

TOR 3r d'ESO: Sentit algebraic

Consideracions generals	2
Blocs de sabers	3
Patrons	3
Sabers	3
Descripció i orientacions	3
Recursos i activitats	4
Model matemàtic	18
Sabers	18
Descripció i orientacions	18
Recursos i activitats	19
Variable	24
Sabers	24
Descripció i orientacions	24
Recursos i activitats	25
Igualtat i desigualtat	27
Sabers	27
Descripció i orientacions	27
Recursos i activitats	31
Relacions i funcions	34
Sabers	34
Descripció i orientacions	35
Recursos i activitats	36
Pensament computacional	44
Sabers	44
Descripció i orientacions	44
Recursos i activitats	46
Blocs de competències: processos matemàtics i gestió socioemocional	46
Resolució de problemes (CE 1 i CE 2)	47
Sabers	47
Recursos	47
Raonament i prova (CE 3 i CE 4)	48
Sabers	48
Recursos	48
Connexions amb altres parts de la matemàtica (CE 5)	49
Sabers	49
Recursos	49
Connexions amb altres matèries i amb l'entorn (CE 6)	49
Sabers	50
Recursos	50
Comunicació i representació (CE 7)	50
Sabers	50



Recursos	51
Gestió socioemocional (CE 8 i CE 9)	51
Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 8	52
Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 9	52

Consideracions generals

El sentit algebraic aglutina un conjunt de blocs de sabers especialment important dins de les matemàtiques de l'educació secundària, ja que inclou l'aprenentatge d'un llenguatge nou (l'àlgebra), amb tot el que això implica, el desenvolupament del qual és rellevant per aprofundir en els processos, i per tant, en les competències que hi ha al currículum de matemàtiques.

Per tal de desenvolupar el conjunt de sabers que constitueixen el sentit algebraic als diferents cursos, es proposa introduir el llenguatge algebraic partint dels coneixements aritmètics i geomètrics dels alumnes, i tenint molt en compte les dificultats que suposa el treball amb un nou llenguatge. També és rellevant ajudar l'alumnat a donar significat al conjunt de símbols que apareixen en les expressions algebraiques i que representen incògnites, variables, paràmetres, operacions, així com identitats, equacions, inequacions i funcions. D'altra banda, cal mostrar que l'àlgebra és un llenguatge útil en situacions diferents, en particular per expressar generalitzacions de propietats, caracteritzar patrons i resoldre problemes. Pel que fa a l'aprenentatge de la resolució d'equacions, inequacions i sistemes i les seves aplicacions, creiem que cal emmarcar-lo en un ambient de resolució de problemes, i allunyar-se de l'aplicació mecànica de receptes i de la pràctica reproductiva de procediments opacs. També forma part d'aquest sentit el pensament computacional, que té característiques pròpies, diferents de les dels altres blocs de sabers, però que permet un ampli ventall de connexions internes que poden representar bones oportunitats didàctiques. Al final d'aquest apartat hi dediquem una atenció especial.

Com en qualsevol altre sentit és molt important tenir en compte l'horitzó matemàtic, tant d'allò que ja s'ha treballat com del treball per desenvolupar en el futur en altres etapes educatives. En relació amb els sabers de primària, cal tenir en compte el coneixement de les operacions elementals i la seva relació, així com el coneixement de la prioritat de les operacions i l'ús de parèntesis. També el significat dels símbols aritmètics i de les operacions en els diferents conjunts numèrics (en particular en els enters). Pel que fa a l'horitzó futur, el coneixement de l'àlgebra resulta indispensable per l'alumnat que farà matemàtiques al batxillerat, però també si accedeix a mòduls professionals i al món laboral, com a eina per resoldre problemes, per caracteritzar els fenòmens de canvi, per argumentar i per expressar generalitzacions.

L'especificació i la seqüenciació dels sabers del bloc Pensament computacional s'ha fet atenent a diversos criteris. Primerament, s'han contextualitzat al màxim dins de les matemàtiques i s'han establert connexions significatives amb altres blocs del sentit algebraic, amb altres sentits i amb processos com la resolució de problemes, per tal de facilitar la integració del pensament computacional en el treball matemàtic. Els sabers que s'han inclòs es classifiquen en quatre categories: les habilitats generals de pensament computacional (descomposició, patrons, abstracció i algorismes), la construcció d'algorismes executables per persones o ordinadors, l'ús d'eines computacionals en matemàtiques, i la gestió socioemocional. S'ha intentat donar acollida a tres opcions de treball diferents però compatibles: el treball sense eines digitals (pensament computacional «desendollat»), la creació de programes en diversos llenguatges de programació i l'ús d'aplicacions de robòtica i dispositius mòbils.

Blocs de sabers

Patrons

Sabers

- A. Estudi de diferents tipus de successions, com per exemple, les aritmètiques, les geomètriques o la de Fibonacci. Càlcul del terme general. **[ESS] #ALG.VA**
- B. Observació de regularitats en diferents contextos matemàtics que permetin extreure conclusions o descobrir propietats. **#NUM.CO, #ESP.VM**

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

Tal com també es comenta al document de 2n d'ESO, identificar patrons ajuda a desenvolupar la capacitat de raonament lògic i permet a l'alumnat descobrir i comprendre seqüències i regularitats en àmbits diversos, fet essencial en la resolució de problemes. A més, l'estudi de regularitats en diferents contextos (numèrics o algebraics) pot contribuir a un millor assoliment dels conceptes que es van treballant durant el curs.

Fins a arribar a 3r, l'alumnat ha treballat patrons tant numèrics com geomètrics. Des de primària, demanem a l'alumnat que sigui capaç d'identificar clarament el patró i explicar-lo de múltiples maneres (bé mitjançant representacions o bé amb llenguatge oral o escrit propi). A 3r arriba el moment que l'alumnat descobreixi la potència del llenguatge algebraic (que s'haurà introduït gradualment a 1r i 2n d'ESO) i cerqui l'expressió algebraica que generalitzi un determinat patró treballat. Estudiant patrons, l'alumnat desenvolupa el pensament algebraic, que és clau per arribar a la idea de funció, i també fomenta la capacitat d'abstracció.

Cal remarcar també que moltes successions aritmètiques, geomètriques, és a dir, patrons de creixement en què la relació d'un terme i el següent és $+k$ o $\cdot k$, o d'altres tipus (com per exemple, la de Fibonacci), són presents en contextos reals. Els patrons són, per tant, una bona eina per connectar les matemàtiques amb el món quotidià i natural, i ens poden ser de gran ajuda per despertar l'interès de l'alumnat i veure tant la utilitat com la bellesa de les matemàtiques.

Tal com s'esmenta a altres cursos, cal remarcar la diferència entre una seqüència o successió, que és un conjunt ordenat d'elements, i un patró, que és la regularitat, si hi és, que marca l'estructura d'una successió. També cal recordar que un model adequat per treballar seqüències és, en primer lloc, buscar el següent terme; després buscar un terme proper; a continuació, un terme llunyà i, finalment, si es considera oportú, el terme general. Per tal de determinar aquest terme general es fa molt necessari un treball ordenat. L'ús de taules per recollir les dades serà, en molts casos, determinant a l'hora de buscar el patró que segueix la seqüència, i per fer-ho caldrà fixar-se no només en el resultat de cada terme sinó també en el procés que s'ha seguit per obtenir-lo.

Comentaris sobre les connexions

Tot i que es poden trobar connexions amb diversos sentits del currículum, l'estudi de successions permet establir fortes connexions amb el sentit numèric (**#3.NUM.CO**) i l'espacial (**#3.ESP.VM**). És evident que l'estudi de successions implica l'estudi de patrons numèrics. D'altra banda, la visualització i modelització geomètrica pot ser de gran ajuda en la cerca de la regla de formació de patrons.

Per últim, cal destacar la connexió interna dins del sentit algebraic amb el bloc Variable (**#3.ALG.VA**). L'estudi de successions ens porta directament a l'estudi de funcions (ja que una successió és una funció que relaciona la variable nombre natural n i la variable nombre real a_n).

Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

El **saber #3.ALG.PA.A**, estudi de diferents tipus de successions, com per exemple les aritmètiques, les geomètriques o la de Fibonacci, pot ajudar a comprendre les matemàtiques del món que ens envolta perquè les successions s'apliquen en moltes àrees diferents: economia, informàtica, ciència o art. D'altra banda, estudiar

diferents tipus de successions ajuda a fer connexions entre diversos conceptes matemàtics. Per aquest motiu, s'ha destacat aquest saber com a essencial.

Observacions sobre alguns sabers específics

Com també es troba reflectit als documents de 1r i 2n d'ESO, identificar patrons ajuda l'alumnat a desenvolupar la capacitat de raonament lògic. L'estudi de patrons implica observar regularitats en diferents contextos (**saber #3.ALG.PA.B**), fer conjectures, generalitzar, és a dir, accions que permeten treballar tots els processos matemàtics, des del raonament i prova, la comunicació i representació, les connexions (tant intramatemàtiques com extramatemàtiques) fins a la resolució de problemes, present sempre a tots els blocs dels sabers del currículum.

Recursos i activitats

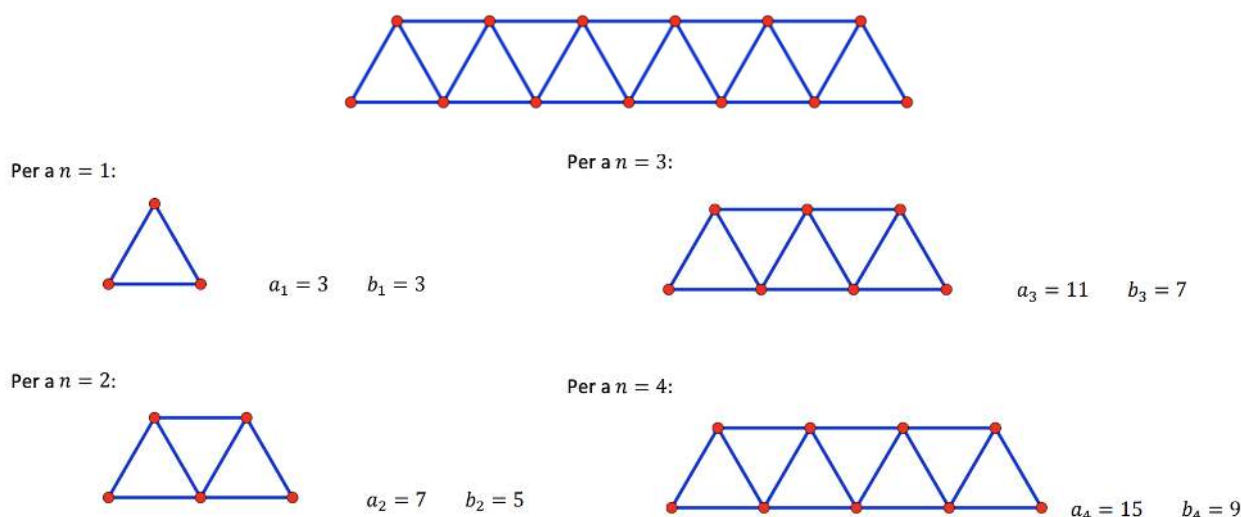
Recursos i activitats per treballar sabers concrets

saber #3.ALG.PA.A

Un recurs per treballar el **saber #3.ALG.PA.A** és l'activitat [Patrons en estructures](#) que podem trobar a les [Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria](#) (Aubanell, 2015). Es proposa fer el treball per parelles i, com a material, només calen les imatges de les estructures, encara que també es poden fer servir escuradents i construir-les. L'activitat consisteix a explorar estructures (similars a les de les construccions industrials metàl·liques formades per barres i connectors) i determinar, en funció d'un paràmetre, el nombre de barres i de connectors necessaris per construir-les. S'hauran de trobar els termes generals a_n , b_n ... de successions definides a partir de figures geomètriques en les quals s'agafarà com a paràmetre n el nombre de barres de la base de l'estructura. Es plantegen cinc casos corresponents a estructures diferents i es pren sempre a_n com el nombre de barres necessàries per construir una estructura de n barres de base i b_n com el nombre de connectors necessaris per construir una estructura d' n barres de base.

Veiem, per exemple, com es treballa la primera estructura proposada.

L'estructura de la següent imatge té 6 barres a la base ($n = 6$) i, per construir-la, es necessiten 23 barres ($a_6 = 23$) i 13 connectors ($b_6 = 13$). Es demana trobar una expressió general que doni a_n i b_n per a tots els valors naturals d' n .



Font: [Patrons en estructures](#), d'Anton Aubanell

S'espera que l'alumnat descobreixi els termes generals d'aquestes successions. El treball en parelles pot propiciar la conversa i que argumentin entre ells. Per part del professorat, podem demanar que conjecturin i cerquin contraexemples a fi de descobrir que es tracta de dues progressions aritmètiques de diferències respectives 4 i 2, els termes generals de les quals són: $a_n = 4n - 1$ i $b_n = 2n + 1$.

Tot seguit, l'activitat proposa l'estudi de quatre estructures més amb diferents nivells de dificultat.

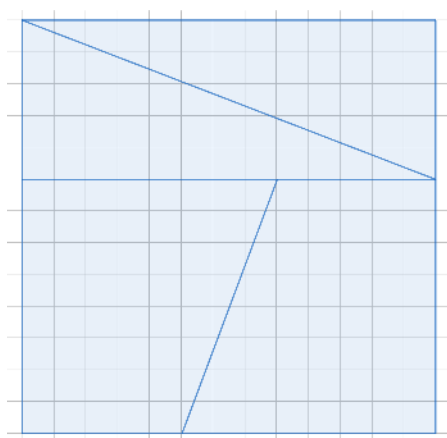
saber #3.ALG.PA.A

La successió de Fibonacci, inclosa en el **saber #3.ALG.PA.A**, es pot treballar des de nombrosos punts de vista i molta varietat de recursos. Un vídeo que pot ser font d'inspiració per la bellesa de les imatges, la música i per com deixa explícita la connexió d'aquesta successió amb la natura i que pot servir com a activitat d'escalfament si es pregunta a l'alumnat què han observat i quines preguntes els venen al cap un cop vist, és [Nature by Numbers](#) de Cristóbal Vila.

Troblem un recurs interessant de la Victòria Oliu per treballar la successió de Fibonacci amb Scratch en aquest [enllaç](#), en què un dels exemples emprats per aprofundir en el treball de llistes amb Scratch és aquesta successió.

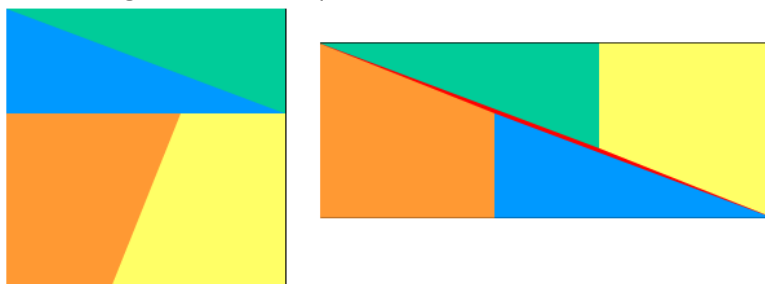
Al web de l'[Ateneu](#) trobem també propostes per treballar-la amb Snap!.

També es pot introduir la successió a partir d'una fal·làcia geomètrica. Tot seguit es detalla com seria la seqüència d'activitats. En primer lloc, es demana a l'alumnat que dibuixi un quadrat com el de la figura a la llibreta. Ha de tenir un costat de 13 unitats.



Font: elaboració pròpia

Després se li demana que el retalli per les marques que es mostren a la imatge i, amb les peces que queden, han de construir un rectangle de 21 per 8 unitats. Un cop fet, se'ls demana que calculin l'àrea del rectangle i l'àrea del quadrat i que expliquin què hi observen. L'activitat causa molta sorpresa i ganes d'esbrinar què ha passat. Una explicació de la diferència entre les dues àrees la podem trobar molt ben il·lustrada al blog Calaix +ie del Joan Jareño, dins de l'activitat [Fantasmes geomètrics](#), en la qual s'observa que queda un espai vermell molt prim al llarg de tota la diagonal del rectangle. Doncs bé, aquest «forat» té exactament l'àrea d'un quadrat.

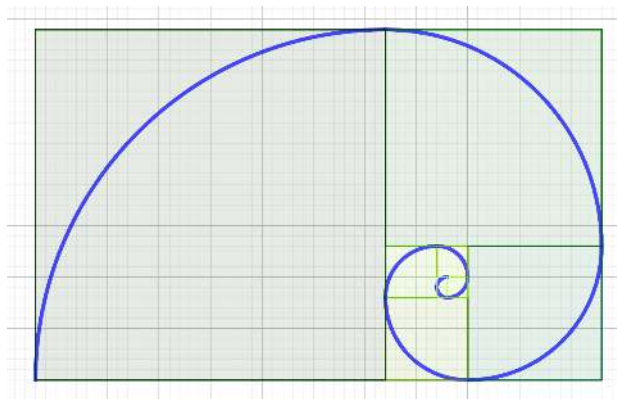


Font: "[Fantasmes geomètrics](#)", de Joan Jareño

Però, què té a veure això amb la successió de Fibonacci? Per respondre a aquesta pregunta es proposa a l'alumnat que visualitzi el capítol [Fibonacci, la magia de los números](#) de la sèrie *Más por menos*. Al vídeo es mostra que el fet que 8, 13 i 21, les dades de les nostres figures, siguin tres termes consecutius de la successió explica el cas del quadrat desaparegut. Com s'exposa al vídeo, si es multipliquen dos termes consecutius situats en una posició parell de la successió, el resultat és el quadrat del terme del mig menys 1: $8 \cdot 21 = 13^2 - 1$. Aquesta pot resultar una manera curiosa d'introduir la successió a classe, connectant patrons i geometria.

Una altra manera d'introduir-la és a partir d'una bona lectura, com és el cas de l'article [El origen poético de los números de Fibonacci](#) del web [Cultura Científica](#). S'hi donen moltes informacions i curiositats sobre la successió, que poden esdevenir la llavor per al treball posterior.

També es pot treballar la successió a partir d'una espiral formada per quadrats els costats dels quals són els nombres de la successió. Es pot demanar a l'alumnat que la construeixi amb instruments de dibuix o bé amb algun programa de geometria dinàmica:



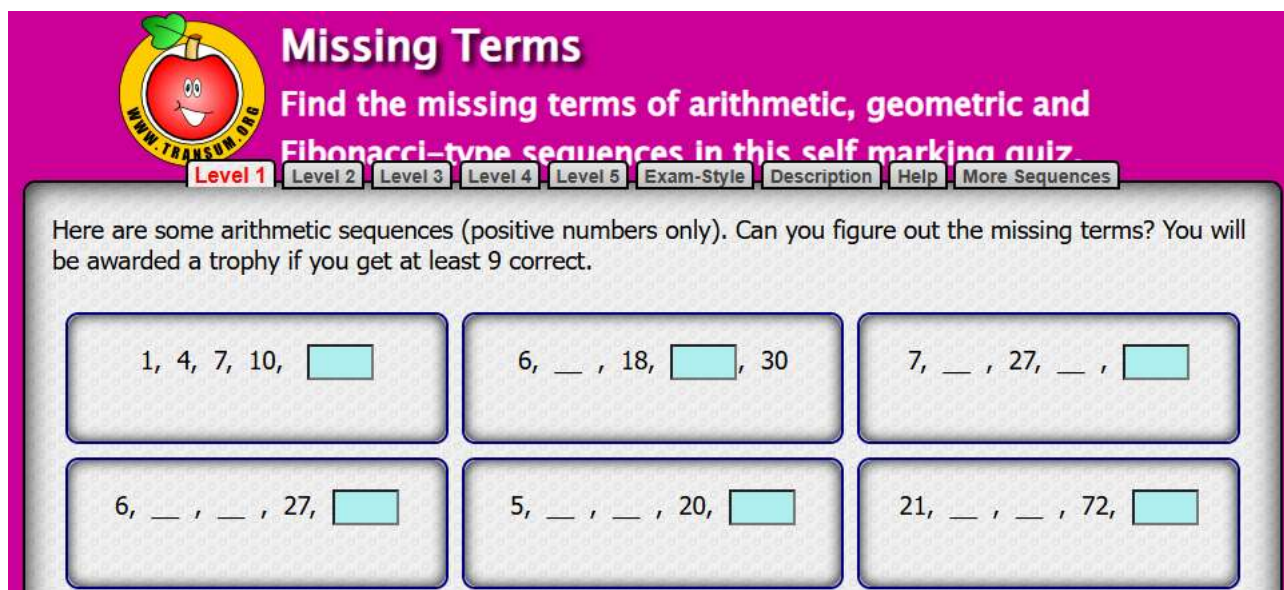
Font: elaboració pròpia

Per treballar la successió de Fibonacci, no podem obviar la bateria de reptes que se'ns proposa des de [NRICH](#). Hi trobem tot un apartat per treballar la successió amb una tipologia de propostes molt diverses: des de la creació de successions similars fins a la de Fibonacci, l'estudi i deducció de propietats, reptes numèrics, etc., però totes elles amb un denominador comú: activitats riques en resolució de problemes i raonament.

Ja per acabar, podem fer referència a l'activitat del [joc de rol sobre fer fotografies](#) a un nombre de persones amb totes les opcions perquè es donin la mà, en què també surt Fibonacci i està explicada per en Joan Jareño i en Lluís Mora al vídeo enllaçat.

saber #3.ALG.PA.A

Un *applet* interessant per treballar el **saber #3.ALG.PA.A** és, per exemple, el [Missing Terms](#) del web Transum.



Missing Terms
 Find the missing terms of arithmetic, geometric and Fibonacci-type sequences in this self marking quiz.

Level 1 Level 2 Level 3 Level 4 Level 5 Exam-Style Description Help More Sequences

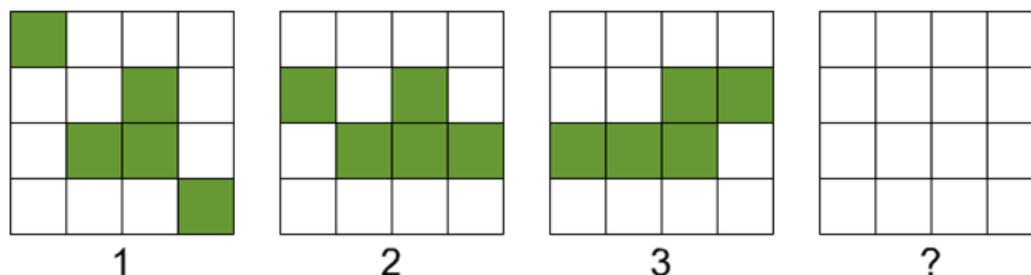
Here are some arithmetic sequences (positive numbers only). Can you figure out the missing terms? You will be awarded a trophy if you get at least 9 correct.

1, 4, 7, 10,	6, , 18, , 30	7, , 27, ,
6, , , 27,	5, , , 20,	21, , , 72,

Font: "[Missing Terms](#)", de Transum

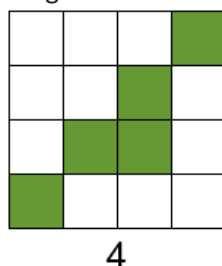
saber #3.ALG.PA.B

Un tipus de patrons que es treballa poc freqüentment a les escoles i instituts són els patrons de moviment. Una molt bona activitat per treballar aquest tipus de patrons la trobem al blog del Joan Jareño, i s'anomena [Amebes patronals](#). Tal com comenta l'autor del blog, Brian Bolt, al llibre *Aún más actividades matemáticas* (Bolt, 1988) anomena aquest tipus de patrons «formes ameboides». L'activitat pot consistir a presentar un conjunt d'imatges successives a l'alumnat i demanar quines seran les següents imatges, després descriure'n la llei i, finalment, esbrinar si la sèrie farà un cicle tornant en algun moment a la primera posició i, en aquest cas, quant es trigarà. En Joan Jareño ens proposa l'exemple següent:



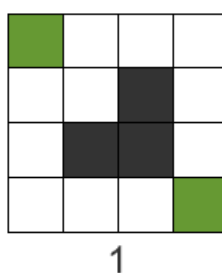
Font: [Amebes patronals](#), de Joan Jareño

Per endevinar el patró, l'alumnat s'haurà de fixar en el que es manté entre cada pas de la imatge i en el que varia i en com varia. En el cas anterior, la solució és la següent:



Font: [Amebes patronals](#), de Joan Jareño

Per tal que es vegi més clar, l'autor del blog ens mostra una animació on es poden veure de color gris les caselles fixes:



Font: [Amebes patronals](#), de Joan Jareño

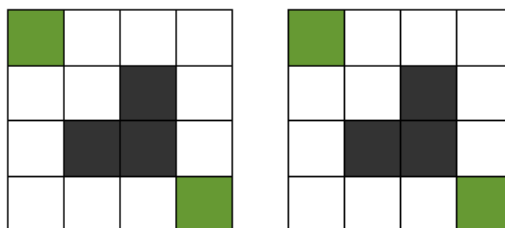
Per trobar quin serà el cinquè pas, se'ns presenten dues alternatives diferents: que els dos quadrats mòbils inverteixin el moviment (que el que ha pujat comenci a baixar i que el que ha baixat pugi) o bé que els dos quadrats continuïn girant en sentit antihorari.



5

Font: [Amebes patronals](#), de Joan Jareño

Al blog també se'ns mostra una animació de tots dos casos:



1

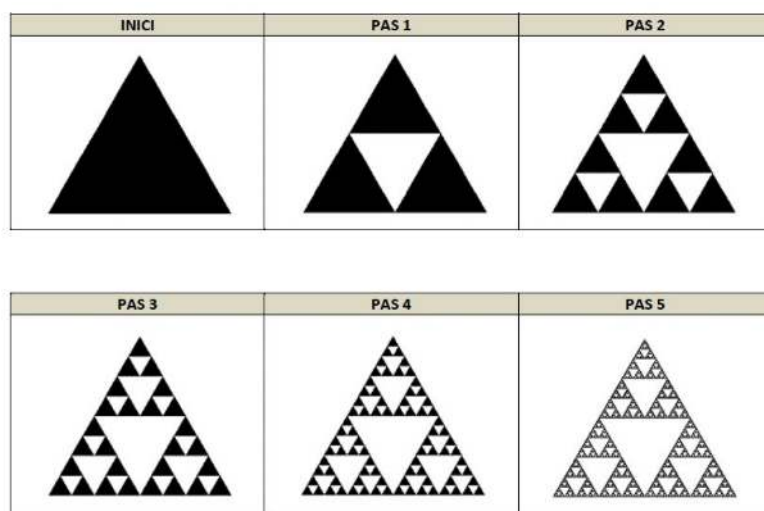
Font: [Amebes patronals](#), de Joan Jareño

L'entrada del blog també dona idees de com portar l'activitat a l'aula: resoldre diferents casos, fer que l'alumnat s'inventi problemes nous i intercanviar-los, donar algun tipus de material com ara fitxes sobre una quadrícula per tal d'observar millor els canvis, fer explicar les regles de moviment per justificar les solucions o descriure la regla i investigar possibles continuacions de problemes que quedin indefinits, o amb diverses opcions possibles.

saber #3.ALG.PA.B

La geometria fractal pot resultar especialment interessant per treballar el **saber #3.ALG.PA.B**. Les fractals són un exemple molt bo per entendre la recursió, idea fonamental tant en informàtica com en matemàtiques. L'estudi de fractals ens permetrà connectar el treball de patrons amb mesura, numeració i el sentit espacial, i esdevé un recurs molt potent a l'aula. Però la geometria fractal no només és interessant des d'un punt de vista matemàtic, sinó que també ofereix una gran oportunitat per entendre millor el món que ens envolta i entendre com certs patrons es repeteixen a la natura.

L'activitat [Fractals](#) és un petit tast sobre algunes fractals i pot servir per introduir aquest tipus de geometria a les aules. Amb els matisos pertinents, es podria ubicar perfectament a 2n o 4t d'ESO. A l'activitat es presenten dues fractals, el triangle de Sierpinski i el conjunt de Cantor. En el primer cas, l'alumnat ha de trobar la relació entre les àrees dels triangles blancs i els negres respecte del total:



Font: [Fractals](#)

Respecte al conjunt de Cantor, primer es demana fer algunes iteracions donada la longitud del segment inicial i, a continuació, es treballa sobre un segment de longitud 1 per cercar-hi regularitats:

b) Anàlisi de patrons numèrics i geomètrics

Suposem ara que el segment inicial té **longitud 1 unitat**.

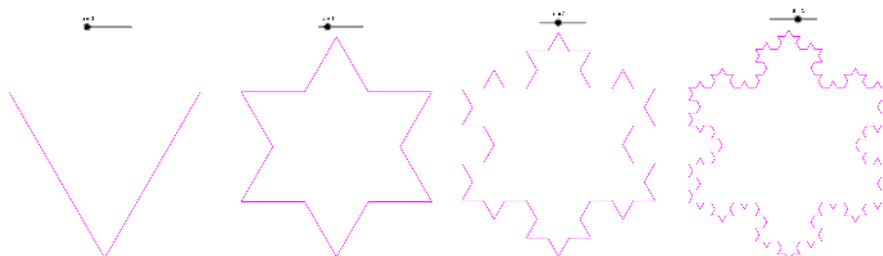
Completeu la següent taula:

Pas	Nombre de segments	Longitud del segment	
		Fracció	Decimal
1			
2			
3			
4			
5			
6			
...			
n			

Observa la taula. Quines conclusions en podeu treure?

Font: [Fractals](#)

També es podria treballar el floc de neu de Koch, dibuixar diverses iteracions, per exemple, sobre fulls de trama isomètrica o amb un programa de geometria dinàmica, i observar què està passant: un perímetre infinit tanca una superfície finita. Aquest fet causa molta sorpresa a l'alumnat.



Font: elaboració pròpia

Les fractals es poden treballar de moltes maneres diferents. A l'entrada "[Treballem les fractals](#)", el professor Manel Martínez ens explica com va involucrar tot l'alumnat de secundària i batxillerat de La Salle Bonanova per participar en el projecte [Catifa de Sierpinski](#), en què diferents centres educatius i altres entitats de tot el món van col·laborar per tal de crear aquesta fractal en la setena iteració l'any 2016.

Al blog s'hi poden trobar activitats per diferents nivells per acompanyar la creació de la catifa. Tot seguit es pot veure la imatge de la catifa a la cinquena iteració:



Font: [bloc Punt singular](#), de Manel Martínez

L'arbre pitagòric també pot esdevenir un bon recurs per treballar les fractals. Tot seguit, es mostren dues imatges del concurs Fem Matemàtiques de Girona del 2020, on se'n va construir un de gegant i on, a més, aquesta fractal formava part del logo del concurs:



Font: ACTUA

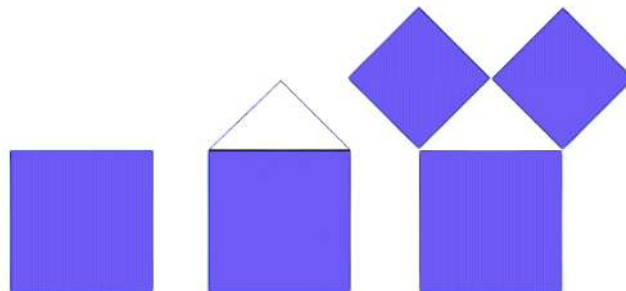


Font: Gemma Abadia

Per treballar-ho a classe, hi ha moltes idees interessants. Per exemple, al [web](#) del professor Lawrence H. Riddle, trobem les següents propostes. Es pot començar demanant a l'alumnat que construeixi l'arbre amb estris de dibuix o amb un programa de geometria dinàmica seguint unes indicacions:

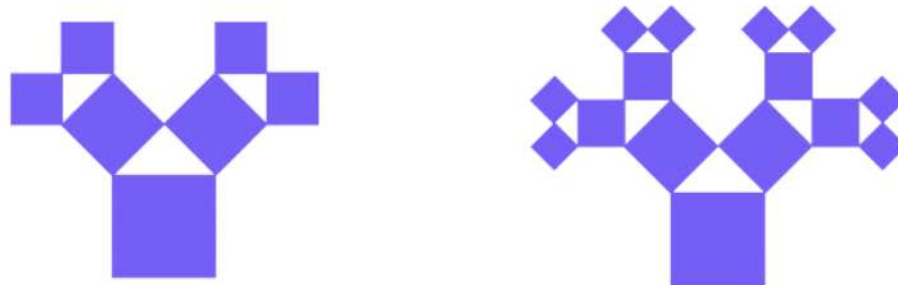
- Començar construint un quadrat.
- Tot seguit, construir un triangle isòsceles la hipotenusa del qual és el costat superior del quadrat.
- Ara, construir quadrats a sobre dels catets del triangle rectangle.

Se n'obté la construcció següent:



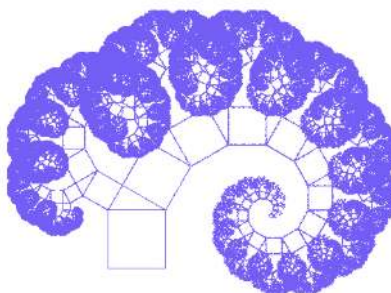
Font: elaboració pròpia

Tot seguit, es demana a l'alumnat que repeteixi la construcció de forma recursiva sobre cadascun dels dos quadrats obtinguts. A continuació, podem veure el resultat de les iteracions següents:



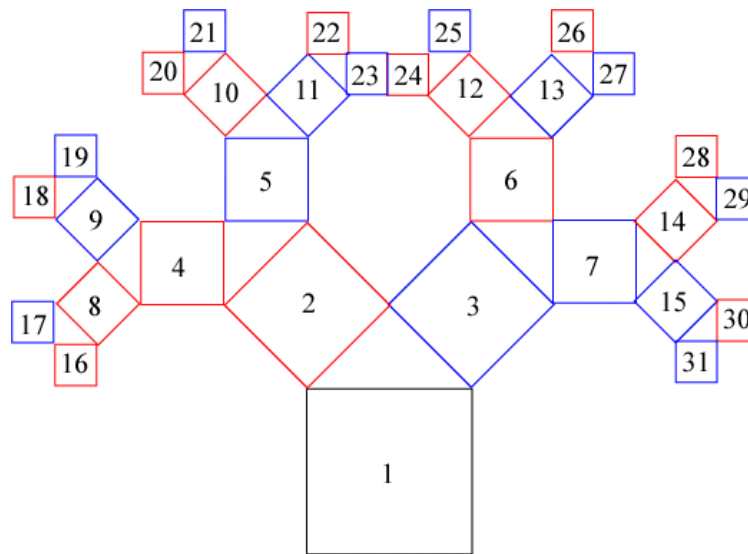
Font: elaboració pròpia

I, a partir d'aquí, podem estirar tant com vulguem la proposta i cap a camins ben diversos. Per exemple, podem demanar a l'alumnat com s'imaginen un arbre fet amb triangles rectangles d'angles aguts de 30 i 60 graus. El resultat és el següent:



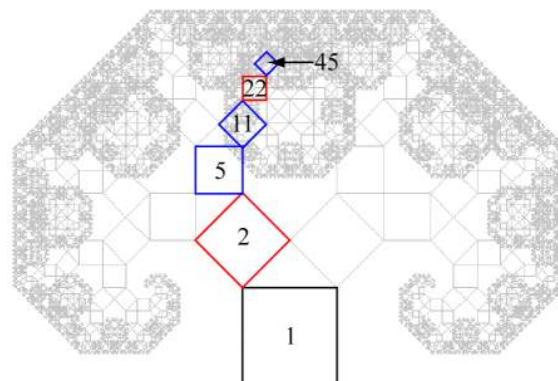
Font: elaboració pròpia

Vegem-ne un altre exemple. Etiquetem els quadrats de la manera següent: l'inicial té etiqueta 1 i, a la iteració n , al quadrat de l'esquerra li posem etiqueta $2n$ i, al de la dreta, li posem etiqueta $2n + 1$. Podem pintar tots els quadrats amb etiqueta parell de color vermell i tots els quadrats amb etiqueta senar de color blau. Obtindrem així la següent imatge:



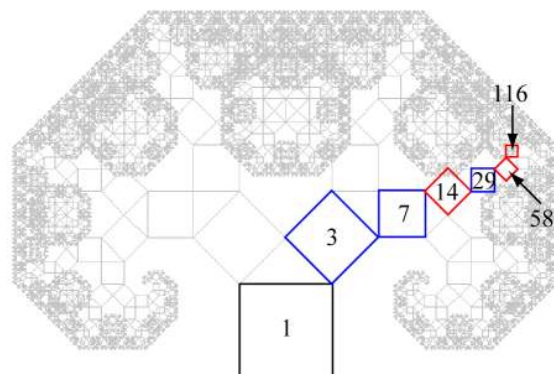
Font: [web](#) del professor Lawrence H. Riddle

Un fet interessant és que fent servir notació binària es pot localitzar qualsevol quadrat a l'arbre. Per exemple, podem preguntar-nos on estarà situat el quadrat amb etiqueta 45. Aquest nombre, en binari, s'escriu 101101. El primer nombre, començant pel dígit de més a l'esquerra, sempre serà 1 i correspon al quadrat inicial. Per la resta de dígit, un 0 significa gir cap a l'esquerra (quadrat vermell) i un 1 significa gir cap a la dreta (quadrat blau). Així, per localitzar el 45, el camí que s'ha de fer és esquerra, dreta, dreta, esquerra, dreta. Vegem-ho a la següent imatge:



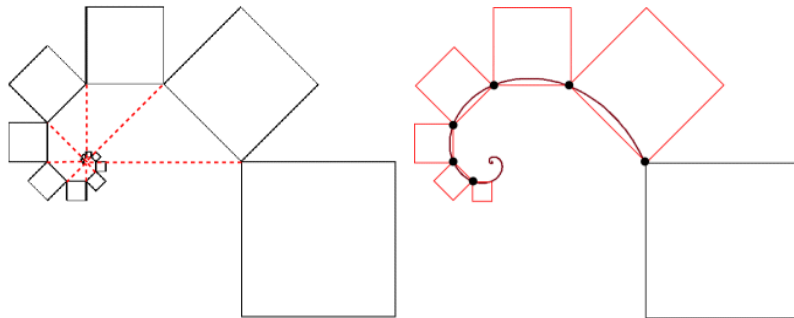
Font: [web](#) del professor Lawrence H. Riddle

On és el quadrat 116? Com que 116, en binari, seria 1110100, començant pel quadrat inicial, girem a la dreta, dreta, esquerra, dreta, esquerra i, finalment, esquerra:



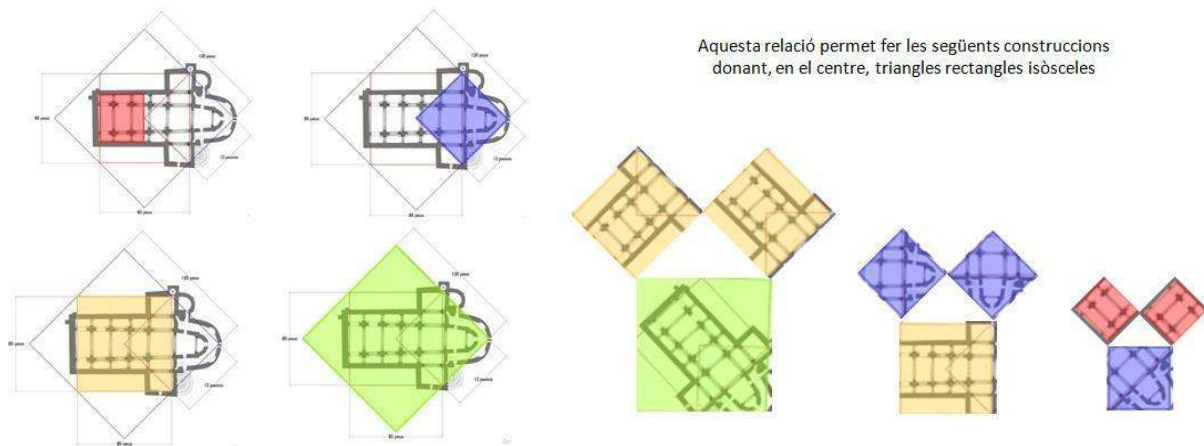
Font: [web](#) del professor Lawrence H. Riddle

I ja, gairebé per acabar amb l'arbre pitagòric, la imatge següent mostra els quadrats amb etiquetes 1, 2, 4, 8, és a dir, les potències de 2. Aquests quadrats formen una espiral logarítmica. Però el fet interessant és que si comencem per qualsevol quadrat de l'arbre i seguim els quadrats des d'aquest punt sempre cap a la dreta o sempre cap a l'esquerra, també s'obtenen espirals logarítmiques. Per tant, a l'arbre s'hi troben espirals infinites.



Font: [web](#) del professor Lawrence H. Riddle

Com s'ha pogut veure, l'arbre pitagòric dona molt joc per proposar activitats que permeten establir connexions dins de les mateixes matemàtiques. Però no només podem establir connexions internes; tot seguit podem veure, a través d'unes imatges de l'Anton Aubanell, la creació d'un arbre pitagòric al monestir de Sant Pere de Rodes a partir de les dimensions de l'església mateixa:

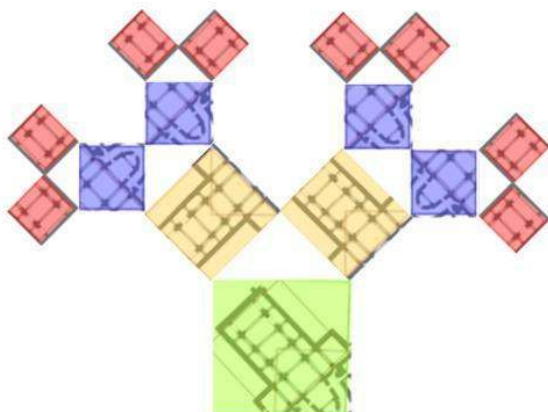


Aquesta relació permet fer les següents construccions donant, en el centre, triangles rectangles isòceles

En cada pas les àrees es multipliquen per 2 i els costats per $\sqrt{2}$

Font: Anton Aubanell

Encadenant aquestes construccions podem crear una estructura molt bonica amb forma d'arbre



Sant Pere de Rodes

Font: Anton Aubanell

I ja per acabar amb les fractals, un últim exemple. Una manera d'involucrar una bona part de l'alumnat pot ser la creació d'un arbre de Nadal matemàtic, en concret, el tetraedre de Sierpinski. Al web Think Maths trobem les plantilles per crear un tetraedre de Sierpinski com el que es pot veure a la imatge següent, fet a l'Institut Dertosa el 2018:

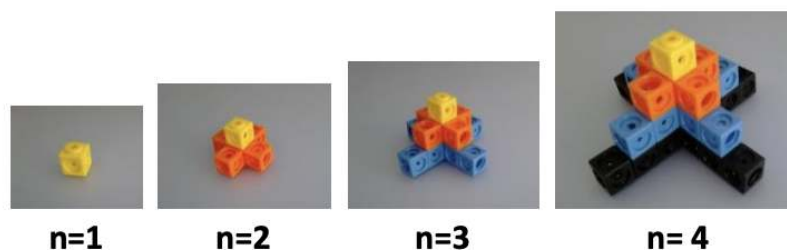


Font: Núria Serra

A partir de la creació de l'arbre, poden sortir moltes preguntes interessants: quants tetraedres calen per fer cada iteració, quines dimensions té el tetraedre resultant de cadascuna, etc. I sempre es pot fer servir alguna d'aquestes preguntes per participar al [vídeoMAT](http://videoMAT). Aquest és un projecte en el qual l'alumnat crea vídeos en què es responen preguntes que posen de manifest les aplicacions de les matemàtiques o la seva presència en l'entorn. A l'edició del 2019, el treball guanyador en la categoria de 1r, 2n i 3r d'ESO portava per nom [Quants tetràedres de 10 cm d'aresta calen per fer un tetraedre de Sierpinski tan alt com l'institut?](#). Qualsevol ocasió és bona per fer matemàtiques per respondre preguntes!

saber #3.ALG.PA.B

Per treballar el **saber #3.ALG.PA.B**, les construccions fetes amb cubs ens poden donar moltes idees. A l'ARC hi trobem l'activitat [Quants cubs formen la torre](#) i també trobem una proposta molt similar a les [Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria](#) (Aubanell, 2015), amb l'activitat [Patrons i policubs](#). Es presenta a l'alumnat un conjunt de policubs tal com es mostra a la imatge següent:



Font: "[Patrons i policubs](#)", d'Anton Aubanell

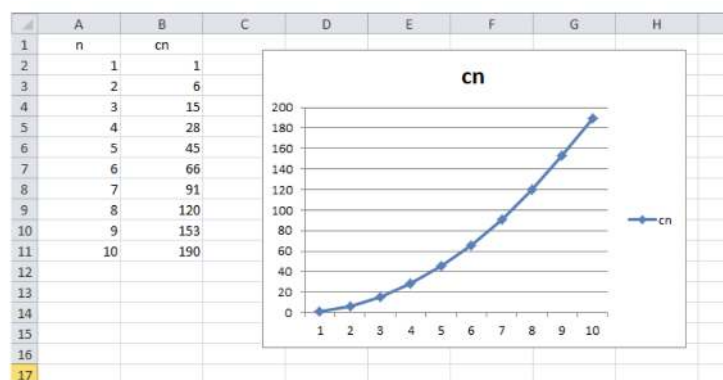
Es poden veure torres d'un cub d'altura ($n = 1$), de 2 cubs ($n = 2$), de 3 cubs ($n = 3$) i de 4 cubs d'altura ($n = 4$). Es pot convidar l'alumnat a construir, amb el mateix patró, una torre de 5 o de 6 cubs d'altura. Un cop estan familiaritzats amb aquestes figures, estem en disposició de plantejar la pregunta que volem investigar en l'activitat: Podríem trobar una expressió que, en funció de l'altura n de la torre, ens doni el nombre de cubs que la componen? D'entrada, sembla natural fer una taula amb el nombre de cubs de les primeres torres. En l'elaboració d'aquesta taula és probable que l'alumnat ja comenci a descobrir regularitats que després seran

importants en la deducció de l'expressió buscada. Si s'apliquen aquestes regularitats, es pot demanar que calculin el nombre de cubs que formaran torres semblants de 5, 6, 7 o 8 cubs d'altura. S'obtindrà la taula següent, en la qual s'ha indicat per c_n el nombre de cubs de la torre d'altura n :

Altura, n	Nombre de cubs, c_n
1	$1=1$
2	$1+5=6$
3	$1+5+9=15$
4	$1+5+9+13=28$
5	$1+5+9+13+17=45$
6	$1+5+9+13+17+21=66$
7	$1+5+9+13+17+21+25=91$
8	$1+5+9+13+17+21+25+29=120$

Font: [Patrons i policubs](#), d'Anton Aubanell

La pregunta inicial ara ja es pot formular en termes més algebraics: Per a un valor n general, quina expressió donarà c_n ? Ara és el moment d'investigar, de conjecturar, de contrastar opinions, de reflexionar i d'argumentar les troballes. Es pot emprar el full de càlcul o algun programa de geometria dinàmica per fer una taula i construir una representació gràfica com es mostra a la imatge següent, en la qual s'ha suposat que els càlculs s'havien fet fins a una torre d'altura 10:



Font: [Patrons i policubs](#), d'Anton Aubanell

Tant si s'ha introduït l'estudi de la paràbola com si encara no, es pot apuntar que la relació és quadràtica, fent esment de la representació gràfica de funcions de segon grau o del fet que el canvi del canvi (la variació dels increments) és constant.

A partir d'aquí hi ha diversos camins per continuar l'exploració. Un camí amb un fort component algebraic pot consistir a observar que cada torre està formada per un nombre de cubs que és la suma dels cubs que conformen cada pis: el pis de dalt sempre té 1 cub, el segon pis començant per dalt sempre té 5 cubs (4 més que l'anterior, ja que s'hi afegeixen els 4 dels extrems de les ales), el següent pis sempre té 9 cubs (4 més que l'anterior, ja que, de nou, s'hi afegeixen els 4 dels extrems de les ales)... Així cada pis té quatre cubs més que el pis que té immediatament per sobre. Pot sorgir la pregunta de quina serà l'expressió que dona el nombre de cubs del pis inferior en la figura d' n pisos (en realitat, el que estem fent és buscar el terme general d'una progressió aritmètica de diferència 4). Aquest nombre de cubs serà igual al nombre de cubs del pis superior (1) més tantes vegades 4 cubs com salts hàgim fet entre la planta superior i la planta inferior (si hi ha n plantes haurem fet $n-1$ salts per anar de la planta superior a la inferior). En termes algebraics, tenim que el nombre de cubs de la planta inferior de la torre d' n cubs d'altura serà $1 + 4 \cdot (n - 1) = 4n - 3$. Per tant, el nombre total de cubs de la torre d' n cubs d'altura serà:

$$c_n = 1 + 5 + 9 + 13 + \dots + (4n - 3)$$

Ens trobem, doncs, davant de la necessitat de calcular la suma d'una progressió aritmètica. En funció del que estigui planificat treballar durant el curs, potser l'alumnat no sap l'expressió algebraica per fer-ne el càlcul. A la fitxa de l'activitat [Patrons i policubs](#), es troben diversos exemples de com abordar aquest càlcul raonadament. Sigui com sigui, la idea és arribar a l'expressió:

$$c_n = [1 + (4n - 3)] \cdot \frac{n}{2} = (4n - 2) \cdot \frac{n}{2} = 2n^2 - n$$

Ara seria el moment de comprovar que aquesta expressió ajusta bé tots els valors de la taula construïda inicialment.

Un altre camí, no tan algebraic i molt més geomètric i visual, per arribar al mateix resultat és el següent. A les imatges que hi ha a continuació, s'hi mostra el procediment per la torre d'altura 4, però treballarem el cas general d'altura n . Considerem la torre d'altura n i separem les quatre ales. D'aquesta manera aconseguim tenir quatre figures triangulars de dimensions $(n-1) \cdot (n-1)$ i la columna central que tindrà altura n . Podem agrupar les ales, dues a dues, com es mostra a la imatge següent:



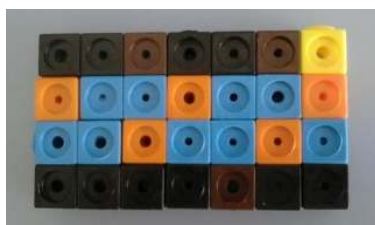
Font: [Patrons i policubs](#), d'Anton Aubanell

S'observa que les parelles d'ales encaixen bé tot formant dos rectangles de dimensions $(n-1) \cdot n$ com mostra la imatge:



Font: [Patrons i policubs](#), d'Anton Aubanell

S'aconsegueixen tres rectangles, tots d'altura n i dos amb base $n-1$ i un amb base 1. Si els ajuntem tindrem un rectangle també d'altura n i de base la suma de les bases: $(n-1) + (n-1) + 1 = 2n - 1$. A la imatge següent es mostra aquest rectangle per a $n = 4$:



Font: [Patrons i policubs](#), d'Anton Aubanell

El nombre total de cubs que té aquest rectangle s'obté multiplicant el nombre de cubs de la base pel de l'altura. Així tindrem que el nombre total de cubs serà:

$$c_n = (2n - 1) \cdot n = 2n^2 - n$$

D'una manera ben bonica i elegant, s'ha aconseguit arribar al mateix resultat sense la necessitat d'aspectes algebraics que poden resultar complicats per a part de l'alumnat. Serà el professorat qui decideixi quin camí, o

quins, treballar a classe en funció de la tipologia d'alumnat i el grup-classe. Una opció possible seria treballar l'activitat 'visualment a 3r i de manera més algebraica a 4t.

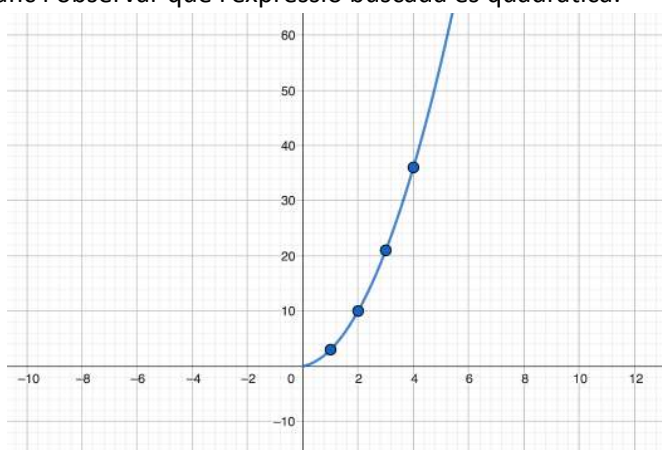
saber #3.ALG.PA.B

Com també es va comentar al document de 2n d'ESO, al web [Visual patterns](#) hi trobem moltes imatges que poden desencadenar un treball de patrons interessant. En aquest cas, ens referim al número 22, que ens serveix per treballar també el **saber #3.ALG.PA.B** per mitjà, també, d'un patró de creixement no constant. Presentem a l'alumnat la imatge següent i els demanem com serà el quart pas i quants cascs hi haurà, i que trobin una expressió algebraica per al cas general:



Font: [Visual patterns](#), de Fawn Nguyen

Es pot observar que, a cada pas, afegim al rectangle dues columnes i una fila; per tant, al quart pas hi haurà un rectangle format per $9 \times 4 = 36$ cascs. Ara arriba el moment d'organitzar les dades en una taula i, com en l'activitat anterior, en podem fer el gràfic i observar que l'expressió buscada és quadràtica:



Font: elaboració pròpia

Si organitzem la informació com a la taula següent, podem observar-hi regularitats:

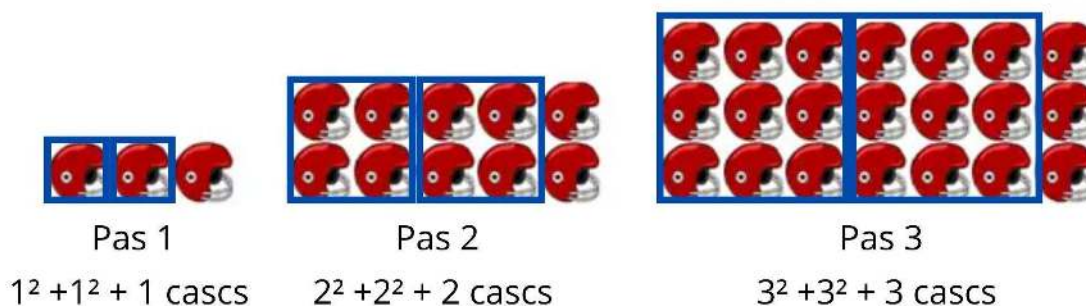
Pas	Nombre de cascs
1	3 (3x1)
2	10 (5x2)
3	21 (7x3)
4	36 (9x4)

Veiem que les bases dels rectangles que formen els cascs són: 3, 5, 7, 9..., és a dir, el rectangle del pas n tindrà base $2n + 1$. I observem també que les altures dels rectangles són: 1, 2, 3, 4..., és a dir, el rectangle del pas n tindrà altura n . Així, arribem a la conclusió que el rectangle del pas n tindrà $(2n + 1) \cdot n$ cascs, o sigui, $2n^2 + n$. Una altra manera de veure la informació és la següent:

Pas	Nombre de cascs
1	$3 = 3$
2	$3 + 7 = 10$
3	$3 + 7 + 11 = 21$
4	$3 + 7 + 11 + 15 = 36$

I, com a l'activitat anterior Patrons i policubs, podem emprar tota la potència del llenguatge algebraic per identificar la progressió aritmètica, calcular-ne la suma, i arribar a l'expressió $2n^2 + n$.

També es pot optar per buscar la solució més visualment. Fixem-nos en la imatge següent en la qual busquem formar quadrats dins del rectangle de cascs:



Font: elaboració pròpia

I podem arribar a la conclusió que al pas n hi haurà $n^2 + n^2 + n$ cascs, és a dir, $2n^2 + n$.

Hem pogut arribar a trobar l'expressió algebraica de formes diverses i aquest és el gran potencial d'aquests tipus d'activitats: són abordables amb més o menys ús del llenguatge algebraic i esdevenen accessibles i adaptables a tot l'alumnat.

saber #3.ALG.PA.B

Al web PuntMat se'ns presenten activitats de descoberta de regularitats a través de la resolució d'equacions i sistemes. Dues d'aquestes activitats, també esmentades al bloc Igualtat i desigualtat d'aquest curs (#3.ALG.ID), són [Pràctica productiva: equacions de segon grau](#) i [Pràctica productiva: sistemes d'equacions](#).

Tal com comenten els autors del web, l'alumnat aprèn a resoldre equacions i sistemes i, a continuació, cal que practiquin. Aquestes activitats proposen posar el focus en la cerca de patrons i regularitats i l'establiment de conjetures, a més de posar en pràctica les destreses apreses per resoldre les equacions i sistemes. Es pot trobar l'activitat d'equacions de segon grau en format fitxa a l'enllaç [Fitxa 1](#), i l'activitat de sistemes d'equacions a l'enllaç [Fitxa 2](#).

Model matemàtic

Sabers

- Ús de les equacions de segon grau com a models matemàtics de situacions contextualitzades. #ALG.ID
- Ús dels sistemes d'equacions com a models matemàtics de situacions contextualitzades. #ALG.ID
- Ús de les funcions com a models matemàtics. #ALG.RF, #ALG.PC
- Ús de recursos digitals o interactius per buscar la funció que modelitza millor un context.
- Anàlisi de les solucions d'un problema, presa de decisions en conseqüència i formulació de prediccions, si s'escau. [ESSI]

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

A 3r d'ESO, l'alumnat ja s'ha iniciat en el treball del llenguatge algebraic, la resolució d'equacions senzilles i funcions lineals i afins, elements que permeten modelar i analitzar diferents tipus de fenòmens, propis de la matemàtica i/o lligats al món real. Si a 2n d'ESO, l'alumnat pot arribar a modelar situacions i relacions lineals i de proporcionalitat geomètrica; ara, a 3r, amb la introducció de les equacions de segon grau i els sistemes d'equacions s'amplia l'horitzó i, per tant, s'obre un ampli ventall de propostes possibles: des de situacions de trajectòries parabòliques fins a problemes d'optimització, per exemple.

El professorat hem de procurar que aquestes propostes per treballar la modelització portin l'alumnat a fer servir representacions diferents, com ara taules, gràfiques o equacions, que ens poden portar a connectar no només les matemàtiques amb altres disciplines i el món real, sinó també idees diferents dins de les matemàtiques mateixes.

Cal remarcar el paper valuós que els programes de geometria dinàmica poden arribar a tenir, ja que, més enllà d'ajudar l'alumnat a visualitzar i explorar conceptes matemàtics, també donen eines per buscar les funcions que millor modelitzen un context, la qual cosa permet crear el model i validar-lo posteriorment.

Comentaris sobre les connexions

La creació de models a 3r d'ESO va lligada als sabers dels diferents sentits que es treballen al llarg d'aquest curs, faciliten el procés de modelització i propicien un bon escenari per treballar situacions contextualitzades. Així, dins del sentit algebraic, s'estableixen connexions amb equacions (#3.ALG.ID) i funcions (#3.ALG.RF, #3.ALG.PC).

Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

Com als cursos anteriors, s'ha destacat el **saber #3.ALG.MM.E** com a essencial, ja que es considera fonamental en el procés de resolució de problemes. Quan l'alumnat fa tasques de modelització, un cop obtinguda la solució, s'ha d'interpretar i validar i, en cas que no solucioni el problema de la realitat, prendre les decisions oportunes.

Observacions sobre alguns sabers específics

Tal com també s'ha esmentat als cursos anteriors, l'alumnat té a l'abast molts recursos per treballar el **saber #3.ALG.MM.D**. El full de càlcul ens permet trobar funcions d'ajust de manera senzilla i amb els programes de geometria dinàmica també se'ns obre un món ple de possibilitats. Aquests programes ofereixen fer representacions gràfiques i càlculs complexos, però a més potencien la part creativa del procés de modelització. En aquest sentit, el repositori de materials del programa [GeoGebra](#) proporciona multitud de propostes ja preparades per aplicar a l'aula.

Recursos i activitats

Recursos i activitats generals per al bloc de sabers

Tal com també es comenta als cursos anteriors, un tipus de tasques en què el treball de modelització matemàtica pot encaixar òptimament són els projectes. Al CREAMAT, s'hi pot trobar una campanya anomenada [Matemàtiques i projectes](#), on es poden trobar molts exemples detallats amb tots els materials necessaris per aplicar-los a l'aula.

Recursos i activitats per treballar sabers concrets

saber #3.ALG.MM.A

Podem trobar moltes situacions contextualitzades que requereixen com a model les equacions de segon grau i poden servir-nos per treballar el **saber #3.ALG.MM.A**. Aquesta idea es pot veure molt clarament al vídeo [Paràboles al món real](#).

Les possibilitats per plantejar petits reptes contextualitzats mitjançant expressions quadràtiques són molt nombroses. Es poden plantejar situacions en què l'alumnat hagi d'optimitzar superfícies, problemes de costos i beneficis, etc. Per exemple, trobem expressions quadràtiques per modelitzar llançaments de projectils. Imaginem que llancem una pilota cap amunt. L'altura (h) en funció del temps (t) es pot modelar amb una equació de segon grau: $h(t) = -4.9t^2 + v_0t + h_0$, on:

- $-4.9t^2$ representa l'efecte de la gravetat (en metres)
- v_0 és la velocitat inicial de la pilota (en metres per segon)
- h_0 és l'altura inicial (en metres)

Un exemple de projecte per treballar gairebé tots els sabers d'aquest bloc, però especialment el **saber #3.ALG.MM.A**, és [Clepsidra](#). Trobem dos exemples de com portar a terme aquest projecte amb tots els materials necessaris al [blog](#) del Sergi del Moral i a la [pàgina](#) de Carlos Morales.

El projecte tracta de construir una clepsidra, un rellotge d'aigua i es basa en l'experimentació de l'alumnat que busca el màxim rigor matemàtic.

El projecte demana tres productes finals:

- La construcció d'una clepsidra (un rellotge d'aigua).
- Un vídeo amb la comprovació del funcionament.
- Un informe científic.



Font: "[Clepsidra](#)", de l'Ateneu

Després d'experimentar i recollir dades es busca el model matemàtic. Com que s'ha de descartar un model lineal, s'arriba a deduir que l'ajust ha de ser quadràtic.

saber #3.ALG.MM.B

Una activitat per treballar el **saber #3.ALG.MM.B** es troba a l'ARC i s'anomena [Quant val?](#), de Jessica Tomàs. Es tracta d'una seqüència d'activitats per treballar els sistemes d'equacions lineals amb dues incògnites. Es treballa la resolució de problemes de l'entorn de la vida quotidiana a partir de tiquets de la compra i s'introdueix la representació i resolució gràfica amb programes de geometria dinàmica.



Oferta de la setmana
2kg de carlotes i 2kg patates....7€



Oferta de la setmana
1kg de pomes i 1kg kiwis.....10€

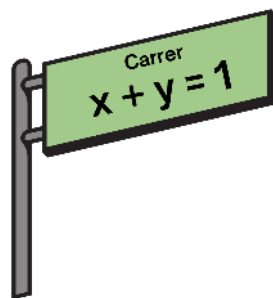


Oferta de la setmana
1,4kg de mero i 0,7kg abadejo.....12,5€

Font: [Quant val?](#), de Jessica Tomàs

saber #3.ALG.MM.B

També per treballar **saber #3.ALG.MM.B**, podem plantejar una activitat amb context geomètric com la que es presenta a continuació. Es tracta d'una adaptació de l'activitat de l'NCTM «Lost in Mathland». La versió [Perduts a Matelàndia](#) és més senzilla que l'original i només engloba el treball de sistemes d'equacions lineals amb dues incògnites (l'original treballa equacions de primer, segon i tercer grau i està destinada a l'alumnat de 4t d'ESO i batxillerat).



Font: elaboració pròpia

L'activitat planteja aquesta situació: Matelàndia és un poble situat sobre un pla de coordenades cartesianes, els carrers i carreteres del qual són els gràfics d'equacions lineals. Tres amics, la Carme, el Francesc i la Núria, van a Matelàndia a passar el dia, però s'acaben perdent i separant els tres. Al cap d'una estona de caminar i veure que no es troben s'escriuen pel mòbil i aquesta és la conversa que tenen:

- Carme: Mireu el nom del carrer on sou. Jo soc al carrer $x + y = 1$.
- Francesc: D'acord, jo soc al carrer $2x + y = 2$.
- Núria: I jo, al carrer $-x + 4y = 3$.
- Carme: D'acord, com que em conec molt bé el poble, crec que ja sé com trobar-nos. Núria, tu no et moguis del lloc on ets. Francesc, tu i jo hem de caminar pel carrer on som ara mateix, en direcció a la plaça major (és a l'origen de coordenades) fins que ens trobem. Si arribes abans que jo a l'encreuament dels nostres carrers, espera'm. Un cop ens hàgim trobat només haurem d'agafar el carrer $-x + 2y = -1$ i trobarem la Núria.

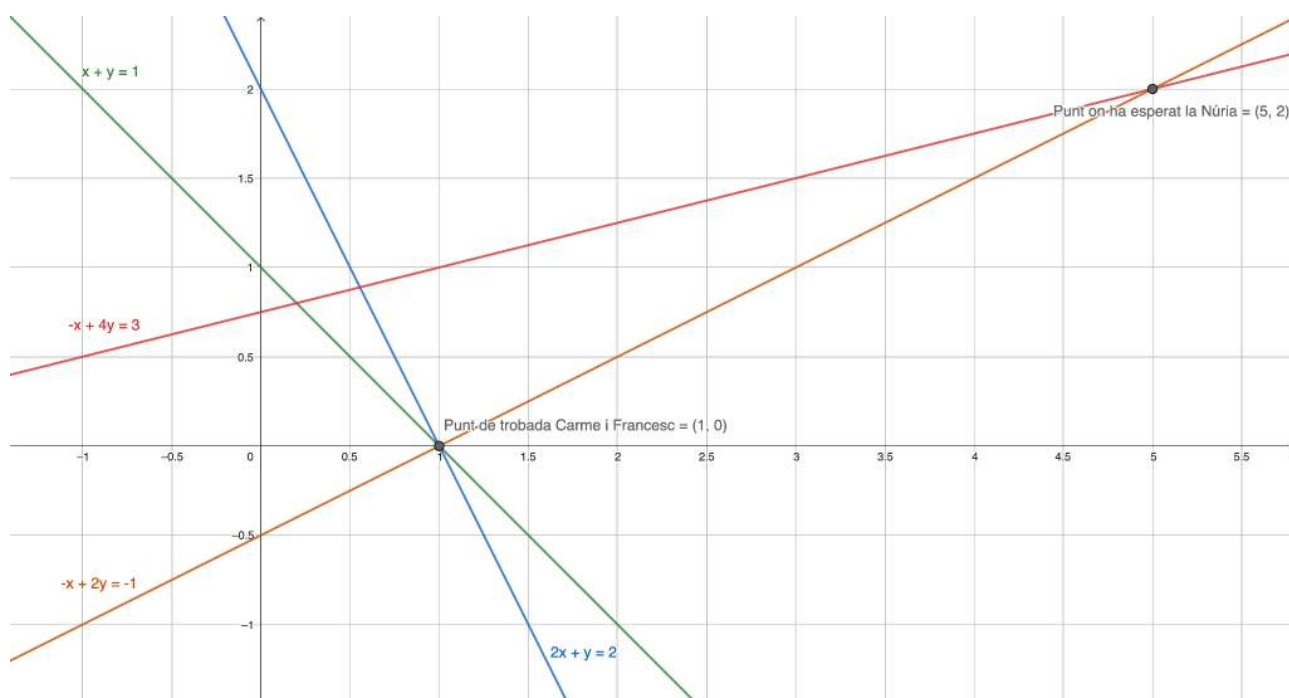
I, seguint les instruccions de la Carme, tots tres amics s'acaben trobant.

L'alumnat, un cop ha llegit bé la situació plantejada, ha de respondre les preguntes següents:

- a) A quines coordenades es troben la Carme i el Francesc?
- b) A quines coordenades ha estat la Núria esperant els seus amics?
- c) Obre el programa de geometria dinàmica, fes un esquema de la situació i indica'n la solució.

És important demanar a l'alumnat que justifiqui i raoni tot el procediment i passos que fa per trobar les respostes a les preguntes.

A continuació, hi ha un possible exemple de resolució gràfica:



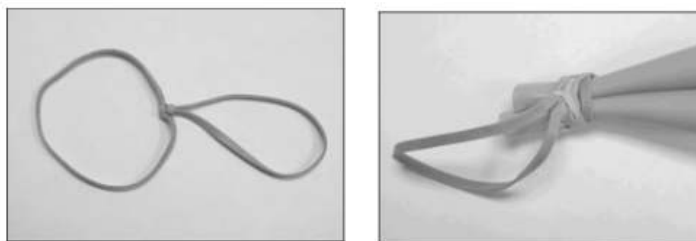
Font: elaboració pròpia

Com a ampliació o si es vol passar l'activitat a 4t d'ESO, es pot incloure algun apartat en el qual sigui l'alumnat qui trobi l'equació d'una recta donades les coordenades de dos punts o fins i tot l'equació d'una paràbola donats tres punts.

saber #3.ALG.MM.C i **saber #3.ALG.MM.D**

Un exemple per treballar el **saber #3.ALG.MM.C** i el **saber #3.ALG.MM.D** és la seqüència d'activitats «Barbie Bungee» de l'NCTM. Tenim disponible una adaptació al català anomenada també «[Barbie Bungee](#)». La idea és que volem predir quantes gomes elàstiques hem de lligar a una nina per fer un salt de 4 m sense que arribi a tocar a terra. En primer lloc, es demana a l'alumnat que faci prediccions abans d'experimentar: quantes gomes caldran per fer un salt de 4 m? Després és el moment de fer proves amb una altura més petita, per exemple 2 m, i recollir dades per analitzar-les i fer-ne una predicció més fonamentada.

A la imatge, es mostra com fer els nusos amb les gomes elàstiques:



Font: NCTM

Es poden muntar plataformes de llançament per tal que l'alumnat pugui treballar en grup autònomament i tots els grups a la vegada.



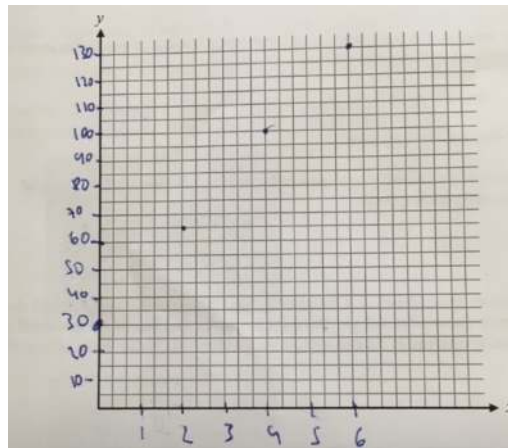
Font: Núria Serra

L'alumnat fa llançaments i mesura la longitud a què arriba la nina mentre en pren nota. Pot resultar interessant gravar els llançaments amb el mòbil a càmera lenta per determinar més exactament la longitud a la qual arriba la nina.



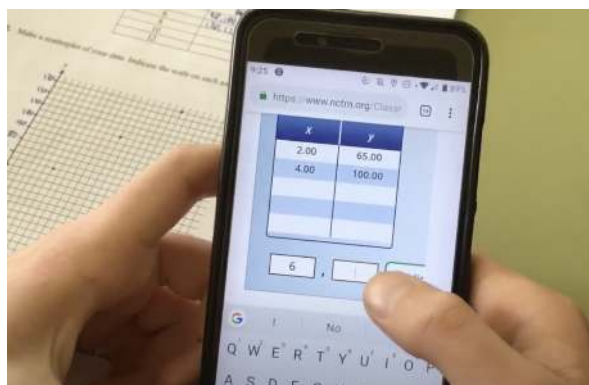
Font: Núria Serra

Un cop ja arriben al màxim de gomes possible abans que la nina toqui a terra, és el moment de continuar amb el full de treball. L'alumnat haurà d'emplenar una taula, fer un gràfic, observar-hi patrons i fer una nova predicció a partir de tota la informació.



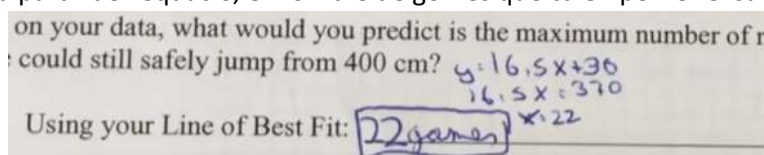
Font: Núria Serra

El següent dia de classe, un cop recordat el que s'ha fet el dia anterior, amb l'ajuda d'una aplicació com per exemple [Line of Best Fit](#), es troba la funció que millor ajusta els punts obtinguts a la classe anterior.



Font: Núria Serra

A continuació, es treballa el significat del pendent de la recta trobada i de l'ordenada a l'origen i, tot seguit, l'alumnat ja pot trobar, a partir de l'equació, el nombre de gomes que calen per fer el salt de 4 m.



Font: Núria Serra

Per acabar, només queda fer el salt de 4 m i veure si les prediccions de cada grup eren correctes. És interessant que un cop tots hagin fet els llançaments des dels 4 m, posem en comú en una taula a la pissarra les longituds obtingudes, el nombre de gomes i l'equació amb què ha treballat cada grup. Comparem els resultats i busquem els motius de per què uns grups han trobat una millor aproximació que els altres.



Font: Núria Serra

Es pot veure un vídeo de com es va portar a terme l'activitat en una aula de 3r d'ESO en aquest [enllaç](#).

Hi ha moltes adaptacions diferents de l'activitat anterior, però volem destacar la proposta que els professors Jordi Font i Roger Grau van dur a terme a l'institut Baix a Mar en format projecte sota el nom [Salt de bungee](#). La proposta planteja aquesta pregunta: Quines característiques ha de tenir un salt per ser excitant i segur? Es comença consensuant el que ens proposa la pregunta. En aquest cas, s'haurà de definir entre tots com hauria de ser un bon salt. Per exemple, llençar des d'una altura d'un punt alt de l'institut, mesurat prèviament, per exemple de 4 o 5 metres. També cal pensar en les variables que apareixen al problema i dissenyar com faran l'experiment i, finalment, validar-lo. Els professors aprofiten el projecte per introduir les característiques de les funcions lineals, sabers necessaris per poder crear un bon model. Es fa la recollida de dades, es fa reflexionar a l'alumnat a partir d'unes preguntes, i s'analitza què ha passat amb les dades obtingudes.

Les dues propostes descrites són de format ben diferent: la primera té una durada de dues sessions i està

completament acotada. La segona és una seqüència més llarga, en què el projecte permet introduir sabers nous i en la qual l'alumnat va prenent decisions constantment. A la segona hi ha construcció de coneixement; a la primera, principalment aplicació. Però tant en una com en l'altra, es crea i es valida el model. En funció del temps, la realitat del centre i els grups, s'haurà d'escollir la proposta que més encaixi.

saber #3.ALG.MM.E

En qualsevol de les activitats i situacions proposades anteriorment a l'alumnat, serà important parlar atenció al **saber #3.ALG.MM.E**, en especial quan les activitats comportin una investigació, manipulació i descoberta. Aturar-se a comprovar si s'està anant per bon camí, valorar críticament les solucions d'un problema, veure si són coherents i adequades, i prendre decisions en conseqüència és essencial per al bon fer matemàtic. Cal donar espais a l'aula perquè això passi i animar els estudiants a reflexionar contínuament sobre la feina que estan fent i sense donar veredictes, sinó propiciant que siguin ells mateixos qui facin l'anàlisi amb l'ajuda de les nostres preguntes, que els aniran guiant, si cal. Si l'activitat és llarga (diverses sessions), es pot fer una aturada de tota la classe en un punt intermedi per posar en comú els resultats obtinguts fins al moment i fer aportacions de millora entre tots.

Variable

Sabers

- A. Variables que intervenen en la definició del terme general d'una successió. #ALG.PA, #ALG.RF
- B. Variables estadístiques discretes i contínues. #EST.DI, #EST.IN

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

A 1r i 2n d'ESO, ja s'ha introduït el concepte de variable i, en particular, a 2n es va vincular amb les relacions funcionals, una idea molt potent que es mantindrà al llarg de tots els estudis matemàtics posteriors. A 3r, es proposa ampliar aquest concepte, relacionant-lo també amb el terme general de les successions numèriques. Es tracta d'una relació natural basada en el fet que una successió és una funció que associa a cada nombre natural n un nombre real definit pel terme general a_n . Així, la connexió entre successions i funcions reforça la comprensió del concepte de variable tant en el context de les funcions com en el terme general de les successions.

Les variables estadístiques també s'han anat introduint de manera progressiva durant els dos primers cursos d'ESO (qualitatius nominals, qualitatius ordinals, quantitatius discretes). Ara, a 3r, es farà un pas més amb el treball de les variables estadístiques quantitatius contínues i les particularitats associades.

Comentaris sobre les connexions

Els sabers del bloc Variable tenen un caràcter molt conceptual i adquireixen tot el significat quan es posen en pràctica en el treball dins d'altres contextos matemàtics (funcions, equacions, estudis estadístics). Pel que fa als dos sabers proposats per a 3r d'ESO, s'observen les connexions següents: el **saber #3.ALG.VA.A**, referent al terme general d'una successió, està estretament vinculat als blocs de patrons i de relacions i funcions del sentit algebraic (#3.ALG.PA, #3.ALG.RF); i el **saber #3.ALG.VA.B**, per la seva naturalesa, està connectat amb els blocs de distribució i inferència del sentit estocàstic (#3.EST.DI, #3.EST.IN).

Observacions sobre alguns sabers específics

Respecte al **saber #3.ALG.VA.A**:

En cursos anteriors, fins i tot a primària, l'alumnat ja ha treballat amb seqüències numèriques i la descoberta de patrons senzills. Ara es fa un pas més establint el terme general d'una successió com a expressió del patró que

permet calcular tots els termes. És clau donar significat a la notació dels termes $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$, i distingir entre les dues variables presents: el valor del terme i la posició, indicada pel subíndex. Consolidar aquesta idea ajudarà a fer un pas més cap a l'abstracció i la introducció de la notació a_n per representar el terme situat a la posició n , que s'anomena terme general.

Quan la successió té un patró de construcció (no totes les successions numèriques el tenen), el terme general pot estar definit a través d'una expressió algebraica que dona el valor d' a_n a partir de la seva posició n (per exemple, $a_n = 5n + 3$, $a_n = 2^n$) o a partir dels termes anteriors de la successió, de manera recurrent (per exemple, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, amb $a_1 = 1$ i $a_2 = 1$, que seria el cas de la successió de Fibonacci).

Caldrà saber calcular els termes de la successió coneixent el terme general i, quan sigui possible, esbrinar el terme general coneixent alguns termes de la successió. Entendre bé aquesta relació entre posició i valor del terme consolida la idea que tota successió és una funció que assigna a cada nombre natural n un nombre real a_n , la qual cosa justifica la connexió amb el bloc de relacions i funcions dins del sentit algebraic. També es pot introduir la notació de la successió tant en format $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}$ com en format $\{a_n\}$, donant-hi sentit.

Respecte al saber #3.ALG.VA.B:

La novetat a 3r és la introducció de les variables estadístiques quantitatives contínues, que són aquelles que poden adquirir qualsevol valor dins d'un interval. Això vol dir que poden assolir un nombre infinit de valors dins d'un rang, de manera que, entre dos valors possibles, sempre n'hi pot haver d'altres. És important consolidar aquesta idea per mitjà d'exemples que facin notar la diferència respecte a les variables quantitatives discretes. El tractament de variables quantitatives contínues comportarà particularitats importants en l'anàlisi estadística (com la necessitat d'agrupar-les en intervals, classes) així com en la representació.

Recursos i activitats

Recursos i activitats per treballar sabers concrets

Recursos per treballar el saber #3.ALG.VA.A:

Els recursos següents poden ajudar a comprendre la relació entre la posició n i el valor a_n .

Es poden fer exercicis de pràctica productiva, com ara calcular alguns termes de la successió a partir del terme general, esbrinar el terme general a partir d'alguns termes de la successió, o calcular la posició d'un terme conegut el seu valor i el terme general de la successió. Particularitzant [una idea](#) del professor Sergi del Moral, es poden utilitzar taules del tipus següent, en què l'objectiu és omplir les caselles en blanc (pot ser molt útil projectar-ho i fer-ho de manera col·laborativa amb tota la classe) fent servir notes adhesives.

Posició n	1	2	3	4	5	6	7	8
Terme general $a_n = 2n + 3$								

Posició n	1	2	3	4	10	20	31	42
Terme general $a_n = n^2 - 2$								

Posició n	1	2	3	4	5	6	7	8
Terme general $a_n =$	6	11	16	21	26	31	36	41

Posició n	1	2		15		43		
Terme general $a_n = 4n - 1$	3	7	11	59	119		203	399

La pàgina web de [Visual Patterns](#) és altament recomanable per treballar l'obtenció de termes generals de successions que expressen el nombre d'objectes que componen cada imatge en una seqüència d'imatges que segueixen un patró constructiu. En concret, es pregunta quants objectes componen la figura 43 de la seqüència. Aquest tipus d'activitats és excel·lent per treballar la visió geomètrica, el raonament, les expressions algebraiques i les variables que intervenen en la definició del terme general d'una successió.

Els fulls de càlcul són un bon recurs per visualitzar les variables que intervenen en una successió: la posició i el valor del terme. També permeten construir la successió a partir del terme general, que s'introdueix com a fórmula de càlcul, o generar successions recurrents.

En situacions contextualitzades, la posició i el terme general tenen un significat concret. Per exemple, en el camp de l'educació financera, es pot plantejar un problema com el següent, en què la posició n són els anys i el terme a_n és el capital acumulat passats n anys. En aquest cas, la successió és un model de l'evolució d'un capital:

Suposem que dipositem en un banc un capital de 100 €. El banc es compromet a augmentar aquest capital un 5 % cada any, de manera que els interessos s'acumularan al capital. Quants diners tindrem al final del primer any? I al final del segon any? I al final del tercer any? I al cap de 10 anys? Podríem expressar quin seria el capital al cap d' n anys? Es podria estudiar l'evolució del capital mitjançant un full de càlcul?

Recursos per treballar el **saber #3.ALG.VA.B:**

Els següents recursos poden ajudar a treballar les variables estadístiques quantitatives discretes i contínues.

Fer una pluja d'idees amb exemples de variables estadístiques quantitatives, classificar-les com a discretes o contínues, i argumentar-ne l'elecció. El professorat pot suggerir exemples com la longitud del peu, el número de sabata, el temps invertit per diversos ciclistes en una etapa, l'edat, les temperatures, el nombre de mascotes en una casa, etc.

Recollir gràfics estadístics de mitjans escrits i, com a primer pas per interpretar-los, identificar el tipus de variable estadística que s'està estudiant.

Elaborar estudis estadístics per equips d'alumnes a partir d'enquestes aplicades a l'alumnat del centre en les quals es preguntí per variables quantitatives discretes i contínues. Es poden utilitzar formularis en línia o portar diferent material a l'aula perquè representin creativament les dades que vagin recollint (policubs, cartes, mongetes, fitxes del parxís, etc.), com mostra la fotografia.



Font: Enric Castellà

Igualtat i desigualtat

Sabers

- A. Distinció entre identitats i equacions. Identitats notables i factorització d'expressions algebraïques. **#ESP.VM**, **#NUM.SO**
- B. Equacions quadràtiques senzilles i incompletes. Resolució d'equacions de segon grau per mètodes geomètrics. **#ESP.VM**
- C. Equacions quadràtiques completes.
- D. Nombre de solucions reals d'una equació de segon grau segons el discriminant. **[AMP]** **#ALG.RF**
- E. Resolució de problemes senzills d'equacions quadràtiques contextualitzats. **[ESS]** **#ALG.MM**
- F. Problemes en context per introduir sistemes d'equacions lineals. Significat d'un sistema de dues equacions lineals amb dues incògnites i de la solució. **#ALG.MM**, **#ALG.RF**
- G. Resolució i significat geomètric d'un sistema de dues equacions lineals amb dues incògnites **#ESP.VM**
- H. Resolució de problemes contextualitzats per mitjà de sistemes de dues equacions lineals amb dues incògnites. **[ESS]**
- I. Expressió de les solucions d'inequacions senzilles amb una incògnita per mitjà d'interval·ls i semirectes. **[AMP]** **#NUM.QU**
- J. Igualtats per expressar funcions senzilles (constants, lineals, afins, quadràtiques i de proporcionalitat inversa) en situacions contextualitzades. **[ESS]** **#ALG.MM**, **#ALG.RF**
- K. Relació entre les solucions d'equacions (de primer i segon grau) i els zeros de les funcions (lineals, afins i quadràtiques) corresponents, emprant tecnologia. **#ALG.RF**

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

Tal com dèiem a 1r i a 2n, la potència del llenguatge simbòlic i dels mètodes algebraics en la matematització de situacions i en la resolució de problemes, ens convida a tractar amb una cura especial el treball de l'àlgebra a secundària per tal d'evitar reduir-ho a procediments mecànics i posar atenció especial a les idees de fons, al sentit dels símbols, de les expressions, de les regles de transformació... No hauríem de perdre oportunitats per treballar a fons entorn de les idees i procediments algebraics, abans que es mecanitzin.

En l'ensenyament de l'àlgebra, cal posar molta atenció a evitar substituir el pensament matemàtic per l'aplicació de regles que acaben perdent el sentit i projectant la idea falsa que fer matemàtiques consisteix simplement a

aplicar unes receptes memoritzades. Aquesta percepció, a vegades, provoca que, en la resolució de problemes que vagin més enllà dels mers exercicis, part de l'alumnat deixi d'emprar les habilitats de pensament lògic i cerqui l'ús de procediments mecànics que o bé no existeixen o bé compliquen el procediment. Vegeu l'apartat «Learning without Thought» del capítol 2 del llibre de Jo Boaler *What's Math got to do with it?* (6).

Voldríem fer una consideració sobre aquest bloc de sabers, Igualtats i desigualtats (ID), en el sentit que, tot i la importància de la resolució d'equacions i inequacions, aprendre-ho és més un mitjà que un fi en si mateix. En el capítol 4, «Àlgebra», del llibre *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria* de Calvo, Deulofeu, Jareño i Morera (Síntesis, 2016), es fa una justificació àmplia del que acabem d'afirmar. En la introducció al capítol podem llegir:

Si miramos cómo se introduce el álgebra en la mayoría de libros de texto, veremos que, después de hablar de monomios y binomios, se pasa rápidamente a algunos ejercicios de frases con relaciones numéricas para ser traducidos a expresiones algebraicas y, a la inversa, convertir éstas en frases. Sin prácticamente transición se pasa al valor numérico de una expresión, se exponen las primeras reglas de la manipulación algebraica y se ejercitan para llegar, lo más rápidamente que se pueda a lo que «realmente interesa»: la resolución de ecuaciones. Y así, hasta el final de sus estudios matemáticos en la educación obligatoria, se conduce a los alumnos a un mundo algebraico progresivamente complejo: paréntesis, denominadores, ecuaciones, sistemas, ecuaciones de segundo grado, manipulación de polinomios, Ruffini...

Siguiendo este itinerario, ya clásico en la educación, no sólo se está dando una imagen sesgada de las matemáticas y de la propia álgebra, sino que se dejan de trabajar aquellos aspectos en los que ésta proporciona un lenguaje y unas herramientas más útiles: la expresión e investigación de relaciones numéricas, de leyes de generalización. La resolución de ecuaciones debería ser un medio más que un objetivo. Y más si tenemos en cuenta que muchos de los problemas escolares que calificamos «de ecuaciones» son resolubles por otros métodos (aritméticos, geométricos, por tanteo organizado...).

Aquest bloc conté 12 sabers i són una continuació del treball del bloc Igualtats i desigualtats. De manera global, aquests sabers se centren en les igualtats notables, les equacions de segon grau, els sistemes de dues equacions i tots adreçats a treballar els diversos processos com la resolució de problemes, el raonament, la representació i la comunicació.

Comentaris sobre les connexions

Com a criteri general, és important aprofitar tota oportunitat per connectar sabers, ja que l'establiment de connexions internes facilita presentar les matemàtiques com un tot coherent i alhora ajuda a construir els sabers de manera que es relacionin els uns amb els altres. Per tant, són ben vingudes totes les connexions que cada docent pugui establir.

Encara que la majoria dels sabers d'Igualtats i desigualtats admeten connexions, volem destacar específicament les del **saber #3.ALG.ID.A**, del **saber #3.ALG.ID.B** i del **saber #3.ALG.ID.G** amb el sentit espacial, en concret amb el bloc **#3.ESP.VM**, i les moltes connexions de nombrosos sabers amb altres blocs del mateix sentit algebraic.

Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

S'han establert tres sabers essencials, lligats a la resolució de problemes, emprant equacions senzilles i sistemes lineals de dues equacions, així com l'ús d'igualtats per expressar funcions elementals:

Saber #3.ALG.ID.E, resolució de problemes senzills d'equacions quadràtiques contextualitzats. **[ESS]**

Saber #3.ALG.ID.H, resolució de problemes contextualitzats mitjançant sistemes de dues equacions lineals amb dues incògnites. **[ESS]**

Saber #3.ALG.ID.J, igualtats per expressar funcions senzilles (constants, lineals, afins, quadràtiques i de proporcionalitat inversa) en situacions contextualitzades. [ESS]

D'altra banda, s'han establert dos sabers d'ampliació:

Saber #3.ALG.ID.D, nombre de solucions reals d'una equació de segon grau segons el discriminant. [AMP]

Saber #3.ALG.ID.I, expressió de les solucions d'inequacions senzilles amb una incògnita per mitjà d'interval·ls i semirectes. [AMP]

Observacions sobre alguns sabers específics

En relació amb el **saber #3.ALG.ID.A**, tot i que ja es podria haver desenvolupat parcialment a 2n d'ESO, pensem que aquest curs és un bon moment per reflexionar sobre la diferència entre una igualtat que correspon a una identitat i la que correspon a una equació. En aquest sentit, la discussió sobre què és (i què no és) una igualtat com $a + b = b + a$ i una altra com $a + b = a \cdot b$, pot ser un bon punt de partida per dur a terme aquesta feina. Si trobem un contraexemple, quan hi sigui, veurem que no es tracta d'una identitat, però, en canvi, sí que és una equació (les solucions de la qual varien si parlem del domini dels enters positius, els enters o els racionals).

Pel que fa a les identitats dites «notables», cal trobar situacions en què tingui sentit aplicar-les. Moltes d'aquestes són de tipus geomètric i, 'per això, connectem aquest saber amb **#3.ESP.VM**, però també amb el sentit numèric, en concret amb **#3.NUM.SO**.

Finalment, aquest saber també inclou la factorització d'expressions algebraïques en casos senzills, que es poden relacionar amb la resolució d'equacions de segon grau (per exemple, les incompletes). En qualsevol cas, pot ser un bon moment per comparar la factorització d'expressions algebraïques amb la factorització de nombres. Aquesta part, però, es pot deixar per 4t si es vol factoritzar expressions de grau més gran que 2.

Pel que fa al **saber #3.ALG.ID.B** i al **saber #3.ALG.ID.C**, els hem separat, ja que entenem que la resolució d'equacions quadràtiques senzilles (incompletes) es pot fer emprant mètodes algebraïcs coneguts (aïllar o treure factor comú, segons els casos) i és una bona ocasió per tal que l'alumnat pugui resoldre-les sense «aplicar» fórmules. Ens referim a equacions senzilles com $(x^2 = 4)$, i incompletes com $x^2 - 9 = 0$, $x^2 - 3x = 0$, o bé $(x - 1)^2 = 9$. Per això, entenem que el **saber #3.ALG.ID.B** ha de precedir el **saber #3.ALG.ID.C** i no a l'inrevés.

Quant al **saber #3.ALG.ID.E**, l'ús de problemes contextualitzats que porten a resoldre equacions quadràtiques senzilles, és rellevant assenyalar que hi ha equacions quadràtiques, com $y = 1/2 k x^2$, la resolució de les quals adquireix rellevància quan es constata que nombroses lleis científiques tenen aquesta estructura, com la llei de la caiguda dels cossos, $s = 1/2 g t^2$, l'energia cinètica, $E_c = 1/2 m v^2$, o la calor despesa per una resistència en funció de la intensitat del corrent $Q = 1/2 R I^2$. Aquests exemples ens permeten entendre que les funcions matemàtiques són generalitzacions de les lleis científiques i que l'expressió algebraica d'una funció expressada per mitjà de variables abstractes, x , y , és una abstracció de l'expressió d'una llei física també amb dues variables, però concretes (espai-temps, energia-velocitat, calor-intensitat). Podem trobar aquesta reflexió en el llibre d'Aleksandrov i altres *La matemàtica, su contenido, sus métodos y su significado*, Alianza Editorial (1973).

També en relació amb el **saber #3.ALG.ID.E**, com ja dèiem en cursos anteriors, és important tenir en compte la problemàtica de l'ús de contextos. Puig Adam, en el seu decàleg (1960) diu: «No oblidar l'origen concret de les matemàtiques i els processos històrics de la seva evolució». Uns anys abans, Lobachevski (1792-1856) havia afirmat: «No hi ha cap branca de les matemàtiques, per abstracta que sigui, que no es pugui aplicar algun dia a l'estudi dels fenòmens del món real». Totes dues cites, des de punts de vista ben diferents, apel·len a la relació entre les matemàtiques i els diferents contextos.

En l'ensenyament de les matemàtiques, les característiques de les activitats d'aprenentatge són un punt clau. Si aquestes activitats tenen com a objectiu la construcció de sabers matemàtics de naturalesa abstracta, cal partir de concrecions d'aquests sabers. D'altra banda, si el que es vol és mostrar les diferents utilitats de les matemàtiques i aplicar-les per resoldre problemes diversos, també cal concretar aquells contextos en què és possible i té sentit aplicar les matemàtiques del currículum. És precisament en l'aplicació de sabers a contextos diferents on es manifesta una part important de la competència matemàtica.

Per tant, en el procés d'aprenentatge matemàtic, hi ha com a mínim dos moments en què els contextos són rellevants:

- a) En l'inici del procés, d'una banda per interessar a l'alumnat, creant reptes que vulgui intentar resoldre, i, de l'altra, per proporcionar-li un suport concret i significatiu per construir nou coneixement.
- b) En la part final del procés, per mostrar que les matemàtiques són útils per analitzar i resoldre situacions d'àmbits molt diversos i, al mateix temps, per consolidar i aplicar els aprenentatges duts a terme.

Per tal d'aportar orientacions sobre quins contextos poden ser els més adequats per introduir a les classes de matemàtiques, pensem que cal anar més enllà de les classificacions generals com els anomenats contextos quotidians o contextos reals, expressions que semblen incloure tot allò que no és directament matemàtic, ja que, si no precisem una mica, podria semblar que tot context no matemàtic pot ser adequat. Presentem, sense ànim d'exhaustivitat, una tipologia de contextos:

Context proper a l'alumne. Interessos, vivències i necessitats dels alumnes. Són aquelles situacions que interessin a l'alumnat perquè els afecten directament. S'inclouen aquí les situacions en què es reclama a l'alumne una participació directa i vivencial (teatralitzacions, jocs de rol, etc.) i també les experimentacions a partir de materials manipulatius. Aquest context se situa, majoritàriament, en la part introductòria del procés d'aprenentatge.

Context quotidià. Entorn social, local, laboral i cultural proper a l'alumnat. Són situacions que 'es poden comprendre per la proximitat i, per aquest motiu, és important analitzar-les i conèixer-les emprant les matemàtiques. Són especialment adequades aquelles que, a més de socialment rellevants, s'han produït en un moment proper al del treball a classe (eleccions, fenòmens apareguts en mitjans de comunicació, actes culturals, esports etc.) **Context històric.** Molts dels sabers del currículum de l'ESO van ser creats fa molts segles per resoldre problemes que tenen sentit quan s'emmarquen en l'època en què es van desenvolupar. Utilitzar aquests problemes i les solucions originals pot servir per donar sentit als sabers involucrats, veure'n l'origen i també conèixer altres maneres de fer matemàtiques d'acord amb els coneixements del seu temps.

Context lúdic. Les recreacions matemàtiques, els reptes i els jocs són un context molt extens que es pot relacionar amb la majoria de sabers matemàtics. Tot i que podria entrar dins del context quotidià (jugar és una activitat humana rellevant i adequada a l'adolescència) és molt ampli i permet dissenyar activitats de durada molt diversa. La idea de repte i l'interès intrínsec de moltes recreacions i jocs és un dels punts clau de la rellevància d'aquest context.

Context científic i tecnològic. Les relacions entre les diferents ciències experimentals, ciències de la salut i la tecnologia amb les matemàtiques són moltes i, per tant, els contextos científics poden ser apropiats tant per construir conceptes matemàtics i comparar-los amb els seus equivalents en altres ciències, com també per aplicar sabers matemàtics ja construïts. Cal tenir en compte que tant aquest context com els dos següents tenen relació amb altres matèries del currículum, per la qual cosa és adequat introduir-los d'acord amb el treball realitzat en les matèries relacionades.

Context social. Moltes problemàtiques de les ciències socials (geografia, història, economia etc.) i del món d'avui dia (desigualtats, guerres, pandèmies, canvi climàtic etc.) necessiten les matemàtiques per ser analitzades i, al mateix temps, ajuden a donar sentit a molts sabers, especialment el sentit estocàstic.

Context humanístic. L'art, la fotografia, la música, la literatura i la resta de disciplines dites humanístiques comparteixen totes elles relacions amb les matemàtiques, en els dos sentits esmentats: ajudar a construir conceptes matemàtics per mitjà de plasmacions artístiques i proporcionar activitats d'aplicació de les matemàtiques en l'anàlisi de problemàtiques d'aquestes disciplines.

Context matemàtic. Fer matemàtiques és, moltes vegades, treballar en el context pròpiament matemàtic i en les connexions internes que hi ha entre els diferents sabers; mantenir la idea de repte, que porta a voler fer allò que es proposa, i basar-se en aquells sabers que ja poden considerar-se concrecions, per tal de construir-ne d'altres.

Entenem que una tipologia de contextos com aquesta pot ajudar a trobar exemples de situacions per ser treballades a l'aula, procurar que els contextos abastin l'ampli ventall proporcionat i també ser compartides amb el treball en altres matèries, sempre tenint en compte les característiques i els interessos de l'alumnat.

El **saber #3.ALG.ID.F**, resolució de problemes contextualitzats per mitjà de sistemes de dues equacions lineals amb dues incògnites, mereix un comentari detallat: ens trobem davant d'un saber que l'alumnat pot construir realment partint de problemes, resolent primer sense l'ús del llenguatge algebraic (manipulant el llenguatge icònic) i, posteriorment, per mitjà d'una connexió entre representacions (icònica i algebraica), traspasar allò que s'ha fet en el llenguatge icònic al llenguatge algebraic per tal de descobrir un dels mètodes més importants de la resolució de sistemes lineals com és el de reducció. Es pot trobar informació sobre com les connexions ens ajuden a construir coneixement matemàtic a l'article de de la Fuente, A. i Deulofeu, J. (2022), «Uso de las conexiones entre representaciones por parte del profesor en la construcción del lenguaje algebraico», *Bolema*, vol. 36, núm. 72, p. 389-410. També a de la Fuente, A. (2022), «Aprender a usar el álgebra en secundaria mediante la resolución de problemas», *SUMA*, núm. 99, p. 49-60.

El **saber #3.ALG.ID.G** i el **saber #3.ALG.ID.H** completen el treball amb sistemes de dues equacions lineals amb dues incògnites iniciat en el **saber #3.ALG.ID.F**. En el primer cas, la representació gràfica dona significat a cadascuna de les equacions, com a expressions de funcions, i a la solució del sistema (quan n'hi ha) com la intersecció de les dues rectes. També es poden connectar les posicions relatives de les dues rectes (coincidentes, secants o paral·leles) amb les solucions del sistema (compatible indeterminat –infinites solucions–, compatible determinat –una solució–, incompatible –cap solució–). Amb el **saber #3.ALG.ID.H** es completa el treball amb la resolució de problemes contextualitzats per mitjà de sistemes d'equacions lineals. Recordem que sempre que treballem amb situacions contextualitzades és important no perdre el significat del context en el procés de resolució.

Recursos i activitats

Recursos i activitats generals per al bloc de sabers

El professor Charlie Gilderdale de NRICH va fer una conferència al CREAMAT l'any 2024 amb el títol «Enriquecer la enseñanza de las matemáticas. ¿Qué experiencia les ofrecemos a nuestros alumnos?» en què apareixen diversos sabers corresponents al sentit algebraic de 3r d'ESO. Partint d'una situació de rectangles, perímetre i àrea, va encadenant diverses activitats relacionades amb equacions de segon grau i sistemes d'equacions, sabers corresponents a aquest curs. Es pot trobar el guió de la sessió i la presentació en diapositives a l'enllaç de NRICH: [Enriquecer la enseñanza de las matemáticas](#).

Les activitats proposades són un molt bon exemple de com treballar sabers algebraics per mitjà d'activitats competencialment riques, que parteixen de sabers del sentit espacial i es connecten amb sabers algebraics, en particular equacions de segon grau i sistemes d'equacions.

Els jocs de rol, en general, són una bona activitat tant introductòria com de síntesi de diversos sabers d'un bloc determinat. En concret, el recurs «*Role-play* sobre coordenades, equacions, inequacions i sistemes de primer grau» treballa la majoria dels sabers d'aquest bloc. El podeu trobar a l'article «Nosaltres com a recurs: *role-plays* a classe de matemàtiques (i 2)» de NouBiaix (Aubanell, 2017).

Recursos i activitats per treballar sabers concrets

En relació amb el saber **#3.ALG.ID.A**, proposem dos recursos, un per analitzar semblances i diferències entre identitats i equacions, i l'altre per treballar al voltant de les identitats notables.

El primer consisteix a analitzar aquesta igualtat: $a + b = a \cdot b$ i $a + b = a \cdot b$, i discutir-ne amb l'alumnat el significat i la validesa. Del fet que la igualtat no valgui per a qualssevol valors d' a i de b , se'n dedueix que no és una identitat (amb un únic contraexemple n'hi ha prou), a diferència del que serien $a + b = b + a$, o bé $a \cdot b = b \cdot a$, que expressen propietats generals. Si considerem la igualtat com una equació, podem trobar-ne les solucions (en els enters positius, és única: $a = 2$ i $b = 2$; en els enters, tenim a més $a = 0$, $b = 0$, i, en els racionals, el nombre de solucions és infinit, de manera que per a cada valor d' a obtenim un valor de b).

Els models geomètrics són bones representacions en molts moments del treball de l'àlgebra, en particular per analitzar les identitats notables i per demostrar-les. Als enllaços següents, teniu algunes d'aquestes representacions emprant models geomètrics:

[Model geomètric per al desenvolupament d' \$\(a + b\) \cdot \(a - b\)\$ | Aplicació de Recursos al Currículum](#)

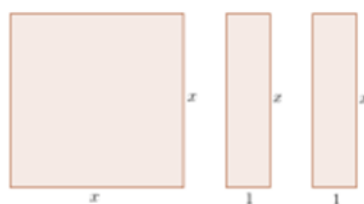
[Model geomètric per al desenvolupament del quadrat de la suma | Aplicació de Recursos al Currículum](#)

[Model geomètric per al desenvolupament del cub de la suma | Aplicació de Recursos al Currículum](#)

Si es vol ampliar els desenvolupaments d' $(a + b)^n$ elevat a un exponent més gran que 3, un recurs interessant és mostrar el triangle aritmètic (també anomenat triangle de Tartaglia o de Pascal) i observar que els nombres que apareixen en les successives files corresponen als coeficients del desenvolupament d' $(a + b)^n$.

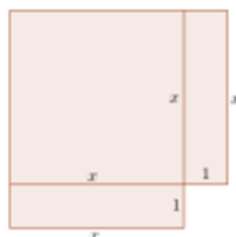
Pel que fa al saber **#3.ALG.ID.B**, resolució d'equacions quadràtiques senzilles i incompletes i resolució d'equacions de segon grau per mètodes geomètrics, l'ARC conté una proposta molt ben documentada de la professora Iolanda Guevara per aplicar aquest tipus d'activitats a l'aula. Aquesta proposta es basa en una recerca sobre història de les matemàtiques i, en particular, sobre els mètodes emprats pels àrabs per resoldre equacions de segon grau. El títol és [La resolució geomètrica d'equacions de segon grau. Hisâb aljabr wal-muqabala de Mohamed Ben-Musa al-Khwârizmî \(813\)](#). Una explicació breu sobre com funciona el mètode d'Al-Khwarizmi és la següent:

La història de l'àlgebra és plena de problemes no tan sols plantejats a partir de contextos geomètrics sinó (i això és el que, en aquest cas, ens interessa) resolts mitjançant mètodes geomètrics. Així la geometria pot actuar com a font i com a camí en el plantejament i la resolució de problemes algebraics. Una equació de segon grau com $x^2 + 2x = 8$, per als antics grecs seria una combinació d'un quadrat de costat x i de dos rectangles de costats 1 i x de manera que les àrees de les tres figures sumen 8:



Font: Elaboració pròpia

Reordenant-ho tindrem:



Font: Elaboració pròpia

Si completem aquesta figura amb un quadrat 1×1 (en verd), obtindrem un quadrat gran de costat $x + 1$ i d'àrea 9 (ja que és la suma de l'àrea que teníem i que valia 8 unitats amb l'àrea del quadrat verd afegit que val una unitat):



Font: Elaboració pròpia

Amb aquesta configuració, ens adonem que $x + 1$ és el costat d'un quadrat d'àrea 9. Això voldrà dir que $x + 1 = 3$ i que, per tant, $x = 2$ és la solució positiva de la nostra equació de segon grau.

Hi ha diferents procediments de naturalesa geomètrica com aquest per resoldre equacions. Alguns poden ser molt instructius a classe, perquè representen una interpretació visual de la fórmula de resolució d'equacions de segon grau que, a vegades, resulta una mica críptica per a l'alumnat.

D'altra banda, hi ha un recurs en línia que permet transformar expressions simbòliques fins a grau 2 a partir de fer transformacions geomètriques. És molt interessant i, a més, es pot fer amb material manipulable: [Algebra Tiles](#).

En relació amb el **saber #3.ALG.ID.C**, al PuntMat trobem una pràctica productiva interessant. Com totes les activitats d'aquest tipus, els alumnes han de practicar resolent equacions de segon grau, però de tal manera que la finalitat no és resoldre les equacions pel sol fet de practicar, sinó que l'objectiu de l'activitat és un altre, per tal que, a partir de les solucions trobades, descobrim un patró relacionat amb els valors dels paràmetres de les equacions proposades. Trobareu aquest recurs a

<https://puntmat.blogspot.com/2014/03/practica-productiva-i-equacions-de.html>

Pel que fa al **saber #3.ALG.ID.F**, podeu trobar una seqüència d'activitats per introduir la resolució de sistemes d'equacions lineals (dues equacions amb dues incògnites) a l'article «Aprender a usar el álgebra en secundaria

mediante la resolució de problemas» de SUMA (de la Fuente, 2022). L'inici d'aquesta seqüència consisteix a proposar un problema l'enunciat del qual s'expressa icònicament, de manera que l'alumnat pot intentar trobar la solució del problema sense conèixer les tècniques per resoldre sistemes, i així les diverses resolucions trobades siguin una ajuda per aprendre a resoldre sistemes d'equacions. Un exemple proposat per Abraham de la Fuente és el problema «Pizzes i begudes», amb algunes possibles resolucions trobades per alumnat de 3r d'ESO:

Un problema inicial: Calcular el preu d'una porció de pizza i d'una beguda, sabent que tots els trossos valen el mateix i totes les begudes també:



Algunes possibles resolucions

1. Dividir per 2 la 1a condició i treure-la de la 2a: pizza: 3,20€
2. Obtindre el preu de 1 pizza i 1 beguda (4€) de la 2a condició i portar-ho a la 1a, per obtenir que 2 begudes valen 1,60€.
3. Doblar la 2a condició i restar-li la 1a, per obtenir que 2 pizzes valen 6,40€.
4. Restar les dues condicions: 1 pizza i 3 begudes valen 5,60€. Restar aquesta condició a la 2ª, i obtenir: 2 pizzes 6,40€

Font: elaboració pròpia a partir de l'article de SUMA (de la Fuente, 2022)

Després de treballar diversos problemes com l'anterior, enunciat icònic, i analitzar diferents resolucions, es planteja una nova seqüència que té com a objectiu promoure la resolució d'un sistema lineal de dues equacions amb dues incògnites, expressat algebraicament, sense donar instrucció prèvia de com es resolen els sistemes d'equacions lineals. En aquestes condicions, resoldre un sistema és un problema per als alumnes, ja que no disposen de mètodes generals per abordar-lo. Una possible seqüència és:

Activitat final: Seqüència de tres problemes

1)



55€



62€

2)

Troba valors per x i per y , de manera que es verifiquin les dues igualtats:

$$\begin{cases} 3x + y = 55 \\ 2x + 2y = 62 \end{cases}$$

3)

Troba valors per a i per b , per tal que es verifiquin les dues igualtats:

$$\begin{cases} 2a + b = 18 \\ 4a + b = 29 \end{cases}$$

Font: elaboració pròpia a partir de l'article de SUMA (de la Fuente, 2022)

Pel que fa al **saber #3.ALG.ID.G**, al PuntMat, podem trobar una [pràctica productiva](#) sobre sistemes d'equacions.

En relació amb el **saber #3.ALG.ID.H**, el recurs exposat a propòsit del **saber #3.ALG.ID.F**, «Pizzes i begudes», serveix de guia per generar altres problemes contextualitzats que es resolen per mitjà d'un sistema de dues

equacions lineals.

Relacions i funcions

Sabers

- A. Identificació d'una funció com a relació entre dues variables i estudi de la relació de dependència entre elles. [ESS] #ALG.VA
- B. Relació entre les diferents maneres de representar una funció (verbal, tabular, gràfica i expressió algebraica).
- C. Estudi i aplicació en contextos de la funció de proporcionalitat inversa: representació i característiques; i comparació amb les funcions estudiades anteriorment. [ESS] #NUM.RP, #ESP.VM, #ALG.MM
- D. Estudi i aplicació en contextos de la funció quadràtica i les seves característiques: representació, efecte del coeficient del terme quadràtic en la forma de la paràbola, incidència del terme independent en el gràfic, relació entre els punts de tall i les solucions de l'equació de segon grau i estudi de la simetria i del vèrtex. [ESS] #ESP.VM, #ALG.MM, #ALG.ID
- E. Anàlisi de les propietats de diferents tipus de funcions a partir de la seva gràfica: creixement i decreixement, màxims i mínims, domini i recorregut, simetries, etc.
- F. Ús de recursos digitals i interactius per a la representació de taules i gràfics.
- G. Extracció d'informació d'una funció donada gràficament, mitjançant una taula, una expressió algebraica i verbalment. #ALG.ID

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

Tal com també es comenta al document de 2n d'ESO, un dels conceptes matemàtics fonamentals que s'estudien al llarg de l'etapa de secundària és el de funció. Les funcions ens permeten estudiar fenòmens de canvi i relacions entre variables, motiu pel qual són una part fonamental en la modelització de situacions contextualitzades (#3.ALG.MM) i permeten establir connexions amb altres camps de les ciències o les ciències socials.

Es proposa introduir el concepte de funció a 2n d'ESO, un cop s'ha introduït el llenguatge algebraic. Ara, a 3r, s'ha de seguir el camí iniciat al curs anterior, partint del fet que les funcions proporcionen contextos per pensar en les relacions de canvi. Cal vetllar perquè l'alumnat adquireixi una visió profunda de les funcions i no en limiti el concepte a una fórmula o a un seguit de pautes per seguir per aconseguir un gràfic. Al llarg de tot aquest bloc Relacions i funcions, és important seguir-lo, tal com es proposa també a 2n d'ESO, tenint en compte el bloc Variable, #3.ALG.VA, que cal anar treballant conjuntament donada l'estreta relació que hi té.

Si a 2n es proposa començar l'estudi de funcions lineals i afins, a 3r es proposa seguir amb l'estudi de relacions de proporcionalitat inversa i quadràtiques, i analitzar aquestes relacions per començar a construir famílies de funcions a partir de les característiques. Una eina que hem de tenir present en l'estudi d'aquestes característiques són els programes de geometria dinàmica, que poden ajudar a millorar-ne la comprensió conceptual.

Comentaris sobre les connexions

Com ja s'ha comentat a l'apartat Reflexions generals, és evident la connexió amb el bloc Variable, #3.ALG.VA, així com també amb el bloc Igualtat i desigualtat, #3.ALG.ID, ja que no es pot deslligar l'estudi de les característiques de les funcions de la resolució d'equacions (vist tant des del punt de vista analític com gràfic).

La introducció de la funció de proporcionalitat inversa estableix la connexió amb el bloc Raonament proporcional (#3.NUM.RP) del sentit numèric.

A través de les funcions, podem descriure molts fenòmens, ja siguin quotidians o bé d'altres àmbits de coneixement o fins i tot dins de les matemàtiques mateixes. Estem, per tant, parlant de modelització matemàtica i establint connexions directes amb els blocs **#3.ALG.MM** i **#3.ESP.VM**.

Comentaris sobre les connexions

Respecte al **saber #3.ALG.RF.A**, identificar una funció com una relació entre dues variables és fonamental per establir les bases matemàtiques per comprendre com una variable influeix sobre l'altra, i com es poden modelar i preveure comportaments. A l'hora d'identificar la funció com a relació entre dues variables és essencial parlar atenció a la diferència entre variable i incògnita. Vegeu el bloc **#2.ALG.VA** de 2n d'ESO on es treballa amb profunditat. Ara a 3r, des del bloc Relacions i funcions es proposa seguir en la mateixa línia.

També es considera essencial l'assoliment d'un bon coneixement de la funció de proporcionalitat inversa (**saber #3.ALG.RF.C**) i de la funció quadràtica (**saber #3.ALG.RF.D**), que tenen aplicacions pràctiques en moltes àrees del coneixement, així com també dins de les matemàtiques mateixes. A 4t es passarà a l'estudi d'altres tipus de funcions, com ara l'exponencial.

Observacions sobre alguns sabers específics

S'introdueix el **saber #3.ALG.RF.E**, que a banda d'aportar a la comprensió conceptual de la idea de funció, serà necessari per al treball que posteriorment s'hagi de fer a 4t. Les gràfiques permeten veure intuïtivament com es comporta una funció. Entendre les propietats com el creixement, el decreixement, els màxims, els mínims, les simetries, etc., a partir de la gràfica, ajuda a visualitzar com les funcions canvien i a identificar patrons ràpidament. D'altra banda, treballant els gràfics de les funcions, l'alumnat desenvolupa habilitats per analitzar i interpretar informació de manera crítica.

Respecte al **saber #3.ALG.RF.F**, els recursos digitals de geometria dinàmica poden ajudar l'alumnat a veure clarament com les relacions entre les variables es modifiquen de manera immediata quan canvien certs valors. Aquesta interactivitat facilita la comprensió i permet l'estudi de moltes situacions de canvi: com canvia el gràfic d'una funció quan modifiquem els coeficients d'una equació, com es comporten les funcions en diferents intervals del seu domini o com es transformen les gràfiques a mesura que es modifiquen certs paràmetres, per exemple. Aquests recursos permeten que l'alumnat vegi i experimenti amb els conceptes més intuïtivament, i ajuden a millorar la comprensió de les relacions funcionals.

El **saber #3.ALG.RF.G**, considerat essencial a 2n per establir unes bones bases que permetin un estudi posterior més profund, es continua tractant a 3r, però aquest treball ja no es considera essencial ja que s'hi ha incidit al curs anterior. Anàlogament, a 2n es pretén que l'alumnat sigui capaç d'extreure informació d'una funció donada per mitjà de qualsevol de les representacions possibles. A l'hora de fer-ho a partir de gràfics, és interessant treballar també amb situacions no quantificades per centrar el focus en els diferents tipus de variació d'una funció, i no només en els valors concrets que pren.

Recursos i activitats

Recursos i activitats generals per al bloc de sabers

A l'ARC podem trobar l'element [Introducció a les funcions](#) de Victòria Oliu. Es tracta d'una seqüència didàctica per introduir les funcions i treballar especialment les de primer i segon grau. Per començar, es proposa l'activitat manipulativa «Mesurem caps», en què apareixen de manera natural funcions de primer i segon grau, la funció identitat i una funció de tercer grau. Es presenten aplicacions GeoGebra que es poden projectar i fulls de treball que es poden imprimir o copiar a la llibreta. La funció de segon grau es treballa amb l'activitat «Una paràbola del bàsquet», que utilitza una fotografia estroboscòpica combinada amb GeoGebra.

Tal com també s'ha comentat als cursos anteriors, un llibre de referència en l'estudi de funcions és [El lenguaje de funciones y gráficas](#) (Shell Centre for Mathematical Education, 1990). En aquest llibre per al professorat es parla de la representació i interpretació de gràfics presentats tant textualment com a partir de dibuixos, sense que calgui un coneixement algebraic. Un segon bloc afronta el treball d'identificació de relacions funcionals i l'expressió en les diferents representacions possibles. Al llarg de tot el llibre proporciona exemples concrets d'activitats, totes elles molt interessants.

Recursos i activitats per treballar sabers concrets

saber #3.ALG.RF.A, saber #3.ALG.RF.F i saber #3.ALG.RF.G

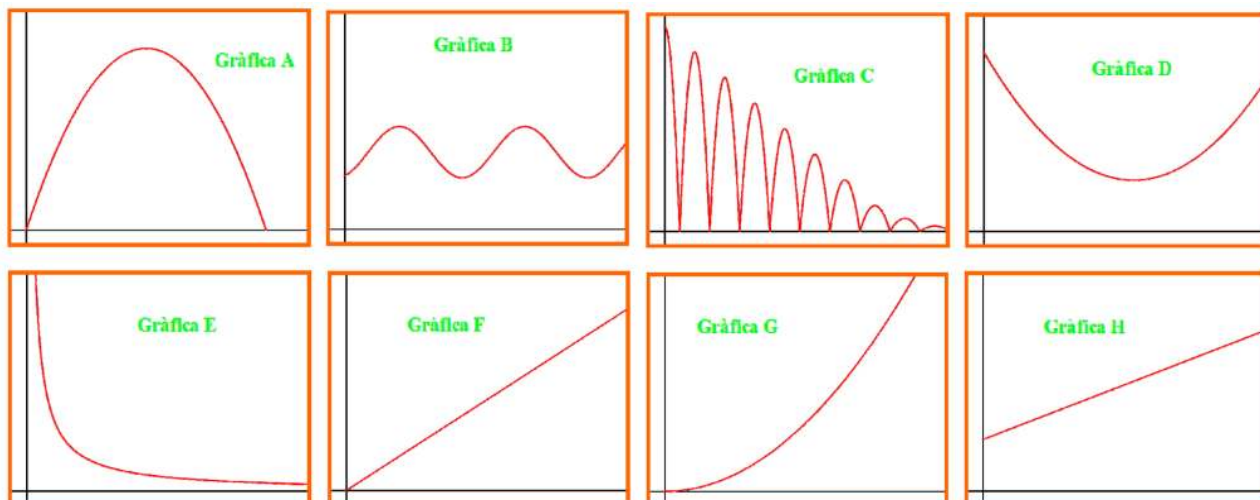
A l'ARC s'hi pot trobar el recurs [Petits relats associats a gràfiques de funcions](#), d'Àlex Sayós, per treballar tant el **saber #3.ALG.RF.A**, el **saber #3.ALG.RF.F** com el **saber #3.ALG.RF.G**. Es tracta de fer tot un seguit d'activitats a partir de quatre relats donats i vuit gràfiques de funcions. És una activitat pensada per fer en grups de quatre alumnes i al llarg de dues sessions, amb l'objectiu principal de saber relacionar relats quotidians amb gràfiques de funcions.

A la primera sessió, s'organitza la classe en grups de 4 i el professorat lliura els quatre relats a cada grup, així com la fitxa de treball.

RELAT 1:	RELAT 2:	RELAT 3:	RELAT 4:
"L'Oriol deixa caure una pilota i observa l'altura que té a cada moment fins que pràcticament es para".	"Observem l'altura a la qual es troba el seient del gronxador de la Mariona en passar el temps".	En Joan diu: "Com més grans siguin els llibres, menys en podrem col·locar dins les caixes".	"Per cada trucada que fa la Clàudia, li cobren una quantitat fixa més una quantitat per cada minut que parla".

Font: [Petits relats associats a gràfiques de funcions](#), d'Àlex Sayós

Es demana a l'alumnat que els llegeixi amb atenció i posteriorment es lliuren les 8 gràfiques.



Font: "[Petits relats associats a gràfiques de funcions](#)", d'Àlex Sayós

La primera activitat que han de fer és discutir entre els integrants del grup quina gràfica associarien a cada relat. Han d'escriure la conclusió a la fitxa que s'ha lliurat a cada grup i argumentar en cada cas per què a cada relat li han associat la gràfica escollida. A continuació, fem la posada en comú amb tot l'alumnat de l'aula. Han d'explicar quina gràfica han escollit per a cada relat i donar l'argumentació que han fet com a grup. Al final, cal arribar a un acord amb tots els grups, de manera que tothom tingui associat cada relat amb la mateixa gràfica.

El següent pas que ha de fer cada grup és establir quines són les variables que intervenen, és a dir, quines

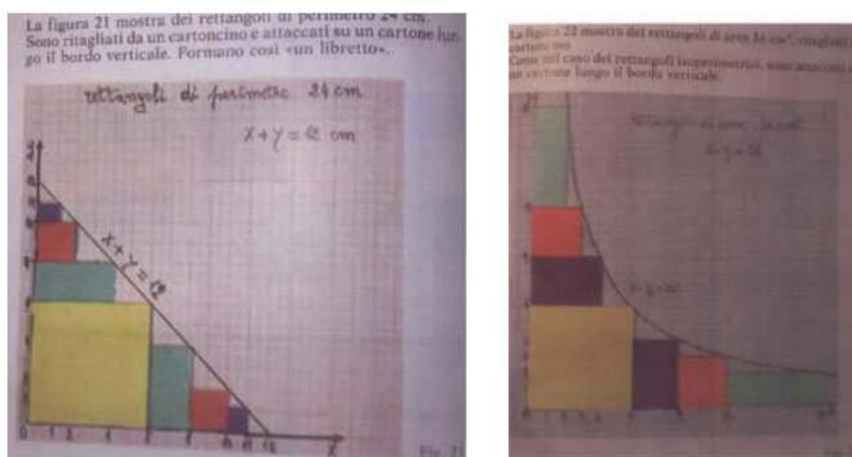
magnituds van a cada eix de cadascuna de les quatre gràfiques acordades, quines unitats de mesura són les més adients en cada gràfica, tenint en compte el relat associat, i quins són els límits de cada eix per tal que la gràfica s'adapti totalment al relat. Tot això ho han de fer sobre les quatre gràfiques que han acordat anteriorment. Tornem a fer una posada en comú amb tota la classe, per tal de reorientar els grups en què les magnituds, unitats de mesura i límits dels eixos escollits no siguin apropiats a les gràfiques.

Per fer la segona part de l'activitat, cada grup haurà de disposar d'un ordinador amb algun programa que permeti representar punts com, per exemple, un full de càlcul o el GeoGebra. L'alumnat haurà d'omplir una taula de valors per a cadascuna de les quatre gràfiques. Aquestes taules les tenen al document de treball. S'haurà de tenir en compte el que es va fer en les activitats anteriors (magnituds, unitats i límits) i s'haurà de ser capaç d'escollir els punts més rellevants de cada gràfica. Un cop han omplert les quatre taules de valors, han de representar totes les coordenades dels punts en el programa de l'ordinador que tinguin. La idea és que, amb els punts que han escrit a les taules de valors, produeixin el gràfic resultant i, posteriorment, el comparin amb la gràfica del relat.

Finalment, cada grup ha de proposar un petit relat que es pugui associar a cadascuna de les quatre gràfiques que van sobrar en la sessió anterior.

saber #3.ALG.RF.C

A l'ARC hi trobem el recurs [Funcions a partir de rectangles isoperimètrics i de rectangles equivalents](#), de l'Anton Aubanell, per treballar el **saber #3.ALG.RF.C**. Es tracta de relacionar, respectivament, rectangles que tenen el mateix perímetre amb el concepte de funció afí; i rectangles que tenen la mateixa àrea amb la funció de proporcionalitat inversa.



Imatges del llibre "Numeri e figure" d'Emma Castelnuovo, editorial La Nuova Italia, 1989

Font: [Funcions a partir de rectangles isoperimètrics i de rectangles equivalents](#), d'Anton Aubanell

Per al bloc de funció afí es proposa el següent:

- Retallar rectangles de dimensions diferents que tinguin tots 24 cm de perímetre en cartolina de diferents colors.
- Dibuixar, sobre paper mil·limetrat, uns eixos de coordenades amb l'origen desplaçat cap a la part inferior dreta i assenyalar ratlletes de separació a cada centímetre del 0 al 12.
- Situar tots els rectangles tal com mostra la primera figura, amb un vèrtex sobre l'origen i dos costats sobre els eixos.
- Dibuixar la recta que determinen els vèrtexs oposats al que està sobre l'origen i escriure les coordenades de diversos punts d'aquesta recta.
- Plantejar aquesta pregunta a l'alumnat: si (x, y) és un punt genèric d'aquesta recta, quina relació hi haurà d'haver entre les coordenades x i y ?
- Posar nom a aquesta funció.

Per al bloc de funció de proporcionalitat inversa es proposa el següent:

- Retallar rectangles de dimensions diferents que tinguin tots 36 cm^2 d'àrea en cartolina de diferents colors.
- Dibuixar, sobre paper mil·limetrat, uns eixos de coordenades amb l'origen desplaçat cap a la part inferior dreta i assenyalar ratlletes de separació a cada centímetre del 0 al 20.
- Situar tots els rectangles tal com mostra la segona figura, amb un vèrtex sobre l'origen i dos costats sobre els eixos.
- Dibuixar la corba que determinen els vèrtexs oposats al que està sobre l'origen i escriure les coordenades de diversos punts d'aquesta corba. Per dibuixar-la pot ser útil un regle flexible (*spline*).
- Plantejar aquestes preguntes a l'alumnat: si (x, y) és un punt genèric d'aquesta corba, quina relació hi haurà d'haver entre les coordenades x i y ? Aquesta corba arribarà mai a tocar els eixos de coordenades?
- Posar nom a aquesta funció.

Plantegem una bona oportunitat per presentar la hipèrbola (en particular la hipèrbola equilàtera) com la corba corresponent al gràfic d'una funció de proporcionalitat inversa. Ara, amb el GeoGebra, es poden dibuixar diferents hipèrboles equilàteres i comparar els perfils segons el numerador.

També podem evidenciar connexions amb ciències experimentals, indicant que, quan un feix de partícules amb càrrega elèctrica s'apropa a un nucli atòmic, la seva trajectòria es desvia seguint una hipèrbola. És l'anomenada dispersió de Rutherford.

saber #3.ALG.RF.C, saber #3.ALG.RF.E i saber #3.ALG.RF.F

Per treballar els **sabers #3.ALG.RF.C, #3.ALG.RF.E i #3.ALG.RF.F**, hi ha moltes propostes amb GeoGebra que se'ns presenten ja preparades directament per treballar a classe. Una d'aquestes propostes és [Funcions de proporcionalitat inversa](#). L'activitat comença introduint com és una funció de proporcionalitat inversa, quina forma té l'expressió algebraica i de quin paràmetre depèn. Després proposa que l'alumnat experimenti i, movent un punt lliscant, esbrini com el paràmetre determina la forma de la gràfica. També fa èmfasi en els punts de tall amb els eixos de coordenades, el creixement i decreixement de la funció i la simetria. Per últim, es donen unes quantes gràfiques i es demana trobar les expressions corresponents.

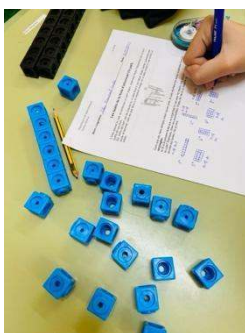
saber #3.ALG.RF.B, saber #3.ALG.RF.D i saber #3.ALG.RF.F

Per treballar el **saber #3.ALG.RF.B**, el **saber #3.ALG.RF.D** i el **saber #3.ALG.RF.F**, tenim la seqüència d'activitats [Taules d'aniversari, patrons i funcions](#), de Núria Serra, que es pot trobar a l'ARC. Es tracta d'una adaptació de l'activitat «Pattern and functions» de l'NCTM. La situació de partida és el muntatge de les taules per organitzar una festa d'aniversari. Per mitjà de l'activitat es treballen els següents objectius:

- Estudiar com varia l'àrea d'un rectangle mantenint el perímetre fix
- Obtenir el rectangle d'àrea màxima, d'entre tots els que tenen el mateix perímetre
- Descobrir la funció de segon grau fent el gràfic llargada del rectangle – àrea
- Deducir la representació algebraica de la funció
- Generalitzar el problema al cas d'un perímetre qualsevol

Es planteja a l'alumnat la situació següent'. L'estiu passat, la Laia va començar un petit negoci: organitzar festes d'aniversari per a nens petits del seu barri. Els veïns del barri, per tal d'ajudar-la, a cada festa li van deixar taules petites quadrades d'1 m de costat per posar el berenar, a cada costat de les quals cabia només un infant. Com que els nens sempre volien seure junts, la Laia ajuntava les taules quadrades formant rectangles. Si a la primera festa que va organitzar hi van anar 18 infants, com va poder posar les taules la Laia?

Aquest és el fil conductor de la proposta que ens portarà a optimitzar la superfície del rectangle format per les taules, veure en quins casos les taules es poden posar en forma de quadrat, treballar patrons i, finalment, descobrir la funció de segon grau (gràficament i algebraicament):



Font: Núria Serra

El treball es fa en grups de quatre per tal de compartir idees, però les fitxes de treball es lliuren individualment. En una primera part s'estudia la variació de l'àrea del rectangle mantenint el perímetre a 18 m. Es facilita material (polícubs) a l'alumnat que el necessiti i/o el demani. Després s'organitza la informació en una taula i s'observen els patrons que hi ha:

Llargada	Amplada	Perímetre	Àrea
1	8	18	8
2	7	18	14
3	6	18	18
4	5	18	20
5	4	18	20
6	3	18	18
7	2	18	14
8	1	18	8

d) Quins patrons podeu observar a la taula anterior?

Les àrees creixen fins als seus tope i decreixent simètricament. Que va de 8 al 1 i del 1 al 8.

d) Quins patrons podeu observar a la taula anterior?

La llargada va d'1 a 8 progressivament mentre l'amplada fa l'oposat. El perímetre és sempre 18. L'àrea va de menor a major i de major a menor de forma simètrica.

Font: Núria Serra

Podem observar per exemple que:

- a mesura que la llargada augmenta, l'amplada disminueix, sempre sumant 9.
- a mesura que la llargada augmenta, l'àrea augmenta fins a un punt i després comença a disminuir de forma simètrica.
- a l'àrea sempre hi ha una diferència de 4 unitats quadrades entre dos valors consecutius de la taula.

Podem introduir què passaria si en lloc de parlar de nens i taules parléssim només de rectangles. Si les dimensions no tenen perquè ser enteres, podríem trobar un rectangle de perímetre 18 i àrea més gran que 20? Com seria?

Tot seguit es demana si les taules es poden disposar en forma de quadrat:

Departament de Matemàtiques
Institut Dertosa

3r d'ESO

e) Quina disposició de taules s'aproxima més a un quadrat? Es pot fer un quadrat?

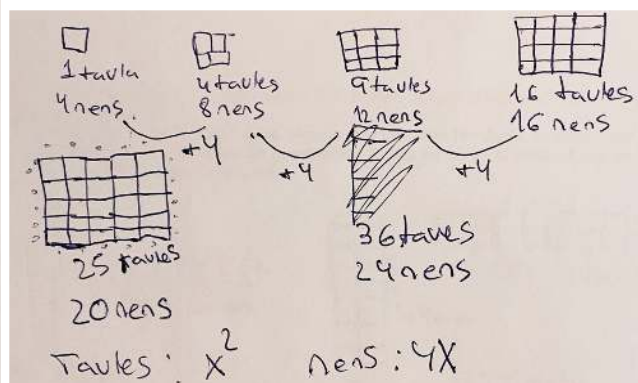
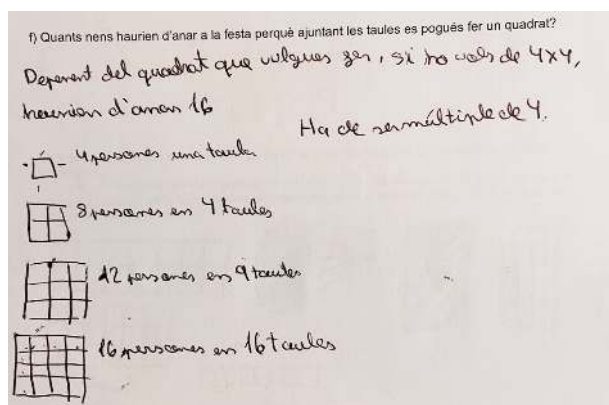
No, perquè hauria de treballar amb decimals, cap quadrat dona un perímetre de 18.

e) Quina disposició de taules s'aproxima més a un quadrat? Es pot fer un quadrat?

No, no es pot fer un quadrat perquè el nombre de persones té que ser exacte. Si tinguéssim un quadrat els costats haurien de ser de 4,5.

Font: Núria Serra

I es respon a la pregunta de quants nens i nenes haurien d'anar a la festa perquè les taules es poguessin posar en forma de quadrat. Hi haurà alumnes a qui els sortirà fer servir llenguatge algebraic naturalment i d'altres que ho expressaran verbalment.



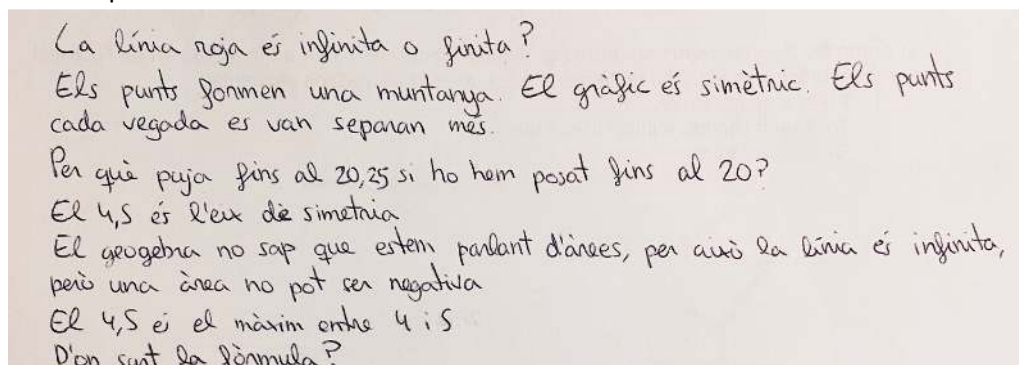
Font: Núria Serra

En una segona part, es demana fer el gràfic amb GeoGebra que compara la llargada del rectangle amb la seva àrea, amb l'ajuda d'un tutorial que es pot trobar a la fitxa de l'activitat:



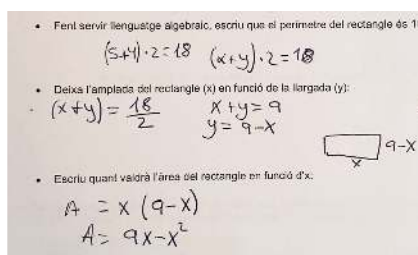
Font: Núria Serra

Un cop obtingut el gràfic, es demana a l'alumnat què observa i quines preguntes li venen al cap. Poden sortir preguntes que donen peu a converses interessants:



Font: Núria Serra

Després d'una posada en comú, es treballa com obtenir l'expressió que relaciona les dues variables i que surt a la finestra algebraica del GeoGebra:



Font: Núria Serra

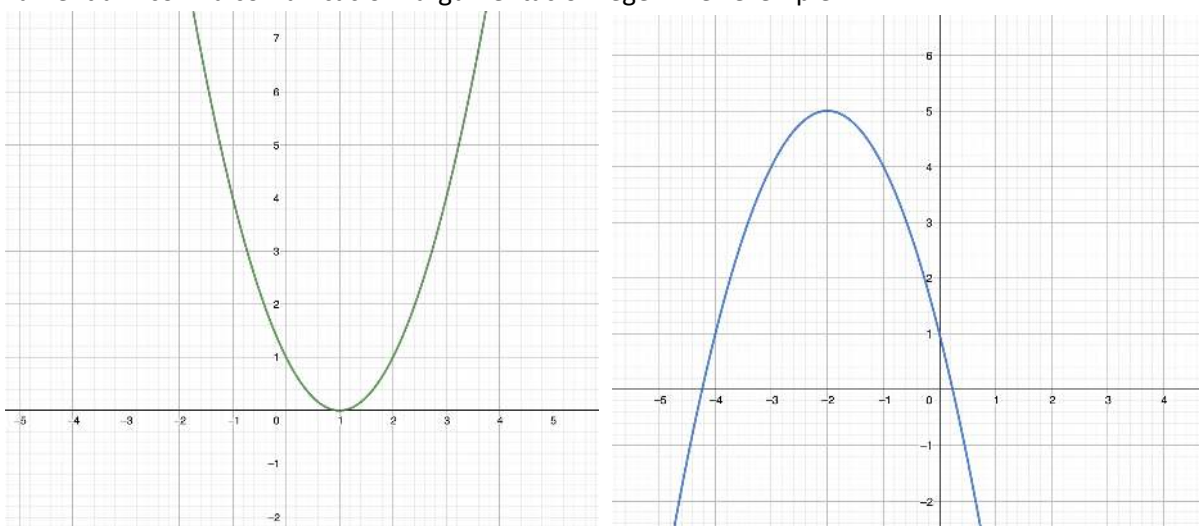
Per últim, es fa la pregunta de què passaria si en lloc de 18 nens, en fossin 20? O 24? O 34? L'alumnat aprofita tota la informació que té fins al moment per respondre la pregunta, buscant el rectangle més «quadrat» possible.

Als materials també es proposen dues activitats d'ampliació («Parell de factors» i «Perímetre mínim») per si es vol anar més enllà.

La mateixa idea de com disposar taules, però en aquest cas en un restaurant, es troba al conte [Spaghetti and Meatballs for all!](#) (Burns, 2008). El conte pot servir per introduir el problema per resoldre d'una manera diferent. L'enllaç anterior ens porta al web de la professora Paula López Serentill, un web carregat de propostes en què el conte esdevé un recurs didàctic magnífic per treballar matemàtiques per a totes les edats.

saber #3.ALG.RF.D

Per treballar el **saber #3.ALG.RF.D**, podem utilitzar la tipologia d'activitats «Què tenen d'igual i què tenen de diferent?», esmentades també en el document de 2n d'ESO. Es tracta de mostrar dues imatges que s'hauran de comparar. L'alumnat haurà de verbalitzar què hi ha en comú a les dues imatges i quines diferències hi troben. La comparació ajuda l'alumnat a organitzar i estructurar els coneixements. Amb aquest tipus d'activitats es treballa el raonament així com la comunicació i l'argumentació. Vegem-ne l'exemple:



Font: elaboració pròpia

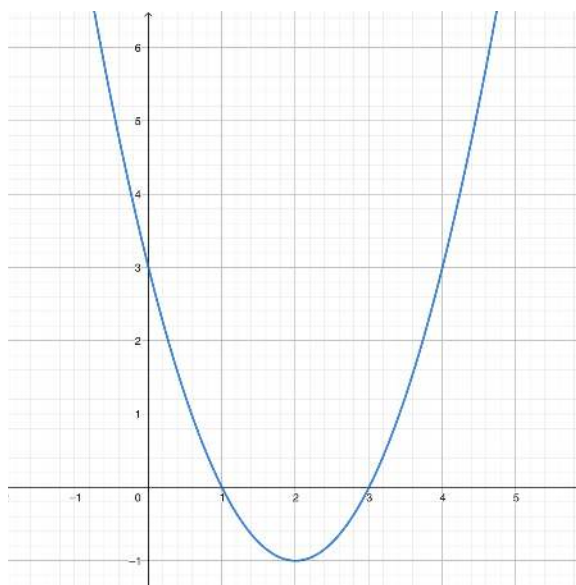
L'alumnat acostuma a trobar com a característiques iguals que les dues gràfiques són paràboles i totes dues tallen l'eix d'ordenades en el punt $(0, 1)$. Com a diferències, en el primer cas, el coeficient del terme quadràtic és positiu, mentre que, en el segon cas, és negatiu; en el primer cas hi ha un mínim i, en el segon, un màxim; en el primer cas, hi ha un punt de tall amb l'eix d'abscisses (és a dir, l'equació de segon grau té discriminant zero) i, en el segon cas, hi ha dos punts de tall (discriminant positiu), etc. Són moltes les observacions per fer i la discussió en gran grup a classe pot resultar molt enriquidora.

Al [CREAMAT](#) trobem una entrada en la qual es parla d'aquest tipus d'activitats i se'ns proporcionen exemples per a tots els nivells. Un altre lloc on trobar molts exemples i de gairebé tots els sentits del currículum és el blog [Same or different](#).

saber #3.ALG.RF.D

Per treballar el **saber #3.ALG.RF.D**, hi ha el recurs [Anomena el gràfic](#), del web Underground Mathematics. El que proposem a continuació és fer-ne una adaptació més senzilla.

Es demana a l'alumnat que observi aquesta paràbola:



Font: elaboració pròpia

I llavors se'ls demana que trobin l'expressió algebraica de la paràbola, que expliquin de quantes maneres diferents la poden trobar i expliquin la seva elecció. Se'ls indica que el coeficient del terme quadràtic és 1, per tal d'escurçar la longitud de la tasca. Encara que, si es vol, es pot donar sentit gràfic al paràmetre a , mesurant el canvi dels valors funcionals des del vèrtex i movent-se una unitat cap a l'esquerra o cap a la dreta. Aquesta activitat es proposa a l'alumnat quan ja s'han treballat les diferents formes que pot tenir l'expressió algebraica d'una paràbola.

Podem trobar la funció de segon grau expressada de tres maneres diferents:

- (1) $f(x) = x^2 + bx + c$
- (2) $f(x) = (x - d)(x - e)$
- (3) $f(x) = (x - f)^2 + g$

Per escriure l'expressió algebraica en forma (1), necessitem conèixer dues dades (perquè hi ha dues incògnites). Dos punts de coordenades qualssevol diferents de la paràbola funcionarien, ja que això permetria escriure dues equacions amb dues incògnites cadascuna. Per exemple, veiem que el gràfic passa pel punt $(4, 3)$ i $(2, -1)$. Aquests punts han de satisfer l'equació:

$$\begin{aligned} 3 &= 4^2 + 4b + c \\ -1 &= 2^2 + 2b + c \end{aligned}$$

A continuació, resollem el sistema d'equacions i obtenim els valors de b i c que determinen la paràbola buscada.

Per escriure l'expressió algebraica en forma (2), necessitem conèixer els punts de tall amb l'eix d'abscisses, sempre que n'hi hagi. En el nostre cas, la paràbola talla als punts d'abscissa $x = 1$ i $x = 3$; per tant, la paràbola és $f(x) = (x - 1)(x - 3)$.

(f, g) , dades que podem extreure directament del gràfic. En l'exemple, el vèrtex es troba al punt $(2, -1)$; per tant, la paràbola serà $f(x) = (x - 2)^2 - 1$.

L'objectiu final és cercar l'eficiència i que l'alumnat vegi que, si analitzem bé la situació, ens podem estalviar molts càlculs algebraics.

saber #3.ALG.RF.D, saber #3.ALG.RF.E, saber #3.ALG.RF.F

Tal com també passava amb el **saber #3.ALG.RF.C**, per treballar els **sabers #3.ALG.RF.D, #3.ALG.RF.E** i

#3.ALG.RF.F, hi ha moltes propostes amb GeoGebra que se'ns presenten ja preparades directament per treballar a classe. Una d'aquestes propostes és [Funcions de primer i segon grau](#), del professor Josep Lluís Cañadilla. L'activitat comença introduint com és una funció de primer grau, quina forma té i de quins paràmetres depèn. Després proposa que l'alumnat experimenti i, movent punts lliscants, esbrini com els paràmetres determinen la forma de la gràfica. També fa èmfasi en els punts de tall amb els eixos de coordenades i la monotonia de la funció.

De manera similar, s'aborda la funció de segon grau, i es fa èmfasi també en el vèrtex i l'obertura de la paràbola. Per últim, es donen unes quantes gràfiques i es demana trobar les expressions algebraïques corresponents. Allò que fa interessant aquesta proposta és que és l'alumnat qui va creant el full de treball des de zero seguint les instruccions.

saber #3.ALG.RF.C, saber #3.ALG.RF.D, saber #3.ALG.RF.E

Una activitat per treballar el **saber #3.ALG.RF.C**, el **saber #3.ALG.RF.D** i el **saber #3.ALG.RF.E** és [Endevina la funció](#). L'alumnat treballa en grups de 4. A cada grup se li lliuren 10 targetes on, a cada targeta, hi ha el gràfic i l'expressió algebraica d'una funció. Es posa la pila de targetes cap avall damunt la taula i un membre del grup n'agafa una sense que la resta vegi quina és. Els tres membres del grup que no tenen la targeta, per torns, hauran d'anar fent preguntes al membre que té la targeta que es puguin respondre amb un sí o un no. Es tracta d'endevinar quina funció hi ha a la targeta. Qui l'endevina, serà el següent a agafar una altra targeta per repetir el joc.

Poden sortir moltes preguntes relacionades amb les propietats i característiques de les funcions: És lineal? És afí? És quadràtica? És de proporcionalitat inversa? És creixent? És decreixent? És simètrica? Té màxim? Té mínim? Talla els eixos?, etc.

És important que els membres que fan les preguntes vagin prenent nota i vagin fent l'esbós de la funció a mesura que es formulen les preguntes. En funció de si s'han treballat totes les expressions que representen les funcions de les targetes, es pot demanar com a resposta només un esbós de la gràfica o un esbós de la gràfica més l'equació de la funció.

saber #3.ALG.RF.C, saber #3.ALG.RF.D, saber #3.ALG.RF.E

També per treballar els **sabers #3.ALG.RF.C, #3.ALG.RF.D i #3.ALG.RF.E**, i en la mateixa línia que el recurs anterior, hi ha l'activitat [Inventa't la teva pròpia funció](#). L'alumnat treballa en grups de 4. Es dona un llistat de frases en què cadascuna representa una funció. Individualment, l'alumnat llegeix la frase i s'inventa un esbós d'un gràfic que compleixi les condicions de la frase. També en cerca l'expressió algebraica.

Un cop tots els membres del grup tinguin l'esbós fet, el comparen i observen si tots compleixen les condicions i quines diferències hi ha entre les diferents propostes. Fet això, en gran grup, un portaveu de cada equip explica com són les funcions que s'han inventat i es discuteix si hi ha altres possibilitats que també encaixin amb el que diu la frase. A continuació es passa a treballar la frase següent.

Per exemple, una de les frases és: Funció quadràtica amb una arrel doble en $x = 1$. Majoritàriament, l'alumnat acostuma a trobar $f(x) = (x - 1)^2$, però cal fer veure que hi ha possibilitats infinites que compleixen la condició $f(x) = 3(x - 1)^2$, $f(x) = -2(x - 1)^2$, $f(x) = 5(x - 1)^2 \dots$ En definitiva, $f(x) = k(x - 1)^2$, amb k real.

Pensament computacional

Sabers

- Abstracció per tal d'identificar els aspectes més rellevants d'una situació matemàtica i avançar cap a la seva modelització. **#ALG.MM**
- Creació d'algorismes que utilitzin grups iteratius niats per resoldre problemes aritmètics o estocàstics. **[AMP] #NUM.CO, #EST.PI**

- C. Selecció, determinació i ús reflexiu i eficient de les eines computacionals adequades per analitzar i resoldre problemes. **[ESS]** **#NUM.QU**, **#EST.DI**, **#ALG.IN**
- D. Ús adequat de programes de geometria dinàmica per treballar els moviments i les transformacions geomètriques. **#ESP.MT**
- E. Processos de testeig, depuració d'errors i de millora successiva d'algorismes, considerant, sistemàticament, tots els casos possibles. **#SOE**
- F. Autoconfiança, persistència, adaptabilitat, flexibilitat, creativitat, col·laboració i gestió constructiva de l'error. **#SOE**

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

Recordem els diversos criteris que s'han tingut en compte a l'hora de l'especificació i seqüenciació de sabers relacionats amb aquest bloc:

- Es troben contextualitzats en l'àmbit de les matemàtiques.
- Hi ha nombroses i significatives relacions amb els altres sentits i amb el procés de resolució de problemes, la qual cosa afavoreix el tractament d'algunes idees del pensament computacional.
- S'han especificat tenint en compte que n'hi hagi de cadascuna de les quatre categories següents:
 - Sabers relacionats amb la competència específica 4: descomposició, patrons, abstracció i algorismes.
 - Sabers relacionats amb la construcció d'algorismes.
 - Sabers relacionats amb l'ús d'eines computacionals per al treball matemàtic.
 - Sabers relacionats amb la gestió socioemocional que són transversals a tots els cursos d'ESO.
- S'ha intentat donar acollida a tres opcions de treball (diferents, però compatibles):
 - L'alternativa de desenvolupar els sabers sense arribar a la necessitat de les eines digitals (pensament computacional «desendollat»).
 - La possibilitat de crear programes tant en llenguatges de programació visuals (Scratch, Blockly, Snap!, etc.) com textuais (JavaScript, Python, etc.).
 - La possibilitat d'emprar aplicacions del camp de la robòtica i dispositius mòbils (Micro:bit, Arduino, AppInventor, etc.)

Observacions sobre alguns sabers específics

Amb el **saber #3.ALG.PC.A**, treballat a 2n d'ESO com un saber considerat essencial, es pretén consolidar la transició d'un enfocament més concret de les matemàtiques (centrat en operacions i la resolució directa de problemes) cap a un enfocament més abstracte i conceptual. L'abstracció permet 'identificar els elements clau d'una situació matemàtica i avançar cap a la modelització. Aquest procés culmina amb la formulació d'un problema en termes generals i la traducció a un format resoluble mitjançant un algorisme o un model matemàtic. A més, es busca que l'alumnat compregui que problemes diferents poden compartir una estructura comuna, fet que els permet aplicar solucions generalitzades a diverses situacions.

Aclarim en el **saber #3.ALG.PC.B**, que un bloc iteratiu natiu es refereix a un bucle (una estructura de repetició) que es troba dins un altre bucle. Dominar les accions que es repeteixen fins que es compleixi una condició determinada permet sistematitzar problemes que impliquin nombroses variables o passos repetitius, com els aritmètics o de simulació d'experiments aleatoris. Si apliquem aquest saber de manera «desendollada», el connectarem amb el **saber #2.ALG.PC.B** (utilització de diagrames d'arbre i taules de doble entrada per analitzar i descriure situacions matemàtiques).

Valorar i ser eficient és crucial, i les eines digitals ajuden a incorporar aquests dos conceptes. En aquest aspecte, el **saber #3.ALG.PC.C** no implica saber utilitzar un programari o la calculadora, sinó entendre quina eina és la

més adequada per a cada situació, i aplicar-la eficientment, sobretot a l'hora de tractar problemes oberts o de resolució múltiple. Tots els sentits acaben desenvolupant alguna habilitat 'mitjançant alguna eina digital, és per això que aquest saber és essencial.

La creació d'algoritmes, o procediments per trobar solucions, no significa que aquest funcioni correctament en totes les situacions. Fer-se preguntes com: L'algorisme dona els resultats correctes? Considera tots els casos possibles? Es pot millorar? facilita el desenvolupament del **saber #3.ALG.PC.E** dins d'una activitat, com també identifica i corregeix els casos oblidats o que hagin desaparegut a causa d'algun error, ja sigui per la seqüència plantejada, per la gestió del rang de valors o fórmules, o càlculs mal aplicats. Els alumnes han d'aprendre a depurar aquests errors pas a pas, provant diferents casos i ajustant el seu algorisme fins que funcioni correctament en tots els escenaris desitjats. Posteriorment, i un cop l'algorisme o procediment ha estat testejat, és el moment de millorar-lo i començar el cicle. Es poden trobar millores si es fan preguntes com: Es pot arribar a la solució reduint el nombre de passos? Hi ha alguna instrucció redundant? Hi ha un altre camí més directe? L'algorisme és fàcil de comprendre i de seguir? Es pot ampliar a més casos i generalitzar? Per a la consideració sistemàtica de tots els casos possibles, pot anar bé parar atenció en els casos trivials, els valors extrems, límits o atípics. En definitiva, aquest saber es troba fortament relacionat amb la capacitat de resoldre problemes complexos de manera precisa i eficient.

Al pensament computacional no només es tracta de desenvolupar competències tècniques, sinó també de potenciar habilitats personals i interpersonals necessàries per resoldre problemes complexos; aquí entra en joc el **saber #4.ALG.PC.F**. Quan l'alumnat s'enfronti a problemes nous i desconeguts, la confiança en les capacitats d'un mateix els permetrà explorar solucions sense por del fracàs inicial. Desenvolupar algoritmes, solucionar errors de codi o trobar patrons pot requerir molts intents. Aquí la persistència i la creativitat ajuden a superar obstacles i a avançar cap a solucions eficients. En aquest context, sovint és necessari adaptar-se i ser flexible' per reajustar els medis computacionals emprats als canvis en els requisits o a l'aparició de dificultats inesperades. Més enllà del pensament computacional, les actituds esmentades són útils també en la resolució de problemes, en general, i es vinculen amb el sentit socioemocional, **#SOE**.

Recursos i activitats

Recursos i activitats per treballar sabers concrets

Com en el cas dels cursos anteriors, pel **saber #3.ALG.PC.A**, poden anar bé les tasques **Bebras**. Dins de la col·lecció traduïda al català de la web [HelloBebras](#) i el document «Nivell 3: 3r ESO - 2n Batxillerat», hi ha la tasca «Claus d'hotel», una activitat en què l'alumnat s'ha de focalitzar molt en les paraules matemàtiques clau per gestionar el comptatge associat; en definitiva, identificar els punts més importants del problema per poder arribar a la solució. Per altra banda, la mateixa tasca «Claus d'hotel» és un exemple de modelatge per generar, amb poca informació, moltes claus diferents. Acabem aquest recurs recordant que aquests problemes es poden fer individualment o en petit grup, però convé posar en comú les estratègies de solució i compartir una reflexió sobre les habilitats de pensament computacional.

Un exemple en el qual es pot observar el **saber #3.ALG.PC.B** és en la creació de programes on se simulin experiments aleatoris per veure-hi la relació entre les freqüències relatives associades i la probabilitat teòrica, ja que s'han de repetir un nombre de cops elevat. En aquest [Joc del dau](#) de probabilitat, en què s'ha de tirar dues vegades (dues repeticions) el dau per arribar a una posició del taulell proposat per tal de fer-nos una idea de la probabilitat, simulem moltes vegades l'experiment, fent ús de la llei dels grans nombres, amb el bloc niat conegut. Podem veure'n el resultat del [codi](#). Una altra simulació és el [Joc dels camells](#), en el qual intervenen dos daus. També es pot començar per programar la simulació del llançament d'una moneda o un dau i preguntar, al final del projecte, com es justifica que l'algorisme és coherent?

Un possible cas per entendre el **saber #3.ALG.PC.C** és l'ús del programari de geometria dinàmica del GeoGebra i l'ús del full de càlcul en estadística. Tal com ens mostra el professor José María Chacón al taller [Estadística con GeoGebra. Iniciación y actualización](#) de la XIV Jornada de l'Associació Catalana de GeoGebra, pot arribar a ser molt directa i eficient, tant pel ventall de gràfics adequats, com pel recull d'estadístics sense calcular-los.

El problema [Arribar a 200](#) del professor Don Steward, amb exemples de produccions d'alumnes i recursos per al professorat al portal de [NRICH](#), ens ofereix un exemple que involucra dos sabers. La senzillesa del repte amaga una quantitat d'informació matemàtica que s'ha d'anar sistematitzant per descobrir-la, molt lligat al **saber #3.ALG.PC.E**. Una part fonamental en el procés de descoberta de la solució és compartir en públic el que ha trobat cada participant. Això permet que cadascú, amb aquesta ajuda col·laborativa, pugui avançar al seu ritme, descobrir nous patrons i veure que l'error forma part de la participació, connectant amb el **saber #3.ALG.PC.F**. Es pot consultar tota l'exploració i investigació del problema al [web del CREAMAT](#).

Blocs de competències: processos matemàtics i gestió socioemocional

El conjunt de sabers que constitueixen el sentit algebraic, com tots els altres sentits, s'han de relacionar amb el conjunt de competències del currículum. Sense un coneixement dels sabers, difícilment es poden desenvolupar els processos per avançar en l'assoliment de les competències i, d'altra banda, la manera com s'introdueixen, es construeixen i s'utilitzen els sabers és clau per poder fer un treball competencial.

Així doncs, tots els sabers poden contribuir a desenvolupar qualsevol competència si es treballen en activitats adequades. Així mateix, un saber pot contribuir a desenvolupar diverses competències.

Es presenta la relació entre els sentits i les competències específiques a través dels processos: Resolució de problemes (competències específiques CE 1 i CE 2), Raonament i prova (competències específiques CE 3 i CE 4), Connexions, en què distingim les internes (competència específica CE 5) i les externes (competència específica CE 6), Comunicació i representació (competència específica CE 7), i Gestió socioemocional (competències específiques CE 8 i CE 9).

Aquesta relació, pel que fa al sentit algebraic, es concreta, en el marc d'aquest exemple, de la manera que es descriu en els apartats següents, tot i que hi pot haver altres anàlisis igualment vàlides.

Resolució de problemes (CE 1 i CE 2)

El treball del sentit algebraic, que inclou el desenvolupament del llenguatge algebraic, introduït ja a 1r d'ESO i més àmpliament a 2n, continua en aquest curs (3r d'ESO) per tal d'oferir a l'alumnat l'oportunitat d'abordar problemes matemàtics amb la potència de les eines algebraiques. En la resolució de molts problemes, el primer pas és comprendre bé l'enunciat, el segon consisteix a traduir aquest enunciat a una representació simbòlica que sovint és una equació, un sistema d'equacions o també una inequació. Mitjançant tècniques algebraiques es pot resoldre aquesta equació (sistema o inequació) i interpretar-ne el resultat dins del context del problema. El sentit algebraic proporciona, doncs, moltes possibilitats per treballar la resolució de problemes, especialment en la comprensió dels enunciats i la traducció al llenguatge matemàtic, en aquest cas, algebraic (CE 1). També pel que fa a la interpretació dels resultats, la validesa dels quals pot estar condicionada pel context del problema (CE 2). La majoria de blocs de sabers incideixen en el treball sobre resolució de problemes, però pel que fa al treball

d'aquest sentit a 3r d'ESO, tenen una incidència especial els blocs Model matemàtic, Igualtats i desigualtats i Pensament Computacional.

Sabers

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar la resolució de problemes són, entre d'altres:

- El **saber #3.ALG.MM.E**: anàlisi de les solucions d'un problema, presa de decisions en conseqüència i formulació de prediccions, si escau.
- El **saber #3.ALG.ID.E**: resolució de problemes senzills d'equacions quadràtiques contextualitzats.
- El **saber #3.ALG.ID.F**: problemes en context per introduir sistemes d'equacions lineals. Significat d'un sistema de dues equacions lineals amb dues incògnites i de la seva solució.
- El **saber #3.ALG.ID.H**: resolució de problemes contextualitzats mitjançant sistemes de dues equacions lineals amb dues incògnites.
- El bloc Pensament computacional (**#3.ALG.PC**), gairebé per definició, està estretament relacionat amb la resolució de problemes. En concret, destaca el **saber #3.ALG.PC.B**, que se centra en la creació d'algorismes per resoldre problemes aritmètics o estocàstics.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers fan referència directa al procés de resolució de problemes, tant a la CE 1 com a la CE 2. Alguns exemples són:

- La idea de Model matemàtic està directament lligada amb la resolució de problemes, ja que, sovint, la finalitat per establir un model matemàtic és resoldre un problema contextualitzat. En concret, la seqüència d'activitats [Barbie Bungee](#), proposada per treballar el **saber #3.ALG.MM.C**, el **saber #3.ALG.MM.D** i el **saber #3.ALG.MM.E**, és un exemple del tipus de qüestions que sorgeixen en intentar resoldre un problema en context a partir de l'experimentació, la realització de conjetures i la presa de decisions.
- Uns altres sabers directament relacionats amb la resolució de problemes són la majoria dels sabers del bloc Igualtats i desigualtats. Sovint la pràctica productiva permet treballar les competències associades a la resolució de problemes, com per exemple les del recurs [Pràctica productiva: equacions de segon grau](#) del PuntMat.
- Pel que fa al **saber #3.ALG.ID.F**, podeu trobar una seqüència d'activitats per introduir la resolució de sistemes d'equacions lineals (dues equacions amb dues incògnites) mitjançant la resolució de problemes. A l'article de de la Fuente, A. (2022), «Aprender a usar el álgebra en secundaria mediante la resolución de problemas», SUMA, núm. 99, p. 49-60, trobareu aquesta activitat.
- D'altra banda, les propostes de recurs relacionades amb el **saber #3.ALG.PC.B** són una oportunitat per veure la potència de la programació visual per generar tirades aleatòries i comprovar la llei dels grans nombres, l'experimentació que es relaciona amb la resolució de problemes, la realització de conjetures i la validació de lleis, que és l'essència del quefer matemàtic.

Raonament i prova (CE 3 i CE 4)

En tot l'aprenentatge de l'àlgebra, la comprensió del significat dels símbols és un punt clau, que cal tenir en compte per poder fer raonaments de tot tipus. La manipulació de símbols algebraics, així com de dibuixos i gràfics, ens permet descobrir noves relacions, buscar equivalències entre expressions aparentment diferents i

trobar justificacions generals. A l'hora d'emprar les eines algebraiques en situacions contextualitzades, hem de procurar que l'aplicació mecànica de regles no substitueixi els processos de raonament ni amagui els significats dels símbols i expressions derivades del context (CE 3). Tot el bloc Pensament computacional està profundament lligat al raonament i associat a la competència CE 4.

Sabers

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar el raonament són, entre d'altres:

- El treball del **saber #3.ALG.PA.A** i del **saber #3.ALG.PA.B** del bloc Patrons comporta la realització de conjetures i generalitzacions pròpies de la competència 3 que se centra en el raonament matemàtic.
- El treball al voltant del **saber #ALG.ID.A** comporta desenvolupar raonaments que portin a argumentar sobre les diferències entre una identitat i una equació, així com justificar la validesa de les identitats notables.
- El **saber #2.ALG.PC.F**, del bloc Pensament computacional, té una relació directa amb el raonament matemàtic.

Recursos

Alguns dels recursos proposats per treballar diferents sabers del sentit algebraic fan referència al procés de raonament i prova i, concretament, amb la competència CE 3, tant pel que fa a la realització de conjetures com de proves. Per exemple:

- Tots els recursos relacionats amb el bloc Patrons, **saber #3.ALG.PA.A** i **saber #3.ALG.PA.B**, comporten la realització de conjetures i generalitzacions (i no tant de proves) pròpies de la competència 3 que se centra en aquestes accions.
- Alguns recursos del bloc Igualtats i desigualtats, com l'anàlisi de la igualtat $a + b = a \cdot b$, i la discussió sobre si es tracta d'una identitat o una equació implica efectuar raonaments relacionats amb la competència CE 3.
- En relació amb el pensament computacional, les tasques «Bebras», vinculades al **saber #2.ALG.PC.F**, són un recurs ideal per potenciar el desenvolupament d'habilitats de pensament computacional. Per mitjà d'activitats que promouen la creativitat i la resolució de problemes, aquestes tasques s'alineen plenament amb el procés de raonament matemàtic i les competències específiques CE 3 i CE 4 del currículum de secundària.

Connexions amb altres parts de la matemàtica (CE 5)

L'àlgebra es relaciona amb la majoria dels sentits, però segurament és amb el sentit numèric i l'espacial, juntament amb el de la mesura, on trobem un nombre més gran de connexions internes. Aquestes connexions són fonamentals per construir el llenguatge algebraic i donar sentit a les representacions sense les quals esdevindrien totalment abstractes. El bloc de sabers de Pensament computacional també presenta riques connexions amb sabers d'altres blocs i sentits.

Sabers

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar les connexions internes són, entre d'altres:

- el saber **#3.ALG.PA.B** es connecta tant amb el sentit numèric com amb l'espacial.
- el saber **#3.ALG.MM.A** es connecta amb el bloc **#3.ALG.ID.**
- el saber **#3.ALG.MM.C** es connecta amb els blocs **#3.ALG.RF** i **#3.ALG.PC.**
- el saber **#3.ALG.VA.A** es connecta amb els blocs **#3.ALG.PA** i **#3.ALG.RF.**
- el saber **#3.ALG.VA.B** es connecta amb el sentit estocàstic.
- el saber **#3.ALG.ID.B** es connecta amb el bloc **#3.ESP.VM** del sentit espacial.
- el saber **#3.ALG.ID.F** es connecta amb el bloc **#3.ALG.RF.**
- el saber **#3.ALG.ID.J** es connecta tant amb el bloc **#3.ALG.MM** com amb el bloc **#3.ALG.RF**, tots dos del mateix sentit algebraic.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers aporten o fan servir connexions internes. D'acord amb els sabers ressenyats anteriorment, alguns dels recursos adequats per establir connexions internes són:

- l'activitat [Patrons en estructures](#) que podem trobar a les [Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria](#) (Aubanell, 2015) citat a propòsit del saber **#3.ALG.PA.A**.
- les activitats de la pàgina web [Visual Patterns](#) permeten treballar connexions amb el bloc Patrons **#3.ALG.PA**, però també amb el de Relacions i funcions **#3.ALG.RF** a partir de l'obtenció de termes generals de successions.
- l'activitat del saber **#3.ALG.ID.B** sobre resolució geomètrica d'equacions de segon grau d'acord amb el mètode d'Al-Khwārizmī (813), de la professora Iolanda Guevara, que es pot trobar [aquí](#), treballa connexions internes amb el sentit espacial.

Connexions amb altres matèries i amb l'entorn (CE 6)

L'àlgebra com a eina per resoldre problemes, tant de les mateixes matemàtiques com en altres contextos, es connecta amb moltes disciplines, especialment les de l'àmbit científic. I dins del sentit algebraic, els blocs Model matemàtic i relacions i funcions són especialment rics per les connexions que tenen amb les lleis científiques. El pensament computacional, en particular el desenvolupament de programes informàtics, també permet establir connexions amb camps molt diversos de fora de les matemàtiques. Sempre que en un saber s'esmenti la relació amb situacions contextualitzades, trobarem una possibilitat per establir connexions entre les matemàtiques, la resta de disciplines, l'entorn i, en general, amb el món.

Sabers

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar les connexions externes són, entre d'altres:

- el saber **#3.ALG.MM.A** i el saber **#3.ALG.MM.B**, que relacionen els models matemàtics amb situacions en context.
- el saber **#3.ALG.ID.E**, el saber **#3.ALG.ID.F** i el saber **#3.ALG.ID.H**, que relacionen les equacions de segon grau i els sistemes d'equacions lineals amb les situacions contextualitzades.
- el saber **#3.ALG.RF.C** i el saber **#3.ALG.RF.D**, que relacionen els models de funcions elementals amb les situacions contextualitzades.

Recursos

Molts dels recursos descrits per treballar diferents sabers del sentit algebraic ofereixen oportunitats per fer connexions externes. Per exemple:

- l'activitat [Clepsidra](#), relacionada amb el **saber #3.ALG.MM.A**. Trobem dos exemples de com portar a terme aquest projecte amb tots els materials necessaris al [blog](#) del professor Sergi del Moral i a la [pàgina](#) del professor Carlos Morales.
- una activitat per treballar el **saber #3.ALG.MM.B** es troba a l'ARC i s'anomena [Quant val?](#), de la professora Jessica Tomàs. Es tracta d'una seqüència d'activitats per treballar els sistemes d'equacions lineals amb dues incògnites. Es treballa la resolució de problemes en un entorn de la vida quotidiana, a partir de tiquets de la compra i s'introdueix la representació i resolució gràfica amb programes de geometria dinàmica.
- per treballar el **saber #3.ALG.RF.B**, el **saber #3.ALG.RF.D** i el **saber #3.ALG.RF.F**, tenim la seqüència d'activitats [Taules d'aniversari, patrons i funcions](#), de la professora Núria Serra. Es tracta d'una adaptació de l'activitat «Pattern and functions» de l'NCTM. La situació de partida és el muntatge de les taules per organitzar una festa d'aniversari.

Totes aquestes activitats contribueixen al desenvolupament de la competència CE 6.

Comunicació i representació (CE 7)

L'àlgebra és un llenguatge que permet expressar de manera general i interpretar sintèticament propietats i relacions numèriques o relacions entre variables per mitjà de fórmules de diferents tipus. Des d'una perspectiva més àmplia és interessant projectar la idea que el llenguatge i les tècniques algebraïques són emprades en tots els àmbits científics i tecnològics.

Si ens centrem en la competència comunicativa (CE 7) és clar que el fet que l'àlgebra esdevingui en si mateix un llenguatge fa que el seu desenvolupament estigui estretament vinculat a aquesta competència. Saber llegir i interpretar expressions algebraïques, models expressats per mitjà de fórmules, igualtats i desigualtats, i funcions elementals, i saber-los utilitzar per expressar situacions i per resoldre problemes lligats a aquestes situacions forma una part essencial de la competència comunicativa entesa com una competència específica de les matemàtiques. Interpretar i emprar el llenguatge algebraic són accions que permeten relacionar el sentit algebraic i la competència comunicativa; però relacionar el llenguatge algebraic amb altres formes de representació també és una idea clau que apareix tant en la idea de model matemàtic com, especialment, en el concepte de funció.

Sabers

Pel caràcter de l'àlgebra com a llenguatge i pel fet que molts dels conceptes que apareixen en el sentit algebraic admeten diferents representacions de manera que una acció clau és la connexió entre aquestes representacions, aquest sentit pot contribuir al desenvolupament de la competència CE 7.

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar la comunicació i la representació són, entre d'altres:

- Tant el **saber #3.ALG.PA.A** com el **saber #3.ALG.PA.B** del bloc Patrons ofereixen oportunitats per relacionar representacions diferents, principalment numèriques, geomètriques i algebraïques.
- Els treballs al voltant del **saber #3.ALG.MM.A** i el **saber #3.ALG.MM.B** així com el **saber #3.ALG.MM.D**, proporcionen oportunitats per relacionar diferents representacions d'un model matemàtic determinat (en aquest cas, funcions de segon grau i sistemes de funcions lineals).
- El **saber #3.ALG.ID.B**, el **saber #3.ALG.ID.F** i el **saber #3.ALG.ID.I**, del bloc 'Igualtats i desigualtats, permeten connectar representacions verbals, icòniques, gràfiques i algebraïques.
- La majoria dels sabers del bloc Relacions i funcions contribueixen al desenvolupament de la competència C 7; en particular, el **saber #3.ALG.RF.A**, el **saber #3.ALG.RF.F** i el **saber #3.ALG.RF.G**.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers del sentit algebraic fan referència al procés de comunicació i representació. Per exemple:

- Un recurs per treballar el **saber #3.ALG.PA.A** és l'activitat [Patrons en estructures](#) que podem trobar a les [Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria](#) (Aubanell, 2015). El treball d'aquesta activitat porta a connectar diferents representacions: numèrica, geomètrica i algebraica, per tal de descobrir un patró i arribar a expressar-lo algebraicament sense oblidar el significat geomètric i el numèric.
- Per treballar el **saber #3.ALG.MM.B**, podem plantejar una activitat amb context geomètric com la que es presenta tot seguit. Es tracta d'una adaptació de l'activitat de l'NCTM «Lost in Mathland». La versió [Perduts a Matelàndia](#) és més senzilla que l'original i només engloba el treball de sistemes d'equacions lineals amb dues incògnites.
- Pel que fa al recurs associat al **saber #3.ALG.ID.F**, a l'article de de la Fuente, A. (2022), «*Aprender a usar el álgebra en secundaria mediante la resolución de problemas*», SUMA, núm. 99, p. 49-60, hi ha una seqüència d'activitats per introduir la resolució de sistemes d'equacions lineals (dues equacions amb dues incògnites). L'inici d'aquesta seqüència consisteix a proposar un problema l'enunciat del qual s'expressa icònicament, de manera que l'alumnat pot intentar resoldre el problema sense conèixer les tècniques per resoldre sistemes, connectant representacions.
- El recurs [Petits relats associats a gràfiques de funcions](#), d'Àlex Sayós, que es troba a l'ARC per treballar tant el **saber #3.ALG.RF.A**, com el **saber #3.ALG.RF.F** i el **saber #3.ALG.RF.G**, proposa fer un seguit d'activitats a partir de quatre relats donats i vuit gràfiques de funcions. L'objectiu principal és relacionar relats quotidians (representacions verbals) amb gràfiques de funcions. Aquesta és una de les diverses activitats d'aquest tipus que condueixen a la connexió entre diverses representacions.

Gestió socioemocional (CE 8 i CE 9)

Tot i que tant a 1r com a 2n d'ESO s'han començat a treballar aspectes rellevants del llenguatge algebraic, com els patrons, els models matemàtics i les equacions, a 3r d'ESO l'àlgebra ja es treballa com un llenguatge propi, tot i mantenir sempre les connexions amb el sentit numèric i el geomètric per tal d'anar dotant de significat tot allò que es fa. Com ja dèiem en els cursos anteriors, és fonamental reconèixer i atendre les dificultats que aquest salt cap a l'abstracció suposa per a part de l'alumnat. Si aquest pas es fa de manera gradual i acolidora, augmentarà l'autoconfiança dels alumnes en les seves capacitats matemàtiques, ja que se'ls proporcionaran eines per afrontar la resolució de problemes amb més seguretat i perseverança. Alhora es facilitarà la col·laboració en grup, discutint estratègies matemàtiques i interaccionant de manera positiva amb altres persones.

La descoberta d'un nou llenguatge, la comprensió de les seves aplicacions en situacions reals i la sensació de dominar millor les matemàtiques incrementen la motivació i contribueixen a desenvolupar la identitat matemàtica de l'alumnat. Ara bé, si l'alumnat no comprèn la relació entre aquest llenguatge abstracte i els contextos en què es desenvolupa es pot crear una sensació d'inseguretat que el porti a focalitzar-se en la sintaxi (les regles per a la transformació d'expressions algebraiques) perdent de vista el veritable significat dels conceptes algebraics involucrats (en particular, el concepte de funció i la relació amb l'expressió algebraica corresponent).

La gestió socioemocional està vinculada a dues competències específiques:

- CE 8, relacionada amb el desenvolupament d'habilitats personals com les creences, les actituds i les emocions envers les matemàtiques.
- CE 9, centrada en el desenvolupament d'habilitats socials com el treball en equip i la presa de decisions.

A continuació, s'indiquen alguns aspectes que, treballats des del sentit algebraic, poden contribuir al

desenvolupament de les competències CE 8 i CE 9.

Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 8

- Com ja dèiem, tant a 1r d'ESO com a 2n', l'aprenentatge d'un nou llenguatge és complex i per això és crucial dedicar-hi temps perquè aquest aprenentatge sigui significatiu i sòlid, anant més enllà de la simple utilització dels procediments i les tècniques de transformació d'expressions algebraiques. Aquest procés s'ha de cuidar per evitar que cap alumne quedi enrere o perdi la confiança en les seves habilitats matemàtiques.
- És bo que l'alumnat prengui consciència dels avenços que va fent en l'aprenentatge algebraic i de com aquest coneixement en potencia la capacitat per resoldre problemes i per millorar l'ús del llenguatge matemàtic. Això contribueix al fet que l'alumnat pugui apreciar tant la bellesa com la utilitat de les matemàtiques.
- El **saber #3.ALG.PC.F**, que aborda aspectes com l'autoconfiança, la persistència, l'adaptabilitat, la flexibilitat, la creativitat, la col·laboració i la gestió constructiva de l'error, està íntimament connectat amb la gestió socioemocional. Es fa un èmfasi especial en els valors relacionats amb la gestió dels errors, una idea que s'aplica transversalment a tot el sentit algebraic i transcendeix l'àmbit específic del pensament computacional.

Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 9

L'àlgebra, com la resta de sentits i les matemàtiques en general, ofereix oportunitats per treballar en equip, ja que promou actituds positives, implicació en la presa de decisions i respecte per les aportacions dels altres, i contribueix a superar qualsevol idea limitant sobre les habilitats pròpies o alienes en matemàtiques.

Diverses activitats del conjunt de recursos exposats en els sabers del sentit algebraic són especialment adequades per ser treballades en petit grup i, fins i tot, amb tot el grup. D'acord amb l'activitat, el professorat podrà decidir una gestió que possibiliti l'alternança entre el treball individual, en parelles, en petit i en gran grup, en què el contrast d'idees, les discussions i els acords siguin un punt clau que guii l'aprenentatge. A continuació, es destaquen algunes activitats concretes en aquest àmbit:

- Les activitats amb ús de materials, com per exemple l'activitat [Fractals](#) que es proposa per treballar el **saber #3.ALG.PA.A**, són una bona oportunitat per fer un treball en grup col·laboratiu.
- L'activitat [Arribar a 200](#) del professor Don Steward, amb tota una exploració de resultats al [web del CREAMAT](#), porta molt fàcilment a fer participar la classe, amb oportunitats per a tothom, ja que els resultats es van compartint a la pissarra a mesura que van apareixent i cadascú, al seu ritme, aconsegueix trobar el seu patró particular o encert puntual.
- Com en el cas dels cursos anteriors, un recurs exposat pel **saber #3.ALG.PC.A** correspon a les tasques [Bebras](#). Aquests problemes es poden fer individualment o en petit grup, però convé posar en comú les estratègies de solució i compartir una reflexió sobre les habilitats de pensament computacional.