER.A**, la interacció col·laborativa apareix en cadascuna de les fases dels tres actes. En el primer acte, l'alumnat formula preguntes rellevants en grups, les quals generen una discussió inicial que reforça la comunicació i l'intercanvi d'idees. Al segon acte, es treballa la planificació conjunta per estimar el volum del dipòsit, distribuint responsabilitats i contrastant estratègies per obtenir resultats fiables, amb una atenció especial al respecte per les perspectives diverses. Finalment, al tercer acte, la validació dels resultats i l'anàlisi crítica del procés promouen la reflexió conjunta, destacant la importància del treball en equip per arribar a conclusions més sòlides i plantejar noves qüestions en un ambient de confiança i aprenentatge compartit.



- En l'activitat [L'estudi de daus prismàtics](#), esmentada en el **#3.MES.ER.C**, el treball col·laboratiu es desenvolupa en el procés de disseny i anàlisi dels daus. Els estudiants treballen en equips per conceptualitzar i crear daus amb bases prismàtiques mitjançant impressores 3D, fomentant la discussió sobre com l'altura afecta la probabilitat dels resultats. Aquests equips també organitzen i realitzen experiments per recollir dades sobre les freqüències relatives, posant en comú els seus resultats per identificar patrons i validar les hipòtesis inicials. Això afavoreix la presa de decisions conjunta i el respecte per les aportacions diverses, alhora que reforça la importància del diàleg crític i el consens en un projecte matemàtic pràctic i creatiu.