

# TOR 2n d'ESO: Sentit estocàstic

|                                                                                 |           |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Consideracions generals.....</b>                                             | <b>1</b>  |
| <b>Blocs de sabers.....</b>                                                     | <b>1</b>  |
| Distribució.....                                                                | 1         |
| Sabers.....                                                                     | 1         |
| Descripció i orientacions.....                                                  | 2         |
| Reflexions inicials.....                                                        | 2         |
| Comentaris sobre les connexions.....                                            | 2         |
| Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació.....                       | 3         |
| Observacions sobre alguns sabers específics.....                                | 3         |
| Recursos i activitats.....                                                      | 3         |
| Recursos i activitats generals per al bloc de sabers.....                       | 3         |
| Recursos i activitats per treballar sabers concrets.....                        | 4         |
| Inferència.....                                                                 | 14        |
| Sabers.....                                                                     | 14        |
| Descripció i orientacions.....                                                  | 14        |
| Comentaris sobre les connexions.....                                            | 15        |
| Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació.....                       | 15        |
| Recursos i activitats.....                                                      | 15        |
| Recursos i activitats generals per al bloc de sabers.....                       | 15        |
| Recursos i activitats per treballar sabers concrets.....                        | 15        |
| Predictibilitat i incertesa.....                                                | 25        |
| Sabers.....                                                                     | 25        |
| Descripció i orientacions.....                                                  | 25        |
| Reflexions inicials.....                                                        | 25        |
| Comentaris sobre les connexions.....                                            | 26        |
| Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació.....                       | 26        |
| Recursos i activitats.....                                                      | 26        |
| <b>Blocs de competències: processos matemàtics i gestió socioemocional.....</b> | <b>38</b> |
| Resolució de problemes (CE 1 i CE 2).....                                       | 38        |
| Sabers.....                                                                     | 39        |
| Recursos.....                                                                   | 39        |
| Raonament i prova (CE 3 i CE 4).....                                            | 40        |
| Sabers.....                                                                     | 40        |
| Recursos.....                                                                   | 41        |
| Connexions amb altres parts de la matemàtica (CE 5).....                        | 41        |
| Sabers.....                                                                     | 42        |
| Recursos.....                                                                   | 42        |
| Connexions amb altres matèries i amb l'entorn (CE 6).....                       | 42        |
| Sabers.....                                                                     | 43        |



|                                                                                     |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Recursos.....                                                                       | 43 |
| Comunicació i representació (CE 7).....                                             | 43 |
| Sabers.....                                                                         | 44 |
| Recursos.....                                                                       | 44 |
| Gestió socioemocional (CE 8 i CE 9).....                                            | 45 |
| Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 8..... | 46 |
| Alguns aspectes que contribueixen al desenvolupament de la competència CE 9.....    | 46 |

## Consideracions generals

A *Análisis de datos y su didáctica* (Batanero & Godino, 2001a), els autors fan una revisió molt interessant de les quatre fases d'un estudi estadístic: el plantejament del problema, la decisió sobre les dades a recollir, la recollida i l'anàlisi de dades i l'obtenció de conclusions en relació amb el problema plantejat.

En destacar que el raonament estadístic és una eina per a la resolució de problemes i no un fi en si mateix, els autors del llibre posen èmfasi en una qüestió fonamental: sovint es dona massa importància a la part matemàtica de l'estadística (reducció, anàlisi i interpretació de dades), mentre que s'omet la reflexió inicial i final sobre el problema original.

Cal tenir en compte que, tot i que els sabers essencials d'inferència i distribució pertanyen a la fase de recollida de dades, no hem de deixar de banda la importància de les altres fases de l'estudi estadístic per donar sentit al que fa l'alumnat i, per tant, al seu aprenentatge.

Per altra banda, a 2n d'ESO, continuarem treballant els gràfics, però amb un enfocament més avançat per ajudar els estudiants a llegir lluny del que els gràfics mostren explícitament. Això implica anar més enllà de la simple interpretació de dades visuals i començar a analitzar tendències, anomalies i relacions entre variables en contextos diferents dels que s'han treballat a 1r i cada cop més complexos.

A més, introduïrem la dispersió de dades com un element clau per comprendre millor la variabilitat de la informació representada gràficament. L'alumnat aprendrà a calcular i interpretar mesures de dispersió com el rang, que permet veure la diferència entre el valor màxim i el mínim d'un conjunt de dades, i la desviació mitjana, que ajuda a entendre com estan de dispersos els valors respecte a la mitjana. Aquestes eines els permetran no només descriure la distribució d'un conjunt de dades, sinó també comparar conjunts diferents i extreure conclusions més precises sobre la seva variabilitat.

Respecte al treball de predictibilitat i incertesa, s'avança en la predicció i l'anàlisi dels resultats dels experiments aleatoris. També s'inicia l'estudi de les probabilitats d'esdeveniments compostos equiprobables tenint en compte la proporcionalitat.

Per tal de valorar l'aportació dels jocs d'atzar en l'evolució i el desenvolupament de la teoria de la probabilitat, es revisaran problemes clàssics que van ser claus en la seva època.

## Blocs de sabers

### Distribució

#### Sabers

- A. Anàlisi i interpretació de taules i gràfics estadístics.
- B. Interpretació i reconeixement dels conceptes bàsics d'estadística: població i individu, mostra i variables estadístiques discretes, freqüència absoluta i freqüència relativa. #NUM.QU ,#ALG.VA
- C. Recollida i organització de dades quantitatives i qualitatives basades en observacions, enquestes i experiments i simulacions. #EST.IN

- D. Confecció de taules de freqüències (absolutes i relatives, ordinàries i acumulades) a partir d'unes dades o d'un gràfic. [ESS] #EST.IN
- E. Representació d'un conjunt de dades donades amb gràfics estadístics (gràfics de punts, de barres i de sectors, gràfics de Pareto, pictogrames...) manualment o fent servir eines de tractament de dades. [ESS] #ALG.PC.
- F. Utilització i interpretació de dades i gràfics estadístics i valoració de la idoneïtat de cada tipus de representació.
- G. Càlcul i interpretació dels paràmetres estadístics de centralització (mitjana, mediana i moda) donat un conjunt de dades o una taula de freqüències.
- H. Comprensió de les mesures de dispersió.
- I. Càlcul i interpretació dels paràmetres de dispersió bàsics (màxim, mínim i rang).

## Descripció i orientacions

### Reflexions inicials

A 2n d'ESO cal continuar fomentant l'alfabetització estadística per prendre decisions en situacions d'incertesa. La utilització de dades reals com ara dades meteorològiques, resultats esportius i pàgines amb dades i gràfics de temes d'actualitat i interès pot ajudar els estudiants a comprendre com es recullen, organitzen i presenten les dades, i com poden afectar la manera en què es fan les prediccions.

Igual que a 1r d'ESO, l'alumnat ha de percebre la idea de variable aleatòria com un aspecte intrínsec de la mateixa estadística: a classe, podem crear activitats en què els alumnes treballin amb variables com el color preferit, el mitjà de transport per venir a l'institut o el gènere musical que més escolten, o altres mesures que mostrin que no tothom és igual, i que les dades poden variar entre grups. Cal fomentar que l'alumnat faci prediccions basades en dades i discutir com poden variar els resultats a causa de l'error estadístic o la variabilitat inherent a les dades, debatent els canvis produïts i interpretant els paràmetres de la distribució. Cal explicar que les prediccions no són mai exactes i sempre tenen un marge d'error. Això es pot il·lustrar mitjançant activitats com experiments repetits, per exemple: llançaments de monedes o daus, en què les prediccions basades en la probabilitat s'acosten a la realitat només després de moltes repeticions. A més, aquestes activitats es poden vincular amb el joc, cosa que permet explorar altres situacions matemàtiques com l'ús del càlcul de probabilitats per estudiar i analitzar els resultats en jocs d'atzar i comprendre les estratègies guanyadores. Aquesta relació fa que l'aprenentatge sigui més atractiu i rellevant per a l'alumnat.

A 2n de l'ESO proposem introduir programes específics com full de càlcul i applets per a l'organització de dades, la creació de gràfics i l'anàlisi de distribucions. Aquest tipus d'activitats no només ajuda a desenvolupar competències tecnològiques, sinó també una comprensió més profunda de l'estadística a través de la manipulació de dades i visualitzacions dinàmiques.

### Comentaris sobre les connexions

El bloc està relacionat de forma directa amb els sabers del sentit numèric a l'hora de treballar les taules de freqüències i els paràmetres estadístics fent servir la fracció en contextos estadístics, **saber #2.NUM.QU.A.** Per altra banda, l'ús de taules i representacions gràfiques en l'estudi i la modelització de situacions en contextos diferents contribueix a la comprensió del concepte de variable i, per tant, al **saber #2.ALG.VA.C.** Finalment, hi ha la connexió amb el sentit algebraic, concretament amb el pensament computacional en

treballar l'ús adequat del full de càlcul en contextos estadístics, **saber #2.ALG.PC.E**, i en el reconeixement d'una fórmula en un full de càlcul com a patró de computació en aplicar-la a diferents caselles, **saber #2.ALG.PC.F**.

#### Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

Es consideren sabers essencials per a 2n d'ESO la confecció de taules de freqüències (absolutes i relatives, ordinàries i acumulades) a partir d'unes dades o d'un gràfic. Aquesta organització és fonamental per extreure informació rellevant que seria difícil d'obtenir observant només les dades individuals o un gràfic. També és un saber essencial la representació d'un conjunt de dades donades amb gràfics estadístics (gràfics de punts, de barres i de sectors, pictogrames...) manualment o fent servir eines de tractament de dades. Tot l'alumnat hauria de saber construir almenys un gràfic fent ús d'un programa informàtic, full de càlcul o applet, i traduir així les dades a formats visuals, que faciliten encara més la interpretació, cosa que fa més evident el comportament de les dades.

#### Observacions sobre alguns sabers específics

Treballar la dispersió de les dades, **saber #2.EST.DI.H**, a 2n d'ESO és fonamental per aprofundir en la comprensió de l'estadística, ja que la dispersió ens indica com es distribueixen les dades al voltant d'una mesura central com la mitjana. És una manera de veure si les dades estan molt concentrades o si hi ha molta variabilitat. A través del rang, l'alumnat pot comprendre com varia la informació recollida i l'ajuda a entendre que no totes les dades es concentren en un valor, sinó que hi ha diferències dins d'un conjunt de dades.

Comprendre la dispersió també ensenya sobre la fiabilitat de les prediccions o les conclusions basades en dades. Quan la dispersió és baixa, és més fàcil fer prediccions fiables, mentre que amb una dispersió alta, la incertesa augmenta. Això pot ajudar a reflexionar sobre la precaució necessària a l'hora d'interpretar resultats o fer afirmacions basades en dades.

La dispersió és una porta d'entrada per a conceptes més avançats com la variància o la desviació estàndard, que són fonamentals per a qualsevol estudi o anàlisi estadística més profunda i que es desenvoluparan a 3r d'ESO.

### **Recursos i activitats**

#### Recursos i activitats generals per al bloc de sabers

Dins del CREAMAT trobem la campanya [FEM ESTADÍSTICA](#), un conjunt d'activitats diverses per treballar l'estadística en diversos nivells.

A l'ARC també hi ha dos itineraris didàctics que, encadenant diverses activitats, permeten recobrir força bé aquest bloc tant a 1r com a 2n d'ESO:

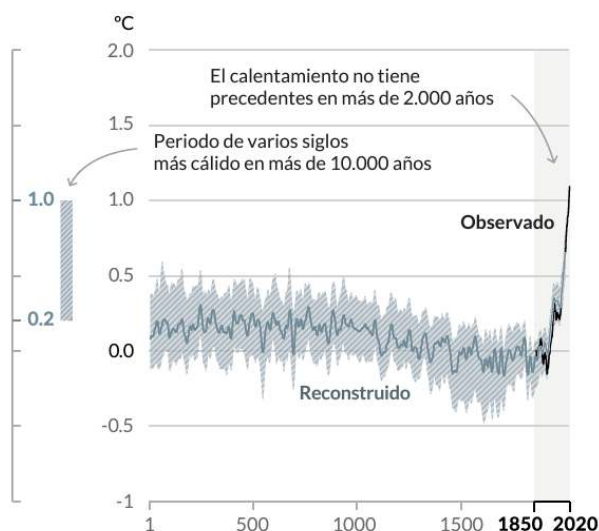
- Un itinerari dissenyat pel professor Lluís Mora format per 10 elements, propostes d'activitats/recursos: [Estadística i atzar](#).
- Un itinerari dissenyat pel professor Sergio Gracia format per 10 elements, propostes d'activitats/recursos: [Un passeig per l'estadística](#).

Recursos i activitats per treballar sabers concrets

Un dels problemes de la correcta alfabetització gràfica i el desenvolupament del **saber #2.EST.D1.A** és pensar que és suficient ensenyar a l'alumnat les característiques d'un gràfic. Cal tenir en compte que la taxonomia en la comprensió de gràfics està basada en diferents nivells de dificultat: un primer nivell de comprensió local en què l'alumnat ha d'entendre el que es representa, un segon nivell en què cal comparar i interpretar valors dels elements de les representacions, buscant relacions entre les quantitats que el o els gràfics representen i un tercer nivell d'extrapolació, que permet inferir dades que no estan explícitament representades en el gràfic. És poc probable que tot l'alumnat de 1r d'ESO ja hagi arribat al 3r nivell de comprensió gràfica, tot i que pot ser que en determinats contextos s'hagi arribat al tercer nivell de comprensió i, en d'altres, més llunyans o complexos, no. És per això que a 2n d'ESO es proposa continuar treballant la comprensió dels gràfics.

Un dels contextos que cal sens dubte treballar al llarg de la secundària, per la seva importància i les conseqüències futures, és el canvi climàtic. Al document [Cambio Climático: bases físicas](#) editat pel Ministeri per a la Transició Ecològica, hi trobareu una gran quantitat de gràfics i imatges que val la pena treballar a l'aula.

Una bona activitat pot ser que, donat un gràfic, s'analitzi a classe: què es representa? Quines dades hi apareixen? Quina és la tendència del gràfic? Com evolucionarà el gràfic en el temps? I fer la rutina de pensament del titular: quin títol o peu de la imatge resumiria el gràfic?



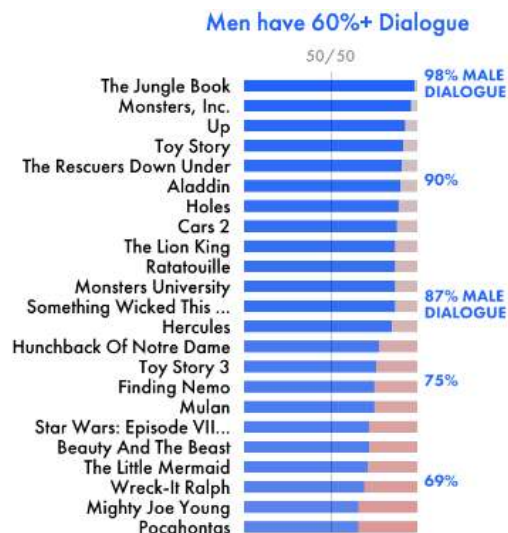
Resum del gràfic: La temperatura mitjana global de la superfície terrestre ha experimentat increments successius en les últimes quatre dècades.

Font: [Cambio climático: bases físicas](#)

Una activitat semblant és la que es proposa al *New York Times* al seu web [What's Going On in This Graph](#) amb tres preguntes: Què observes? Què et sorprèn? Què passa en aquest gràfic? El *New York Times*, juntament amb l'Associació Estatal d'Estadística (ASA), ha portat a terme durant sis anys una activitat setmanal que convida l'alumnat a analitzar i interpretar gràfics publicats al diari prèviament, primer observant, després fent-se preguntes i, finalment, creant un títol atractiu per capturar la idea principal del

gràfic i considerant quin impacte poden tenir aquestes dades.

Igual que a 1r d'ESO, el recurs gràfic [Slow Reveal Graphs](#) pot servir per treballar la interpretació de gràfics, però, si bé a 1r ens centrem en gràfics de punts, a 2n d'ESO cal treballar altre tipus de gràfics. Es proposa per a 2n d'ESO [Who speaks more](#), una activitat basada en l'[anàlisi estadística més gran sobre els diàlegs de les pel·lícules de Disney](#).

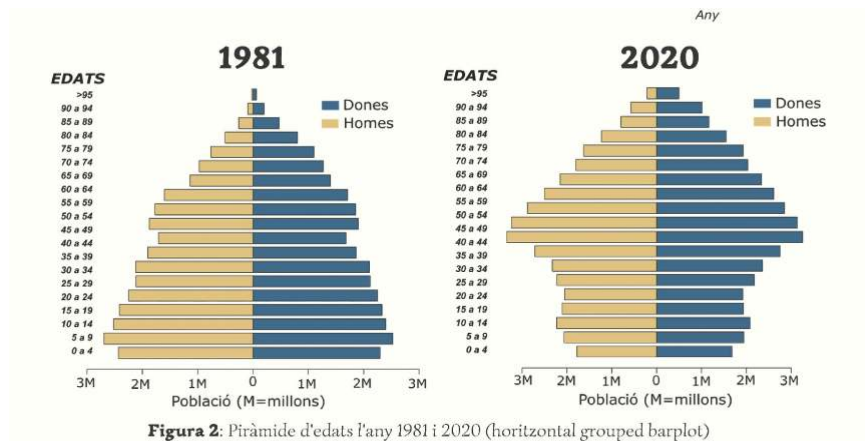


Font: [Film Dialogue](#)

Autor: The Pudding

També a l'ARC podeu trobar una bona activitat tant per a 1r com per a 2n d'ESO basada en la interpretació de gràfics: [Estadístiques als diaris](#) de Sergio Gracia, una activitat en la qual es pretén que l'alumnat es familiaritzi amb els gràfics estadístics que es poden trobar als diaris i que tracten temes generals com ara l'augment de preus, el nombre de turistes o de naixements, etc.

Podem trobar un altre recurs magnífic per treballar la comprensió de gràfics al web de la [Societat Catalana d'Estadística](#), que convoca el [Concurs Data Storytelling](#) per reconèixer els millors tuits estadístics amb representació visual. El concurs pretén acostar la ciència estadística a la ciutadania mitjançant l'ús de xarxes socials i, al web, podeu trobar enllaços als millors tuits de les darreres edicions. Per al nivell de 2n d'ESO, tot coincidint amb l'estudi demogràfic i les piràmides de població que se solen treballar a l'àmbit de les ciències socials, us recomanem el tuit de Guillermo Villacampa, guanyador de l'edició del 2020, que va presentar un estudi de la societat catalana.

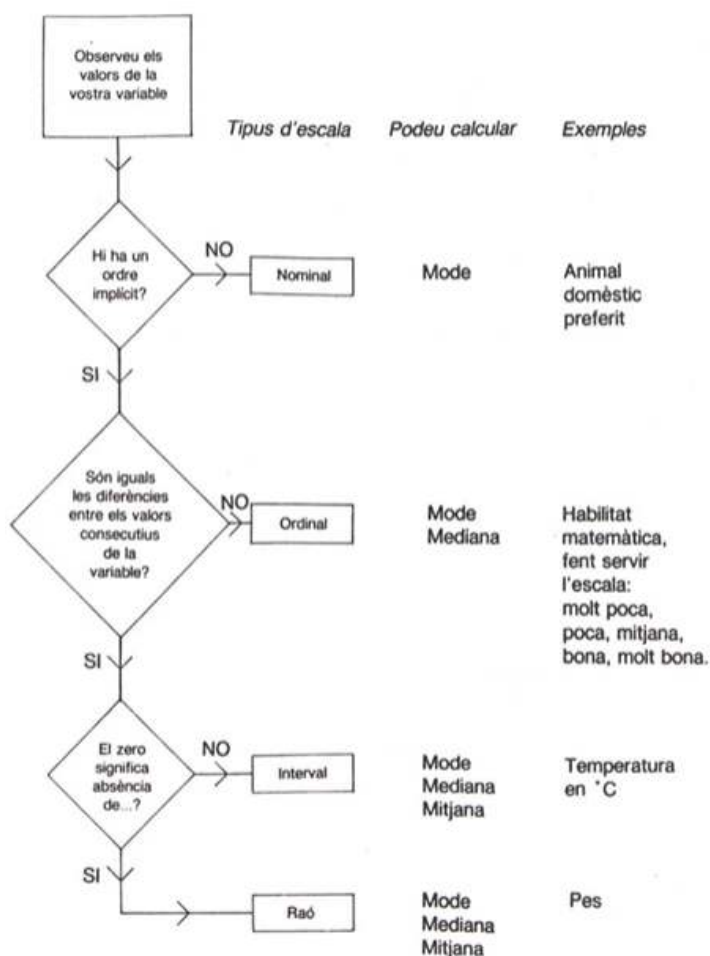


Font: [red social X](#)

Autor: Guillermo Villacampa

Per altra banda, dins del CREAMAT pot resultar interessant l'apartat de [l'índex de massa corporal](#) i els seus gràfics en funció de l'edat, els quals donen per a un treball estadístic més exhaustiu.

Podem trobar una proposta per treballar el **saber #2.EST.DI.B**, més concretament l'estudi de variables i dels seus paràmetres estadístics associats, al llibre [L'estadística en el vostre món](#) (Barceló i Vidal *et al.*, 1990), en què apareix un diagrama de flux que permet classificar les variables en ordinals i nominals, d'interval i de raó, i dona també la relació amb el seu paràmetre estadístic més adequat:



Font: [L'estadística en el vostre món](#) (Barceló i Vidal *et al.*, 1990)

Podeu treballar amb l'alumnat aquest diagrama de flux que classifica el tipus d'escala per a cadascun dels atributs: nom dels alumnes, la seva alçada, assignatures suspeses, temperatures en °C, color dels cabells, gols marcats pels diferents equips de futbol, l'hora d'anar a dormir, valors de diferents monedes, quantitat de pluja, números de peu que calcen els adults, longituds saltades pels atletes durant una competició, dates d'aniversari.

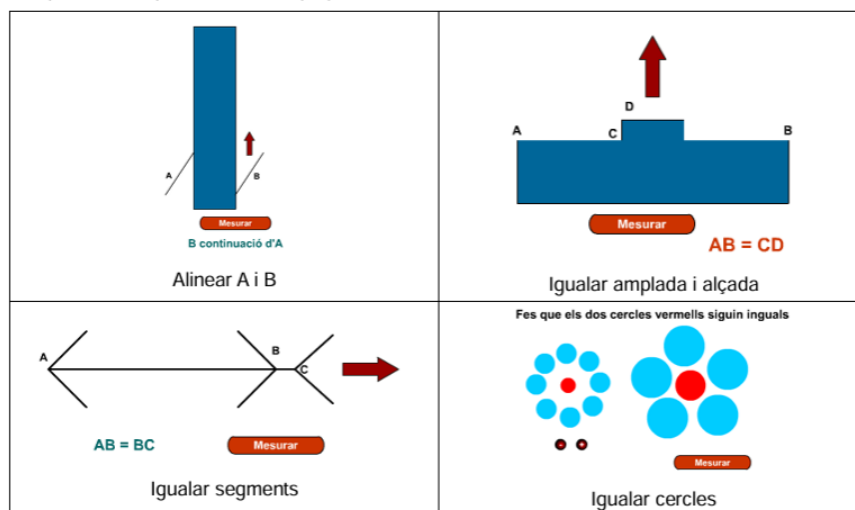
Els conceptes bàsics com mostra, població, variable, freqüència absoluta i freqüència relativa són fonamentals i s'han de treballar cada vegada que es fa un estudi o activitat estadística. Això permet que l'alumnat reforci contínuament la comprensió d'aquests conceptes i els apliqui de manera automàtica quan treballin amb dades. Consolidar el vocabulari estadístic és essencial perquè l'alumnat entengui clarament què significa cada terme i perquè pugui aplicar-lo correctament en qualsevol context. D'aquesta manera, garantim als alumnes una bona base i, a mesura que progressen amb estudis més complexos, la revisió d'aquests conceptes els permet no perdre de vista les bases que necessiten per comprendre estudis més sofisticats. Per tant, treballar tant a 1r com a 2n aquests conceptes ajuda a evitar confusions o judicis sense argumentació, cosa que pot portar a interpretacions errònies.

Dins del treball d'estadística, i en concret el **saber #2. EST.DI.C**, cal treballar la seva importància en els experiments i les mesures: més enllà dels típics materials com cartes, daus i ruletes, cal incorporar l'estadística treballant-la en altres contextos i matèries com ara la física i química i la biologia.

Cal recordar que un experiment està format per unes condicions que fixa l'experimentador per a l'obtenció de dades mitjançant una mesura, però els resultats obtinguts estan afectats per errors no controlats o errors en el mateix procés de mesura. A conseqüència d'això, és necessària l'estadística que permet caracteritzar el conjunt de dades experimentals obtingudes.

Una bona activitat també per treballar gràfics en altre tipus de context és [El Moviment. Moviment rectilini i uniforme](#) d'Alcázar, A.; Gómez, R.; Guitart, F.; Ibáñez, V.; Masalles, J., on es presenta una seqüència didàctica que incideix especialment en la comprensió i l'elaboració de gràfics posició-temps, tant amb eines tradicionals (full quadriculat) com a partir de simulacions i de l'anàlisi de dades recollides amb sensors digitals.

Una altra bona activitat per treballar la recollida de dades a través de l'experimentació i que, en aquest cas, permet la reflexió del procés de mesura i el seu error, és la que apareix a l'ARC, [Mesurant les il·lusions \(òptiques\)](#) de Joan Jareño. L'original de l'activitat es troba a [L'estadística en el vostre món \(Nivell 2\)](#) (Barceló i Vidal *et al.*, 1990) amb el títol *No és cert tot el que es veu*, encara que a l'ARC les il·lusions òptiques es troben amb miniaplicacions que es poden obtenir per treballar també de manera desconnectada. En canvi, en el volum del llibre d'estadística es donen indicacions per construir les il·lusions manualment. També podeu trobar les il·lusions òptiques creades amb GeoGebra per Raül Fernández al llibre [Ilusiones ópticas y estadística](#).



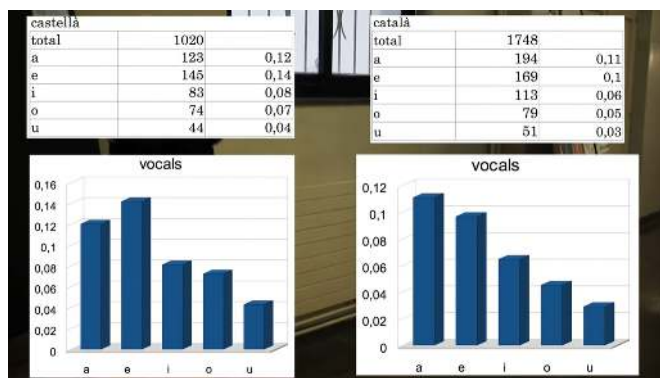
Font: [Mesurant les il·lusions \(òptiques\)](#)

Autor: Joan Jareño

L'activitat té una primera fase en què cal trobar l'error mitjà de cada il·lusió: es pren nota de les dades individualment i després de les de tota la classe, recollint també l'error comès en la mesura i fent la mitjana dels errors. A la segona fase, per comparar l'error en cadascuna de les il·lusions, cal calcular l'error relatiu,

donat que les mesures de cada il·lusió són diferents. Un cop calculat l'error relatiu es poden comparar les il·lusions, numèricament o gràficament, i el seu «grau d'engany».

Per treballar la confecció de taules de freqüències i la seva relació amb els gràfics, **saber #2.EST.DI.D**, us proposem l'activitat portada a terme per l'Institut Moisès Broggi i presentada al videoMAT2015, [Es poden mesurar els idiomes?](#), que analitza la freqüència relativa de les vocals a través d'un treball estadístic basat en la lectura de textos en català, castellà, francès i anglès:



Font: [Es poden mesurar els idiomes?](#)

Autor: Alumnat de l'Institut Moisès Broggi

També es pot suggerir la lectura d'un text i l'elaboració del seu diagrama de freqüències i comparar-lo amb els gràfics de les freqüències en els diferents idiomes perquè els companys endevinin en quina llengua estava escrit el text.

En la mateixa línia, podeu trobar [Substitution Cipher](#) de l'NRICH, en què a través del gràfic de freqüències de l'anglès, l'alumnat ha de desxifrar un text i, a [Lletres, paraules i frases...](#) del CREAMAT, també teniu un bon grapat d'activitats per treballar codificació i freqüències relatives.

**#DI. E-** Representació d'un conjunt de dades donades amb gràfics estadístics (gràfics de punts, de barres i de sectors, gràfics de Pareto, pictogrames...) manualment o fent servir eines de tractament de dades.

Si a 1r d'ESO s'ha prioritzat la representació gràfica feta manualment, per treballar el **saber #2.EST.DI.E**, a 2n d'ESO s'ha optat per introduir el treball amb fulls de càlcul. A l'ARC podeu trobar dues activitats, [Estadística amb excel 1](#) i [Estadística amb excel 2](#) de Sergio Gracia, totes dues amb l'objectiu que l'alumnat aprengui a fer servir un full de càlcul per tal d'organitzar dades estadístiques, fer els càlculs adients i generar els gràfics corresponents. L'estadística amb Excel 2 també treballa els fulls de càlcul per generar simulacions d'experiments probabilístics i connecta així amb la llei dels grans nombres, **saber #2.EST.PI.F** i **saber #2.ALG.PC.E**

Per altra banda, dins de la campanya del CREAMAT, podeu trobar una entrada del blog on apareixen referenciats un gran [conjunt de miniaplicacions per dibuixar gràfics estadístics](#).

Per treballar la construcció dels gràfics en un context financer, recomanem l'activitat [Gràfics de despeses familiars](#) de Miquel Ferrer Puigdemí, on s'utilitza l'Excel o el Calc per representar gràfiques lineals amb

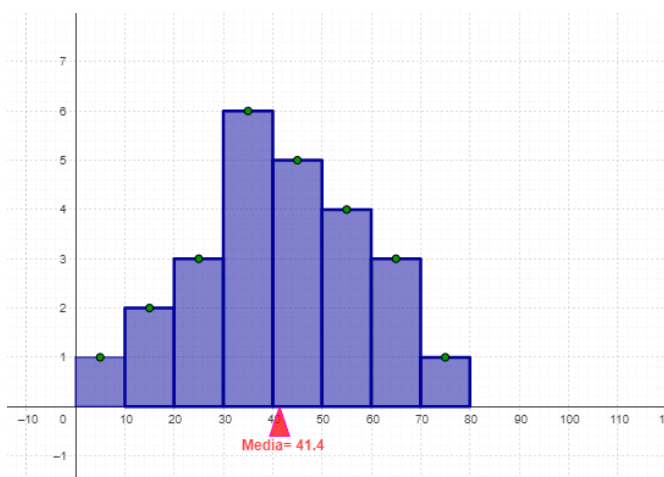
dues dimensions i que pot servir com un primer contacte del programari digital, on es treballen, més enllà dels conceptes estadístics, les relacions de canvi i numeració, concretament els percentatges.

Cal recordar que el **saber #2.EST.DI.E** és essencial, però que els recursos que s'acaben de descriure són només una proposta.

Per tal de treballar el sentit crític de la ciutadania davant la informació, el **saber #2.EST.DI.F**, creiem convenient analitzar els gràfics de la campanya del CREAMAT [Errors als mitjans](#), en què es mostren gràfics amb errors o directament manipulats per tal de generar una interpretació esbiaixada. En la mateixa línia, podeu trobar una gran quantitat de gràfics distorsionats a l'enllaç de [malaprensa](#).

Al web del grup Vilatzara, també podeu trobar l'activitat [Vull una moto](#), basada en un petit joc de rol, en què la classe es divideix en tres grups: pares i mares, fills i filles adolescents i jutges, i en què les conclusions del joc han de portar a reflexionar sobre les mesures que pot prendre l'Administració per reduir el nombre d'accidents en què estan implicades les motocicletes. Els grups de pares i mares i fills i filles, partint de la mateixa informació presentada en forma de gràfic, han d'elaborar els arguments a favor de tenir una moto. El grup de jutges ha de valorar els arguments de cada grup i si aquests arguments s'ajusten als gràfics facilitats.

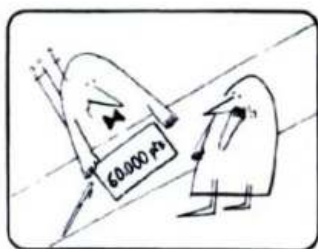
Per tal de desenvolupar el concepte de moda, mitjana i mediana que ja s'ha introduït i treballat a 1r d'ESO, **saber #2.EST.DI.G**, resulta interessant la visualització gràfica d'aquests conceptes, Manuel Sada a l'activitat [Idea gráfica de la media](#), del seu web Estadística y probabilidad, que ens proposa determinar el valor de la mitjana d'una distribució a partir del «punt d'equilibri» (a l'eix horitzontal) de l'histograma corresponent.



Font: [Idea gráfica de la media](#)

Autor: Manuel Sada

El grup Vilatzara proposa l'activitat [Hi ha hagut engany?](#) a partir d'un còmic [El engañoso término medio](#), publicat al llibre *¡Ajá! Paradojas* de Martin Gardner (Gardner, 1982), on es pretén anar més enllà de la comprensió dels paràmetres i potenciar que l'alumnat descobreixi les seves limitacions i com l'empresari escull un paràmetre o altre per al seu propi benefici.



El señor Artilugio está entrevistando a Félix, candidato al puesto.  
**Señor Artilugio:** Aquí pagamos muy bien. El salario medio es de 60.000 pesetas semanales. Durante el período de formación sólo cobrará usted 15.000, pero pronto le subiremos el sueldo.

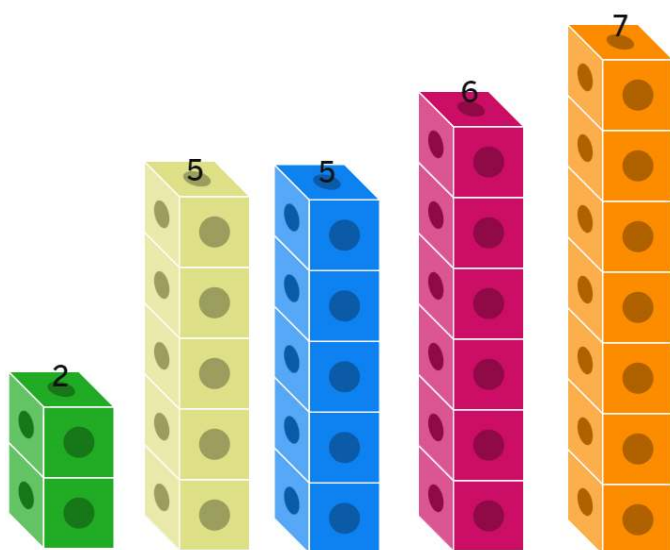


**Señor Artilugio:** No estoy de acuerdo. Lo que pasa es que usted no ha comprendido nada. Pude haber ido diciéndole los salarios por orden; el salario medio serían entonces 40.000 pesetas. Pero eso no es la media, sino la mediana.

Font: ¡Ajá! Paradojas de Martin Gardner

Una tasca molt completa per treballar mitjana, mediana, moda i rang la podeu trobar al web de Mathshell de la Universitat de Nottingham, [Representing Variability with Mean, Median, Mode, and Range](#) on, mitjançant tres activitats diferents en contextos propers a l'alumnat, com tirs de penal en futbol, concurs de bandes i una valoració de videojocs, es construeix el significat d'aquests paràmetres estadístics.

També podem trobar una bona activitat per treballar paràmetres estadístics al web de l'NRICH. L'activitat [Unequal averages](#) parteix d'un conjunt de 5 nombres que compleixen que la mitjana és igual a la mediana, a la moda i al rang i repta l'alumnat a trobar conjunts de nombres que compleixin aquesta propietat.



Font: Elaboració pròpia. Conjunt de 5 nombres que compleixen que la mitjana=moda=mediana=rang

Com ja vam indicar a 1r d'ESO, l'ús de representacions visuals, dibuixar quadrets a la llibreta, o l'ús de materials manipulables com polícubs, pot ser un bon suport per ajudar l'alumnat a ser sistemàtic i no deixar-se cap possibilitat.

L'activitat a 2n d'ESO es pot ampliar buscant conjunt de nombres que poden complir o no les propietats següents:

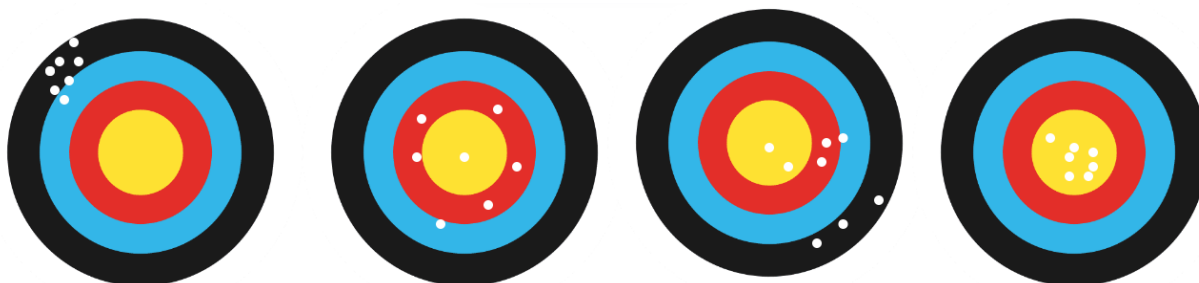
- A. Moda < Mediana < Mitjana
- B. Moda < Mitjana < Mediana
- C. Mitjana < Moda < Mediana

- D. Mitjana < Mediana < Moda
- E. Mediana < Moda < Mitjana
- F. Mediana < Mitjana < Moda

Una bona activitat per introduir el significat de les mesures de dispersió, **saber #2. EST.DI.H**, és la que podem trobar al capítol 6 del llibre *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria obligatoria* (Calvo et al., 2016) de Calvo, Deulofeu, Jareño i Morera.

Aquesta activitat proposa reflexionar per treballar els paràmetres de centralització i de dispersió a través d'un concurs de tir en arc.

Es proposa a l'alumnat que reflexioni inicialment sobre els tiradors del concurs mostrant el resultat de la competició:

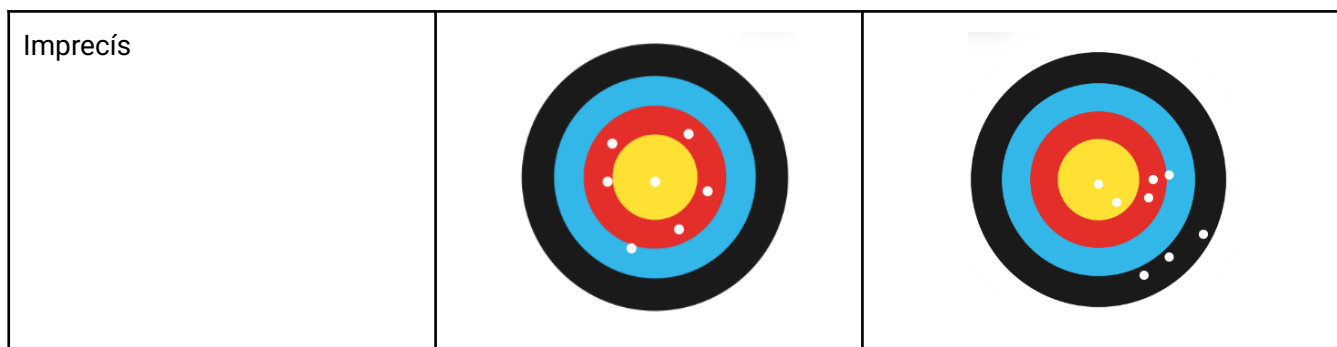


Imatge d'elaboració pròpia dissenyada amb la proposta d'*Aprender a enseñar matemáticas en la ESO*.

A la vista dels resultats —alguns són bons tiradors, d'altres més dolents, hi ha la possibilitat que algun arc estigui desequilibrat—, es pregunta a l'alumnat quin jugador escollirien si volguessin fitxar-ne un per al seu equip, i es proposa també com canviarien les dianes si els jugadors s'intercanviessin l'arc.

També podem animar l'alumnat a classificar les dianes segons la seva exactitud i precisió.

|        | Exacte                                                                              | Inexacte (errors sistemàtics)                                                         |
|--------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| Precís |  |  |



Imatge d'elaboració pròpia dissenyada amb la proposta *Aprender a enseñar matemáticas en la ESO*.

És important que l'alumnat arribi a la necessitat que és necessari combinar els paràmetres de dispersió i de centralització per donar la informació completa d'un conjunt de dades.

La idea de dispersió estadística en l'ensenyament de les matemàtiques pot ser una mica complexa per a l'alumnat; el **saber #2. EST. DI. I** en presenta diverses dificultats, tant conceptuals com pràctiques. La dispersió estadística es refereix a la manera en què les dades es distribueixen o es dispersen al voltant d'una mitjana o d'un valor central i poden ser abstractes i difícils d'entendre, especialment perquè no es poden visualitzar fàcilment sense una comprensió prèvia dels conjunts de dades i distribucions.

Una de les dificultats clau és fer que els estudiants entenguin què significa la variabilitat en les dades i com es pot mesurar. Molts poden pensar que dades amb la mateixa mitjana són «iguals» en distribució i costa explicar que la dispersió pot canviar-ho. Un bon exemple seria el que es mostra a continuació que apareix a *Guías Praxis para el profesorado de ESO, matemáticas: contenidos, actividades y recursos* (Azcárate & Deulofeu, 1998) en la qual en el darrer minut d'un partit de bàsquet l'entrenador ha d'escollir quina jugadora farà jugar al partit. Una proposta ampliada de l'activitat és la que proposa Pablo Beltrán Pellicer a 2n d'ESO i que és la que s'exposa a continuació.

Partit de bàsquet. Queda un minut i l'entrenador ha de decidir quina jugadora ha de jugar. A quina ha d'escollir?

- Si va perdent de 8 punts.
- Si va guanyant de 2 punts.

Les dades que ens proporciona l'activitat són el percentatge d'encerts de tir de 5 jugadores en els darrers 10 partits que es poden representar en la taula següent:

|              | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|--------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| <b>Mària</b> | 56 | 57 | 67 | 49 | 45 | 73 | 65 | 59 | 65 | 44 |
| <b>Clara</b> | 61 | 54 | 56 | 64 | 58 | 47 | 52 | 74 | 60 | 54 |
| <b>Alba</b>  | 66 | 46 | 61 | 59 | 73 | 47 | 56 | 53 | 61 | 58 |
| <b>Sònia</b> | 57 | 53 | 66 | 59 | 56 | 52 | 59 | 61 | 45 | 72 |
| <b>Laura</b> | 49 | 70 | 57 | 65 | 52 | 46 | 60 | 58 | 73 | 50 |

Font: [Tierra de números](#)

Autor: Pablo Beltrán

A partir de la taula, l'alumnat pot comparar partit a partit quina ha estat la millor jugadora. Ens podem fixar en les dades de l'Alba: en quins partits aconsegueix un percentatge per damunt de la resta de les jugadores? En quins partits està per damunt de la mitjana?

Si es calcula la mitjana de cadascuna de les jugadores, ens sorprendrà que totes tenen la mateixa mitjana de 58; per tant, cal una altra estratègia per descartar qui ha de sortir a jugar en el pròxim minut i cal representar les dades. Podeu veure els resultats dels treballs portats a terme al blog [Tierra de números](#) de Pablo Beltrán-Pellicer.

L'alumnat pot calcular el rang i debatre sobre la seva idoneïtat a l'estudi de la distribució. En aquest sentit, per reflexionar sobre les limitacions del rang Beltrán proposa el cas següent:

- Què passaria si una jugadora durant 8 dies tingués el 58 % d'encert en tirs i tingués un dia molt dolent amb tan sols el 31 % d'encerts i un de molt bo amb 75 %?

Finalment, podem trobar la desviació mitjana de manera que la menys regular és la Maria amb una desviació mitjana de 7,8 i les més regulars són la Sònia i la Clara amb desviacions mitjanes de 5,4 i debatre, ara sí, a qui hauria de fer jugar l'entrenador a la part final del partit.

Cal recordar que, a l'estudi de la dispersió, igual que amb la resta de paràmetres, el càlcul no ha de ser el centre de la tasca, sinó que cal fomentar la reflexió, i la representació de les dades ens pot ajudar a promoure-la.

## Inferència

### Sabers

- Disseny d'investigacions i enquestes per donar resposta a una pregunta, repte científic o situació quotidiana. [ESS]
- Concreció de les variables estadístiques quantitatives i qualitatives discretes a estudiar. #ALG.VA
- Elecció de mostres significatives d'una població a fi de realitzar un estudi estadístic. [ESS]
- Formulació de les preguntes adequades per poder conèixer les característiques d'una població.
- Recollida, depuració i organització de dades rellevants. #EST.DI
- Interpretació i anàlisi de dades de l'estudi estadístic plantejat per obtenir conclusions o recomanacions.
- Elaboració d'un informe on s'expliqui la metodologia emprada en l'estudi estadístic plantejat i amb els seus resultats i conclusions.

### Descripció i orientacions

La inferència estadística permet obtenir conclusions sobre una població a partir de l'estudi d'una mostra. A 2n d'ESO, els alumnes haurien de comprendre que les dades recollides no només serveixen per descriure fenòmens, sinó també per fer prediccions i establir hipòtesis sobre una població més gran.

A 1r d'ESO ja hem posat èmfasi en el fet que l'alumnat aprengui a plantejar una pregunta d'investigació; a 2n, en canvi, considerem essencial dissenyar un estudi estadístic mitjançant enquestes o experiments

senzills. És positiu que els alumnes defineixin per grups una pregunta d'investigació i siguin capaços d'identificar clarament la població que s'ha d'estudiar i les variables d'interès, conceptes marcats com essencials a 1r.

Pel que fa a les tècniques d'elecció de mostres, cal posar èmfasi en la importància d'una mostra aleatòria. És interessant simular diferents tipus de mostreig (aleatori simple, estratificat, etc.) fent servir cartes o nombres atzarosos per ajudar-los a visualitzar aquests conceptes.

Recomanem treballar miniaplicacions interactives o bé programar algun simulador, com es mostra en el curs d'[Snap! a l'aula de matemàtiques](#), per desenvolupar el concepte de mostratge i veure els efectes de diferents mostres sobre la validesa de les conclusions; els fulls de càlcul són pràctics per recollir, organitzar i analitzar dades de manera sistemàtica i utilitzar els materials manipulatius com daus, cartes o monedes per explicar l'atzar i les tècniques de mostreig.

#### Comentaris sobre les connexions

La connexió entre l'estadística i l'àlgebra es pot observar en diversos aspectes, especialment quan es treballa amb variables estadístiques quantitatives i qualitatives. Per tant, hi ha una connexió del **saber #2.EST.IN.B** amb el **saber #1.ALG.VA.C**. De fet, les variables, tenen un caràcter molt conceptual i adquireixen tot el significat quan es posen en pràctica en el treball amb funcions, a les equacions i als estudis estadístics.

#### Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

Es consideren saber essencials a 2n d'ESO el disseny d'investigacions i enquestes per donar resposta a una pregunta, repte científic o situació quotidiana, **saber #2.EST.IN.A**, i l'elecció de mostres significatives d'una població per dur a terme un estudi estadístic, **saber #2.EST.IN.C**.

### **Recursos i activitats**

#### Recursos i activitats generals per al bloc de sabers

Un dels recursos que cal tenir en compte per treballar estadística a l'aula és sense dubte els llocs web del grup Vilatzara, [L'estadística, més enllà dels paràmetres](#), que fa una proposta per treballar l'estadística per a cadascun dels nivells, ordenats seqüencialment i, a més, en cadascun dels nivells trobareu una proposta per desenvolupar un projecte.

#### Recursos i activitats per treballar sabers concrets

**#IN.A Disseny d'investigacions** per donar resposta a una pregunta, repte científic o situació quotidiana

Una bona activitat per treballar el disseny d'investigacions, **saber #2.EST.IN.A**, és la que proposa el grup Vilatzara [Portes massa pes en la motxilla?](#), si bé el grup Vilatzara proposa aquesta activitat/projecte per a 1r d'ESO, considerem que també pot ser adequada per a 2n, ja que es tracta d'una proposta prou oberta, en què l'alumnat ha de resoldre les tasques amb poques pautes i desenvolupar un cert grau d'autonomia. L'alumnat haurà de buscar la resposta mitjançant l'experimentació basada en el mètode científic: plantejar-se com resoldre l'enigma, redactar-ne la conjectura, preparar un experiment que pugui

confirmar-la, modificar-la o rebutjar-la, i establir les conclusions finals. Tot això obliga a preparar un pla de treball i portar-lo a la pràctica, partint d'una reflexió inicial i individual, un treball posterior en petit grup per acordar l'estratègia de treball, recollir les dades, consensuar les conclusions i fer la presentació a la resta del grup.

Per altra banda, dins de l'ARC podeu trobar moltes idees per realitzar estudis estadístics basades en la col·lecció Apreneestadística, com [El problema dels residus](#) de Xavier Gelada Serrat.

A l'ARC podeu trobar també l'activitat d'[Autors anònims](#) de Victòria Oliu Subiranes, en què l'alumnat disposa d'un conjunt de textos i, mitjançant un estudi estadístic, ha de determinar l'autoria del text.

Cal tenir en compte que dissenyar investigacions en l'ensenyament secundari basades en situacions experimentals d'atzar pot ser una manera molt efectiva d'ensenyar conceptes d'estadística i també de probabilitat. Als sabers corresponents al bloc de predictibilitat i incertesa en teniu bons exemples.

Una activitat que, tot i partir d'un context diferent, incorpora el disseny d'investigacions és [L'atzar de Joan Brossa](#) d'Anna Ausina. Aquesta seqüència didàctica fomenta la reflexió matemàtica i impulsa l'alumnat a generar preguntes investigables en relació amb l'obra artística de Joan Brossa. Mitjançant el disseny dels seus propis experiments, l'anàlisi de probabilitats i l'argumentació matemàtica, els estudiants descobreixen la presència de les matemàtiques en l'obra de Brossa.

La poesia de Brossa serà l'excusa per identificar les matemàtiques que hi ha al darrere dels daus, les cartes, les monedes i dur a terme un estudi probabilístic de les situacions proposades per treballar la probabilitat de manera experimental, d'acord amb la llei dels grans nombres i, posteriorment, fer la demostració teòrica dels resultats obtinguts.



Font: [MACBA](#)

Autor: Joan Brossa

Una proposta per treballar el disseny d'investigacions, **saber #2.EST.IN.A**, amb connexions en el **saber #2.ALG.PC** és la que es proposa a [Environment data logger](#). L'activitat consisteix a recollir i analitzar dades ambientals d'una aula durant un temps determinat com una setmana, quinze dies... mitjançant una Micro:bit, equipada amb sensors de temperatura, humitat, lluminositat i nivell sonor, així com mitjançant un ordinador amb accés a MakeCode per programar el dispositiu.

Un cop preparada la Micro:bit, que s'ha de posar en un lloc estratègic dins l'aula per assegurar-se que capta correctament les dades, es pot treballar la interpretació dels resultats i establir relacions amb la rutina diària de l'aula. Es poden detectar situacions com l'augment del soroll durant els moments d'esbarjo o la

variació de la lluminositat en funció de l'hora del dia. A més, podem animar el nostre alumnat a plantejar possibles millores per optimitzar les condicions ambientals dins l'aula.

Per poder treballar la concreció de variables, el **saber #2.EST.IN.B**, podem proposar una activitat en la qual els alumnes treballin per parelles o grups per identificar variables en diferents situacions reals i que classifiquin si són quantitatives discretes o contínues, o qualitatives nominals o ordinals. Per exemple:

- En una enquesta sobre l'activitat física, podríem estudiar variables com el nombre d'hores d'exercici per setmana (quantitativa contínua), tipus d'activitat preferida (qualitativa nominal), etc. Podeu veure un exemple d'enquesta sobre l'activitat esportiva en aquest [enllaç](#).
- En un estudi sobre els hàbits alimentaris dels alumnes, poden tractar variables com el nombre d'àpats per dia (quantitativa discreta), tipus de menjar preferit (qualitativa nominal), satisfacció amb la dieta (qualitativa ordinal), etc.
- En la pregunta sobre els factors que influeixen en la tria de mitjans de transport per venir a l'escola, les variables podrien ser el tipus de transport (autobús, cotxe, bicicleta) (qualitativa nominal), el temps de viatge (quantitativa contínua), la distància recorreguda (quantitativa contínua), la freqüència d'ús del transport (quantitativa discreta), etc.
- En la pregunta d'investigació sobre la relació entre els hàbits de lectura i les notes de llengua, les variables podrien ser el temps dedicat a la lectura per setmana (quantitativa contínua), gènere literari preferit (qualitativa nominal), puntuació de les notes en llengua en assoliments (quantitativa discreta).
- En l'estudi de les hores d'ús de pantalles, també podem trobar diferents tipus de variables, variables qualitatives com el tipus de dispositiu utilitzat (ordinador, mòbil, tauleta, televisió) o el motiu principal d'ús (feina, estudi, oci, comunicació) o variables quantitatives, el nombre d'hores diàries d'ús de pantalles. També podem incloure el nombre de dispositius diferents usats, que és una variable discreta, o la freqüència de pauses durant l'ús de pantalles. Un exemple podria ser el proposat per Raül Fernández [Quina és la teva relació amb les pantalles?](#)

A l'hora de fer qualsevol estudi estadístic, experiment aleatori o enquesta cal fomentar el debat sobre la rellevància de les variables, plantejant discussions a l'aula sobre quines variables són rellevants o no per respondre una pregunta d'investigació. El professorat ha d'ajudar a entendre que és important centrar-se en variables que tinguin un efecte directe en la resposta a la pregunta i evitar variables irrelevants.

Per tal de treballar l'elecció de la mostra significativa a 2n d'ESO i desenvolupar el **saber #2.EST.IN.C**, es proposa anar més enllà del que hem fet a 1r d'ESO, on ens hem centrat que l'alumnat entengui que és suficient treballar amb una part de la població d'estudi que representi el complet. En aquest curs, cal treballar activitats en espais o contextos diferents o fins i tot en situacions en les quals el mostreig ha d'anar més enllà de les tècniques tradicionals per captar característiques més profundes o no trivials d'una població o sistema. Es proposen dues activitats, una de mostreig en un espai tridimensional simple com un cilindre i un mostreig en l'espai, molt utilitzat en ecologia, perquè es pot mostrejar vegetació o fauna en diferents punts geogràfics per analitzar la distribució dins d'un hàbitat.

Per treballar el **saber #2. EST. IN. C** es proposa a [Mathematics Assessment Project](#) que, com ja hem comentat, són un conjunt de materials que es van generar el 2015 en col·laboració amb la Universitat de Califòrnia, Berkeley i l'equip del Shell Center de la Universitat de Nottingham. Com totes les lliçons proposades, hi podem trobar els materials per a l'alumnat, així com les indicacions i els suports per al professorat en el moment de fer l'activitat a l'aula. Totes les tasques s'inicien amb una activitat prèvia que l'alumnat ha de fer individualment a casa. A l'inici de la lliçó, es revisen els resultats per detectar la comprensió de la situació i les possibles dificultats. A continuació, se segueix un esquema de treball individual, debats en petits grups i posada en comú a tota la classe. Al final de la lliçó es proposa una petita avaluació o una activitat reflexiva per tal que l'alumnat sigui conscient del que ha après.

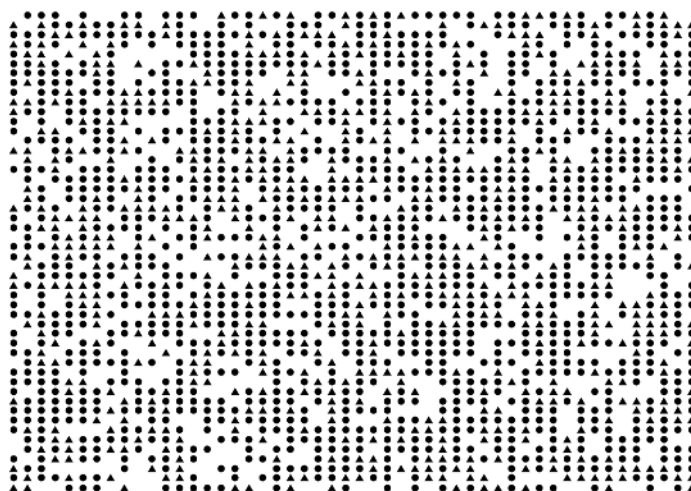
L'activitat indicada porta per títol [How Many Jellybeans?](#) i s'inicia amb una referència als grans concursos: «Coneixeu aquells concursos en què s'ha d'endevinar el nombre de caramels d'un pot per guanyar el premi? Quants dolços creieu que hi ha al pot? Quants de negres?». A la tasca proposada es planteja donar la fitxa amb les mesures del pot en una imatge, si és possible en color. Amb tot, pot ser més engrescador portar a l'aula el pot de vidre amb els dolços i que qui faci la millor estimació matemàtica guanyi els dolços de dins, un motiu més que suficient per posar-se a fer matemàtiques i treballar d'aquesta manera els volums i el mostreig.



Font: [Sampling and Estimating: How Many Jellybeans?](#)  
Mathematics Assessment Project

L'altra activitat també del Mathshell és [Counting trees](#) i comença com és habitual amb un treball individual: en aquest cas es demana el recompte d'una plantació d'arbres plantats en filera en una imatge on apareixen arbres vells representats amb la icona del cercle i arbres joves representats amb la icona del triangle. Després es fomenta el treball cooperatiu en grups de treball demanant que cada grup unifiqui les diverses estratègies que ha fet servir per fer el recompte i que presenti el resultat a altres companys. La feina es pot intercanviar entre els diferents grups i, finalment, amb el grup classe es poden tractar les fortaleeses i les mancances dels diferents procediments de recompte.

The Tree Farm



Font : [Sampling and Estimating: Counting trees](#)

Autor: Mathematics Assessment Project

Un cop feta l'activitat, els resultats que obtindrem a la classe poden ser molt diversos, però haurien de descriure una tècnica de mostreig adequada que tingui en compte les diferents proporcions d'arbres vells i de joves, a més de permetre els buits entremig i que es comprovin les estimacions en almenys dues àrees de mostra. Si hi ha una gran variació en el nombre d'arbres en dues àrees, cal insistir perquè es compti el nombre d'arbres d'una tercera àrea de mostra. Cada mostra, de la mateixa mida, hauria de cobrir una àrea clarament diferent de la granja d'arbres (és a dir, dues àrees de mostra no haurien d'estar l'una al costat de l'altra). Veiem alguns resultats del procediment fet per l'alumnat:

Counting trees

1. If Tom draws a 10x10 square round some trees and counts how many old and new there are. There are 50 rows and 50 columns altogether so he must multiply by 25. He could do this a few times to check and then take the average.

2.

|           |      |   |      |        |
|-----------|------|---|------|--------|
| 53 old    | x 25 | = | 1325 | old    |
| 28 new    | x 25 | = | 700  | new    |
| 19 spaces | x 25 | = | 475  | spaces |
| 100       |      |   | 2500 |        |

1325 + 700 + 475 = 2500

2500 ÷ 2 = 1250

So about 1250 old trees and 788 new trees

Check

|           |      |   |      |        |
|-----------|------|---|------|--------|
| 48 old    | x 25 | = | 1200 | old    |
| 35 new    | x 25 | = | 875  | new    |
| 17 spaces | x 25 | = | 425  | spaces |
| 100       |      |   | 2500 |        |

1200 + 875 + 425 = 2500

2500 ÷ 2 = 1250

2 columns has 21 young trees  
55 old trees

50 columns is approx  
50 ÷ 2 = 25  
25 x 21 = amount of young trees = 525  
25 x 55 = amount of old trees = 1,375  
rounded up  
young 530  
old 1,380

Font : [Sampling and Estimating: Counting trees](#)

Autor: Mathematics Assessment Project

Donat que a 2n d'ESO hem introduït la utilització d'eines TIC per a la realització de gràfics, pensem que aquest curs és el moment adequat per treballar l'ús de formularis de Google i practicar amb aquest recurs el **saber #2. EST. IN. D.** A classe podem estudiar com es crea un formulari, com s'afegeixen preguntes i com s'envia per recollir respostes, i també quines opcions de preguntes permet, com ara tries d'elecció múltiple, desplegable, respostes breus, escales de valoració i altres formats útils per recollir dades.

L'alumnat en petits grups pot escollir un tema per investigar dins de l'escola o la comunitat i pensar com dissenyar preguntes clares i que generin dades fàcils d'analitzar. Cada grup pot dissenyar el seu formulari per recollir dades.

Un cop creats els formularis, es poden enviar als companys de classe o a altres grups de l'escola. Google Forms permet recollir les respostes automàticament en un full de càlcul de Google garantint-ne l'anonimat. Les respostes es poden visualitzar en gràfics automàtics que genera el formulari. Posteriorment, cal aprofundir en l'estudi i calcular mesures com la mitjana, la mediana i la moda i, si cal, crear gràfics personalitzats. Els diferents grups de treball poden comparar els seus resultats per veure com varien les dades segons la pregunta o el grup de persones enquestades.

Finalment, l'alumnat pot preparar una presentació breu sobre els resultats obtinguts, les conclusions i els gràfics que ha creat i organitzar un debat sobre les diferències en els resultats obtinguts, les possibles causes d'aquestes diferències i la validesa de les conclusions.

Una altra activitat pot ser analitzar el tipus de preguntes d'un formulari com el de l'[ús del temps](#) (realitzat per l'Institut d'Estadística de Catalunya).

Una bona activitat amb connexions de probabilitat i sentit numèric per estudiar l'organització de dades, i, per tant, treballar el **saber #2.EST.IN.E**, és [El bingo Mathgo](#) proposat per AIMSSEC (African Institute for Mathematical Sciences Scholls Enrichment Centre), que és un programa educatiu que forma part de l'**African Institute for Mathematical Sciences (AIMS)**. Aquest institut té com a objectiu principal la promoció de l'educació matemàtica i les ciències a l'Àfrica, especialment en aquelles zones amb menys recursos.

El programa [AIMSSEC](#) se centra a proporcionar formació, materials i suport als mestres de matemàtiques de secundària. L'objectiu és millorar l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques a les escoles mitjançant el desenvolupament professional dels docents. Ofereixen cursos en línia, materials didàctics i tallers per ajudar els professors a actualitzar els seus coneixements matemàtics i metodològics per tal de millorar l'alfabetització matemàtica de l'alumnat a l'Àfrica.

En el bingo proposat, a la primera part del joc cada jugador ha de crear la seva targeta lliurement escollint 25 números entre el 0 i el 100, sense repetir-ne cap i sense poder canviar-los a posteriori. En cada ronda una persona encarregada traurà dos nombres aleatoris de l'1 al 10 (podeu fer servir els [daus següents](#)) i a través d'una suma, resta, multiplicació o divisió, els jugadors han de buscar un d'aquests resultats a la seva targeta i marcar-los. Posteriorment, es fa la reposició (o es tornen a llançar els daus) i s'extreuen dos números més entre l'1 i el 10 i així successivament. Guanya el primer jugador que completi una línia, sigui fila, columna o diagonal, de 5 nombres.

És convenient que els alumnes registrin els nombres que han sortit i les possibilitats que surten per fer les comprovacions un cop cantat el bingo.

| Numbers called | Results: |            |         |          |
|----------------|----------|------------|---------|----------|
|                | Sum      | Difference | Product | Quotient |
| 8 and 4        | 12       | 4          | 32      | 2        |
| 9 and 10       | 19       | 1          | 90      | -        |
|                |          |            |         |          |
|                |          |            |         |          |
|                |          |            |         |          |
|                |          |            |         |          |

Font: [Mathgo](#)  
[AIMSSEC](#)

Acabada la partida, en què també s'ha treballat el sentit numèric, ens preguntem quins números tenen més probabilitats de sortir en el nostre bingo, quins números no sortiran i com podem col·locar els nombres a la targeta per augmentar les possibilitats de guanyar. Cal fer, per tant, una anàlisi de freqüències i, per tant, fer una recollida de dades sistemàtica per construir tots els casos possibles d'obtenir un dels números de la targeta, tenint en compte que l'ordre compta. Podeu veure l'anàlisi de les diferents opcions a la imatge següent:



The image shows two hand-drawn bingo cards. The left card is titled 'sum' and the right card is titled 'resta' (difference). Both cards have a grid of numbers from 1 to 10. The 'sum' card shows the possible sums of two dice (2 to 12) and the 'resta' card shows the possible differences (1 to 9). The cards are filled with numbers and some cells are marked with 'X' or 'O' to indicate specific outcomes.

| sum | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1   | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
| 2   | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 |
| 3   | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |
| 4   | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 5   | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 6   | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 7   | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 8   | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 9   | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 10  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |

| resta | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1     | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
| 2     | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 |
| 3     | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |
| 4     | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 5     | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 6     | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 7     | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 8     | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 9     | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 10    | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |

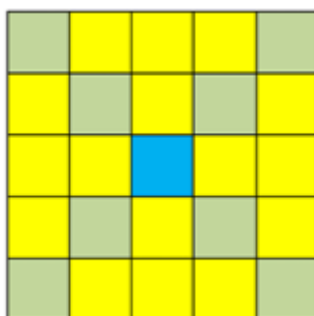
Recompte de números i reconeixement de patrons dels casos possibles de la suma, resta, multiplicació i divisió de 2 daus de 10 fet per un alumne de l'Institut El Joncar.

Després es pot fer el recompte del cadascun dels números, elaborant la taula de freqüències corresponent:

| FREQUENCIES OF RESULTS OF COMBINING NUMBERS ON THE CARDS CALLED |     |            |                  |          |                 |         |     |            |                   |          |                 |
|-----------------------------------------------------------------|-----|------------|------------------|----------|-----------------|---------|-----|------------|-------------------|----------|-----------------|
| Results                                                         | Sum | Difference | Product          | Quotient | TOTAL FREQUENCY | Results | Sum | Difference | Product           | Quotient | TOTAL FREQUENCY |
| 0                                                               |     | 10         |                  |          | 10              | 27      |     |            | 2                 |          | 2               |
| 1                                                               |     | 18         | 1                | 10       | 29              | 28      |     |            | 2                 |          | 2               |
| 2                                                               | 1   | 16         | 2                | 10       | 29              | 30      |     |            | 4                 |          | 4               |
| 3                                                               | 2   | 14         | 2                | 6        | 24              | 32      |     |            | 2                 |          | 2               |
| 4                                                               | 3   | 12         | 3                | 4        | 22              | 35      |     |            | 2                 |          | 2               |
| 5                                                               | 4   | 10         | 2                | 4        | 20              | 36      |     |            | 3                 |          | 3               |
| 6                                                               | 5   | 8          | 4                | 2        | 19              | 40      |     |            | 4                 |          | 4               |
| 7                                                               | 6   | 6          | 2                | 2        | 16              | 42      |     |            | 2                 |          | 2               |
| 8                                                               | 7   | 4          | 4                | 2        | 17              | 45      |     |            | 2                 |          | 2               |
| 9                                                               | 8   | 2          | 3                | 2        | 15              | 48      |     |            | 2                 |          | 2               |
| 10                                                              | 9   |            | 4                | 2        | 15              | 49      |     |            | 1                 |          | 1               |
| 11                                                              | 10  |            |                  |          | 10              | 50      |     |            | 2                 |          | 2               |
| 12                                                              | 9   |            | 4                |          | 13              | 54      |     |            | 2                 |          | 2               |
| 13                                                              | 8   |            |                  |          | 8               | 56      |     |            | 2                 |          | 2               |
| 14                                                              | 7   |            | 2                |          | 9               | 60      |     |            | 2                 |          | 2               |
| 15                                                              | 6   |            | 2                |          | 8               | 63      |     |            | 2                 |          | 2               |
| 16                                                              | 5   |            | 3                |          | 8               | 64      |     |            | 1                 |          | 1               |
| 17                                                              | 4   |            |                  |          | 4               | 70      |     |            | 2                 |          | 2               |
| 18                                                              | 3   |            | 4                |          | 7               | 72      |     |            | 2                 |          | 2               |
| 19                                                              | 2   |            |                  |          | 2               | 80      |     |            | 2                 |          | 2               |
| 20                                                              | 1   |            | 4                |          | 5               | 81      |     |            | 1                 |          | 1               |
| 21                                                              |     |            | 2                |          | 2               | 90      |     |            | 2                 |          | 2               |
| 24                                                              |     |            | 4                |          | 4               | 100     |     |            | 1                 |          | 1               |
| 25                                                              |     |            | 1                |          | 1               |         |     |            | Total for 26-100  |          | 47              |
|                                                                 |     |            | Total for 1 - 25 |          | 297             |         |     |            | Total for 0 - 100 |          | 344             |

Font: [Mathgo](#)  
[AIMSSEC](#)

I, finalment, podem analitzar en quina posició cal col·locar els números més probables, tenint en compte que el quadrat ombrejat en blau té 4 línies de 5 per poder cantar bingo, els quadrats ombrejats en verd en tenen 3 i els quadrats ombrejats en groc només tenen 2 línies de 5. Per tenir les millors possibilitats de guanyar els jugadors hauran de posar el total 1 o 2 (que ocorre amb les freqüències més altes) al quadrat blau; entre 1 i 9 als quadrats verds; i, als quadrats grocs, el 0, 10 a 18, 20, 24, 30, 36, 40 i un altre número amb una freqüència de 2.



Font: [Mathgo](#)  
[AIMSSEC](#)

A fi de treballar la interpretació de les dades estadístiques i extreure'n conclusions, **saber #2.EST.IN.F**, es recomana l'activitat [Testing a new product](#), en la qual es proporciona a l'alumnat el resultat d'una enquesta a 40 persones sobre 4 desodorants i es vol esbrinar com influeixen en les persones la fragància i l'envàs. Hi ha dues fragàncies i dues maneres diferents d'envasar el producte.



Bouquet A



Bouquet B



Hunter A



Hunter B

Sex M



|           |   |  |   |   |   |
|-----------|---|--|---|---|---|
| Bouquet A | ✓ |  |   |   |   |
| Bouquet B |   |  |   |   | ✓ |
| Hunter A  |   |  | ✓ |   |   |
| Hunter B  |   |  |   | ✓ |   |

Font: [Using Data: Testing a New Product](#)  
 Mathematics Assessment Project

L'alumnat primer de tot, a la vista dels resultats en forma de targeta, ha de deduir quines són les preguntes que han portat a fer una recollida de dades com la que s'ha fet, treballant d'aquesta manera també el **saber #2. EST. IN. D:**

- Quins envasos prefereixen els homes / dones / persones?
- Quina fragància prefereixen els homes / dones / persones?
- Els homes / dones / persones estan més influenciats per la fragància o per l'envàs?

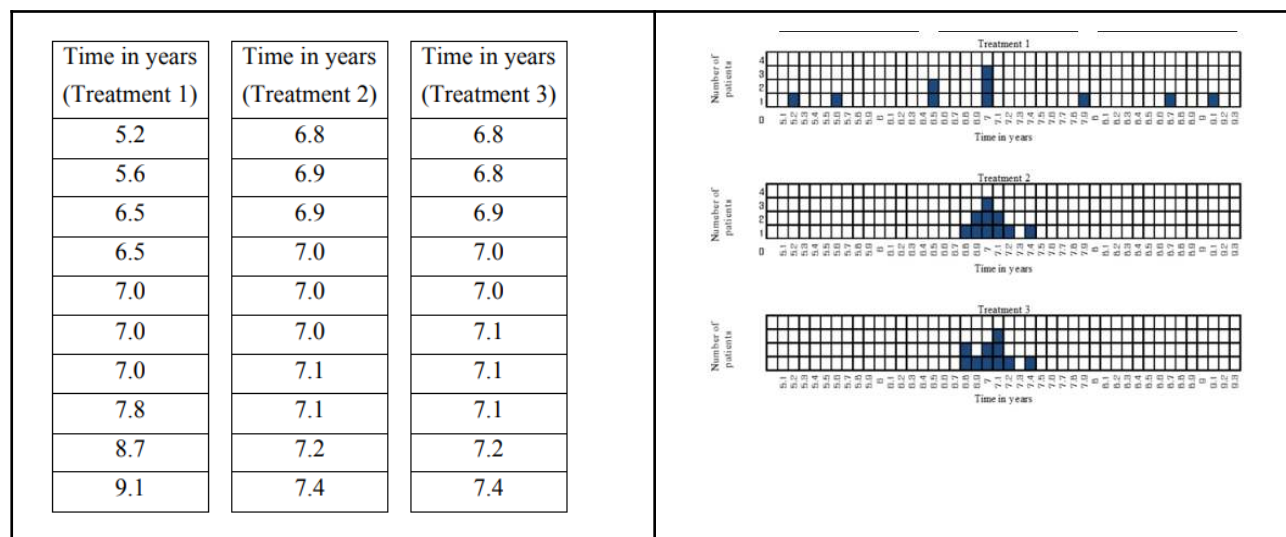
L'anàlisi de les possibles preguntes de l'enquesta dirigeix l'objectiu de l'estudi i marca la presa de decisions a l'hora d'organitzar i representar les dades que tenen tres variables: gènere, fragància i embalatge. Alguns alumnes poden decidir distingir entre opcions masculines i femenines, mentre que d'altres poden agrupar les dades: l'important és que siguin conscients de les seves decisions i les justifiquin.

Finalment, l'alumnat ha de posar en comú els seus estudis per fer una recomanació per al fabricant de desodorants i decidir quin nou producte s'aventura a llançar o concentrar-se tan sols en un dels mercats, el femení o el masculí, vistos i analitzats els resultats.

Una altra activitat per treballar la interpretació de dades és la de l'article [Levels of Reasoning of Middle School Students about Data Dispersion in Risk Contexts](#) (Sánchez & Orta, 2015) publicada a la revista [The Mathematics Enthusiast](#) de la Universitat de Montana, una activitat en què cal llegir més enllà de les dades per prendre decisions en contextos propers i reals de l'alumnat, que treballa en aquest cas la dispersió en les anàlisis mèdiques.

L'activitat és la següent: «*Considereu que heu d'assessorar una persona que pateix una malaltia greu, incurable i mortal, que es pot tractar amb un fàrmac que pot allargar la vida del pacient uns quants anys. És possible escollir entre tres tractaments diferents. Els pacients mostren diferents efectes sobre la medicació;*

mentre que en alguns casos els fàrmacs tenen els resultats desitjats, en d'altres els efectes poden ser més favorables o més adversos. Les llistes següents mostren el nombre d'anys que han viscut els pacients després de ser tractats amb una de les diferents opcions; cada nombre de la llista correspon al temps en anys que un pacient va sobreviure amb el tractament corresponent. Els gràfics corresponents als tractaments es mostren a continuació:



Font: [Levels of Reasoning of Middle School Students about Data Dispersion in Risk Contexts](#)

Autors: Ernesto Sánchez i Antonio Orta

- a) Quin tipus de tractament preferiries (1, 2 o 3)? Per què?  
b) En quin dels tractaments hi ha més variabilitat? Explica la resposta».

A l'aula podem donar simplement les taules i que l'alumnat hi faci les representacions que consideri oportunes i generar el debat en diferents grups de treball i donar importància i valor a aquelles propostes en què la presa de decisions tingui en compte tant el centre com la dispersió de les dades.

Per treballar la interpretació de dades en què la dispersió té el seu paper, tenim al mateix article de Sánchez i Orta el problema següent: «En una fira, els assistents estan convidats a participar en un dels dos jocs, però no en els dos. Per saber a quin joc jugar, en John observa, pren nota i ordena els resultats de 10 persones jugant cada joc. Les pèrdues (-) o premis en metàl·lic (+) obtinguts per les 20 persones es mostren a les llistes següents:

Game 1:

|    |     |    |    |    |    |    |     |    |    |
|----|-----|----|----|----|----|----|-----|----|----|
| 15 | -21 | -4 | 50 | -2 | 11 | 13 | -25 | 16 | -4 |
|----|-----|----|----|----|----|----|-----|----|----|

Game 2:

|     |      |    |     |     |     |     |    |      |    |
|-----|------|----|-----|-----|-----|-----|----|------|----|
| 120 | -120 | 60 | -24 | -21 | 133 | -81 | 96 | -132 | 18 |
|-----|------|----|-----|-----|-----|-----|----|------|----|

Font: [Levels of Reasoning of Middle School Students about Data Dispersion in Risk Contexts](#)

Autors: Ernesto Sánchez i Antonio Orta

- a) Si tens la possibilitat de jugar només un dels dos jocs, quin triaries? Per què?  
b) En quin dels dos jocs les dades tenen més variabilitat? Per què?».

Igual que en el problema del bàsquet proposat per al **saber #2.EST.DI.I**, la mitjana dels dos jocs és la mateixa i, per tant, la discussió és molt rica perquè entren en joc els paràmetres de dispersió. El que fa interessant l'article és veure les respostes de l'alumnat tant en aquest problema com en el del tractament mèdic i el nivell de profunditat que ens donarà una idea de les dificultats que poden sortir a classe quan es fa aquest tipus de problemes.

Per treballar l'elaboració d'un informe estadístic, **saber #2.EST.IN.E**, es recomana l'activitat del grup Vilatzara [Una gran epidèmia](#), una activitat que es presenta en el seu context històric. Es vol fer deduir que el nombre de morts està relacionat amb la presència d'una font d'aigua contaminada i ho fem a partir de la descripció i la interpretació del [mapa del metge britànic John Snow](#) (s. XIX).

L'activitat es pot presentar donant la informació sobre qui era John Snow i com va aturar l'epidèmia de còlera i presentar el [vídeo](#) on s'explica la història del metge, o deixar que l'alumnat ho descobreixi. El recurs té com a objectiu treballar la distribució de morts i la densitat de mortalitat als carrers del Soho de Londres i fer servir la representació i la interpretació de dades per escriure finalment una carta a l'alcalde de Londres que justifiqui precintat un dels pous.

A *Cuaderno de Cultura Científica* també es pot trobar l'article [El mapa del cólera de John Snow](#), que parla de l'ús dels diagrames de Voronoi per trobar la font que va generar el brot.

## Predictibilitat i incertesa

### Sabers

- A. Predicció i anàlisi dels resultats d'un experiment aleatori a partir de la informació obtinguda de manera empírica o teòrica. **[ESS]**
- B. Utilització de recursos digitals, fulls de càlcul, calculadores, programes de geometria dinàmica, entorns de programació...) per a la simulació i el càlcul de probabilitats. **#ALG.PC**
- C. Vinculació entre el concepte de proporcionalitat i el càlcul de probabilitats. **[ESS]#NUM.RP**
- D. Representació en diagrames d'arbre i organització de les dades en taules de contingència. **#NUM.CO, #ALG.PC**
- E. Càlcul de probabilitats de la composició d'esdeveniments equiprobables. **[ESS] #NUM.CO, #MES.ME**
- F. Utilització del treball experimental per al càlcul aproximat de probabilitats aplicant la llei dels grans nombres. **#ALG.PC**
- G. Valorar l'aportació dels jocs d'atzar en l'evolució i el desenvolupament de la teoria de la probabilitat. **#SOE.CE**

### Descripció i orientacions

#### Reflexions inicials

A 2n d'ESO es continua aprofundint a entendre la probabilitat com la mesura del grau de certesa o incertesa associat a un esdeveniment. És essencial fer-ho en diferents situacions, sigui a partir de dades experimentals o del raonament teòric.

L'ús d'eines digitals ens pot facilitar la feina i obtenir uns resultats més acurats en el càlcul de probabilitats,

així com en la representació de distribucions.

En aquest segon curs ja s'introdueixen els esdeveniments compostos equiprobables amb l'ús de diagrames d'arbre i taules de contingència per representar-los.

També es valora l'ús de falques històriques que ens ajudin a entendre com s'ha anat desenvolupant la teoria de la probabilitat. Per això, podem presentar jocs i problemes històrics que ens permetran conèixer les principals figures que varen desenvolupar la teoria de la probabilitat.

#### Comentaris sobre les connexions

Com no podria ser d'una altra manera, apareixen connexions directes amb el sentit numèric, **saber #2.NUM.CO.A**, pel que fa a la resolució de problemes basats en recomptes sistemàtics en què cal buscar una estratègia adequada (diagrames d'arbre, taules de doble entrada...), **saber #2.NUM.RP.A**, pel que fa a la representació i al significat de les fraccions en contextos diversos i amb el **saber #2.NUM.RP.A** pel que fa al càlcul de percentatges i de proporcionalitat directa.

També podem trobar connexions amb el sentit algebraic, **saber #2.ALG.PC.C**, en la comprensió i la creació d'algorismes per resoldre problemes i simulacions, així com amb el **saber #2.ALG.PC.B** en la utilització de recursos digitals (fulls de càlcul, calculadores, GeoGebra...) per a la simulació i el càlcul de probabilitats. Finalment, la connexió amb el sentit de la mesura, **saber #2.MES.ME.K**, en relació amb les freqüències relatives i les probabilitats d'esdeveniments compostos en experiments aleatoris a través de la regla de Laplace.

#### Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

A 2n d'ESO es considera essencial que l'alumnat sigui capaç de fer prediccions dels experiments aleatoris, així com d'analitzar-ne els resultats obtinguts de forma raonada i consistent. S'introdueixen els esdeveniments compostos i cal dur a terme el càlcul de probabilitats tenint en compte el concepte de proporcionalitat i com afecta cadascun dels estadis de l'esdeveniment compost.

#### **Recursos i activitats**

Moltes vegades la intuïció i la probabilitat no van agafades de la mà. Per tal de treballar el **saber #2.EST.PI.A** fem una proposta d'una situació poc intuïtiva a l'aula que sempre és molt interessant.

Un exemple és l'activitat que presenta Joan Jareño al seu [Blog del Calaix+ie](#) titulada [Intuïció i probabilitat: el joc de la canyeta més curta](#). Tal com s'especifica a l'activitat, funciona com segueix:

- Tenim un grapat de canyetes (o de cordills, o d'herbes, o pals de gelat...). Tantes com persones intervenen en el joc. Les canyetes poden tenir diferents longituds o ser totes iguals, menys una que ha de ser més curta.
- La persona que organitza el joc les agafa barrejades amb la mà de forma que, per la part superior, totes mostrin la mateixa longitud. La part inferior acostuma a quedar amagada, però si són, per exemple, cordes desiguals no és estrictament necessari.
- Els jugadors agafen ordenadament una canyeta cadascun.
- Perd (o s'elimina) qui ha triat la més curta.

La qüestió a discutir és: importa l'ordre en triar o és indiferent? Afecta quin torn tens per agafar la canyeta a la probabilitat que agafis la més curta?

En la proposta es fa una anàlisi detallada de l'activitat i es veu com la probabilitat de treure la palleta més curta és sempre la mateixa independentment de l'ordre en triar.

$$\begin{aligned} 1r \text{ jugador} &\rightarrow \frac{1}{5} \\ 2n \text{ jugador} &\rightarrow \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5} \\ 3r \text{ jugador} &\rightarrow \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5} \\ 4t \text{ jugador} &\rightarrow \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5} \\ 5è \text{ jugador} &\rightarrow \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Font: [Intuïció i probabilitat: el joc de la canyeta més curta](#)

Autor: Joan Jareño

Per fer l'activitat a l'aula, Joan Jareño recomana estructurar-la com segueix:

1. Plantejament de la situació i formulació de conjetures per part de l'alumnat. Pot ser interessant destacar-ne els aspectes més plausibles, encara que sapiguem que no siguin les respostes que s'ajustin a la realitat. És una manera de destacar que cal experimentar i estudiar la situació i no quedar-nos només amb les conjetures més raonables.
2. Experimentació: real per parelles i recollint després els resultats globals del grup. En acabat, podem deixar l'aplicació en marxa per fer més casos.
3. Estudiar la probabilitat teòrica. Segons l'edat, mirarem si el que convé més és presentar tots els casos possibles (per diagrama, en arbre, taula, llista...) o fer els càlculs de proporcionalitat condicionada.
4. Pot ser interessant, també, atendre els aspectes psicològics. Per exemple, encara que sapiguem que el joc és equiprobable, ens estimem ser primers per no allargar el «patiment» de perdre?

Una altra proposta podria ser [La Paradoxa de Monty Hall. Canvies o no canvies?](#), basat en un programa de televisió americà dels anys 1960-1970 *Let's Make a Deal* (Fem un tracte) i el nom ve del presentador del programa, Monty Hall i que proposa el grup ADEMGi de Girona als materials del taller [Tema 13: Estadística i probabilitat](#).

### Descripció del joc:

Suposa que estàs en un programa, i et donen l'oportunitat de triar tres portes. Darrere d'una hi ha un cotxe; darrere de les altres, cabres. El cotxe i les cabres es van col·locar a l'atzar abans de l'inici del programa. Les regles del joc són les següents: Després que triïs una porta, la porta romandrà tancada tota l'estona. El presentador, Monty Hall, que sap què hi ha darrere les portes, n'obre una de les dues restants, i la porta que obre té una cabra al darrere. Si a les dues restants hi ha cabres, en triarà una a l'atzar.

Font: [Tema 13: Estadística i probabilitat](#).

Autors: grup ADEMGI de Girona

Primer cal demanar a l'alumnat que faci una conjectura: Penses que canviar o no canviar de porta et pot ajudar a guanyar?

Després se'ls proposa experimentar en parelles i fer 20 jugades sense canviar de porta mantenint la tria inicial i les altres 20, canviant de porta. Ara cal treure'n conclusions.

Finalment, es reuneixen els resultats de tots els grups de la classe per posteriorment passar al raonament teòric que deixa clar que la millor opció és canviar de porta i que aquesta opció té una probabilitat de guanyar de  $\frac{2}{3}$  i, en canvi, no canviar només d' $\frac{1}{3}$ .

A Numberphile podem trobar el vídeo [Monty Hall Problem](#), en què ho explica molt detalladament.

El full de càlcul ens ofereix diferents opcions per treballar l'aleatorietat i per representar fàcilment les distribucions de dades, per treballar així el **saber #2. EST.PI.B.** Per exemple la funció =RANDBETWEEN(inferior;superior) ens torna un nombre aleatori entre aquests dos valors.

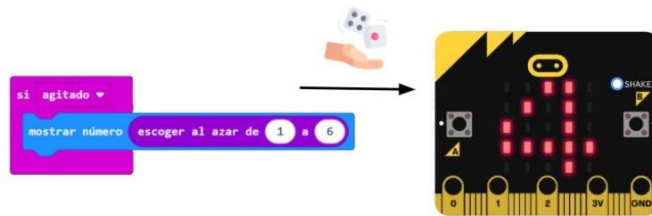
Les calculadores Casio de gamma mitjana i avançada, com les ClassWiz (fx-991EX, fx-570EX) i altres models programables, permeten fer simulacions de llançaments de daus mitjançant la funció de generació de nombres aleatoris. Podeu veure un tutorial en aquest [enllaç](#). Aquesta funcionalitat és molt útil per a estudis de probabilitat i estadística sense necessitat de programari especialitzat.

Per altra banda, donada una distribució de nombres, el full de càlcul ens permet inserir gràfics de diferents tipus (barres, columnes, histogrames, sectors, lineals, radials, etc.). És molt interessant descarregar el full de càlcul que ens generen els formularis en línia per poder utilitzar el tipus de gràfic que més s'ajusti a les nostres necessitats.

La programació de petites aplicacions també ens poden permetre simular diferents generadors aleatoris i el consegüent càlcul de probabilitats.

La proposta que es presenta prové del projecte Pensament Computacional (programació i robòtica educatives) del Departament d'Educació i Formació Professional i es titula [Treballem la probabilitat amb la micro:bit](#).

En l'activitat, i a partir de la placa micro:bit, es proposa primer dissenyar un dau numèric de manera que en sacsejar la placa micro:bit es mostri un nombre aleatori de l'1 al 6 a la pantalla de leds i representar-lo després en format gràfic.



Imatge extreta de: [Treballem la probabilitat amb la micro:bit.](#)

Autors: Departament d'Educació i Formació Professional

A l'activitat hi podeu trobar la descripció, els passos que heu de seguir i els arxius per descarregar.

A partir d'aquesta base es poden proposar diferents variants generant daus amb altres valors, com per exemple nombres primers, nombres parells, múltiples de 5, potències de 2, símbols d'operacions...

Alternativament, també podem generar el dau amb altres eines de programació visual com Scratch o Snap! als materials del curs de formació [Programem matemàtiques amb Snap!](#).

El curs dona recursos i orientacions per animar a portar la programació a l'aula de matemàtiques, donar a conèixer aquesta eina i reforçar alhora el pensament computacional i algorítmic, tan útil per a l'ensenyament i l'aprenentatge d'aquesta disciplina.

Un dels mòduls està dedicat a la Probabilitat i les simulacions i hi podem trobar tres pràctiques:

1. [Dues monedes](#)
2. [Joc del dau](#)
3. [Cursa de camells](#)

Les pràctiques venen acompanyades de vídeos explicatius, dels diferents passos per anar avançant en la programació, així com de propostes d'ampliació. Cal tenir en compte que abans de fer la programació de les activitats, és recomanable fer les simulacions en material manipulatiu.

La proporcionalitat també té un paper molt rellevant en el cas del càlcul de probabilitat d'esdeveniments compostos, i el treball del **saber #2. EST.PI.C**

A la jornada de l'[APMCM](#) titulada *L'atzar dona molt de joc*, Daniel Ruiz, a la conferència [El joc, inspiració per a fer matemàtiques](#), va proposar l'experiment següent: agafem una urna i hi posem 8 boles blanques i una bola negra. Les anem extraient d'una en una sense reposició. En quina posició creieu que és més probable que surti la bola negra?



- Entre les tres primeres (extracció 1, 2 o 3)?
- En les extraccions del mig (extracció 4, 5 o 6)?
- Entre les tres últimes (extracció 7, 8 o 9)?
- Totes les posicions tenen la mateixa probabilitat?

Després d'una primera conjectura podem fer una petita experimentació a classe en petits grups i després fer una posada en comú.

Tal com detalla Joan Jareño al seu blog, veurem que totes les posicions tenen la mateixa probabilitat:

$$\begin{aligned}
 1^{\text{r}} \text{ lloc} &\rightarrow \frac{1}{9} \\
 2^{\text{n}} \text{ lloc} &\rightarrow \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{9} \\
 3^{\text{r}} \text{ lloc} &\rightarrow \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{9} \\
 4^{\text{t}} \text{ lloc} &\rightarrow \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{9} \\
 5^{\text{è}} \text{ lloc} &\rightarrow \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{9} \\
 6^{\text{è}} \text{ lloc} &\rightarrow \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{9} \\
 7^{\text{è}} \text{ lloc} &\rightarrow \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \\
 8^{\text{è}} \text{ lloc} &\rightarrow \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{9} \\
 9^{\text{è}} \text{ lloc} &\rightarrow \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{9}
 \end{aligned}$$

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 1 | 2 |   |   |   |   |   |   |   |
| 1 | 2 | 3 |   |   |   |   |   |   |
| 1 | 2 | 3 | 4 |   |   |   |   |   |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |   |   |   |   |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |   |   |   |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |   |   |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |   |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

Font: [En quin lloc sortirà?](#)

Font: Joan Jareño

En aquest mateix article del blog, Joan Jareño analitza la mateixa activitat però en el cas de 8 boles blanques i 2 boles negres. En aquest cas, es calcula la probabilitat que la primera bola negra surti en una de les 9 primeres posicions.

$$\begin{aligned}
 1^r \text{ lloc} &\rightarrow \frac{2}{10} = \frac{18}{90} = 20\% \\
 2^a \text{ lloc} &\rightarrow \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{16}{90} = 17,77\% \\
 3^r \text{ lloc} &\rightarrow \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{14}{90} = 15,55\% \\
 4^t \text{ lloc} &\rightarrow \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{12}{90} = 13,33\% \\
 5^è \text{ lloc} &\rightarrow \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{10}{90} = 11,11\% \\
 6^è \text{ lloc} &\rightarrow \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{90} = 8,88\% \\
 7^è \text{ lloc} &\rightarrow \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{90} = 6,66\% \\
 8^è \text{ lloc} &\rightarrow \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{90} = 4,44\% \\
 9^è \text{ lloc} &\rightarrow \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2}{90} = 2,22\%
 \end{aligned}$$

Font: [En quin lloc sortirà?](#)

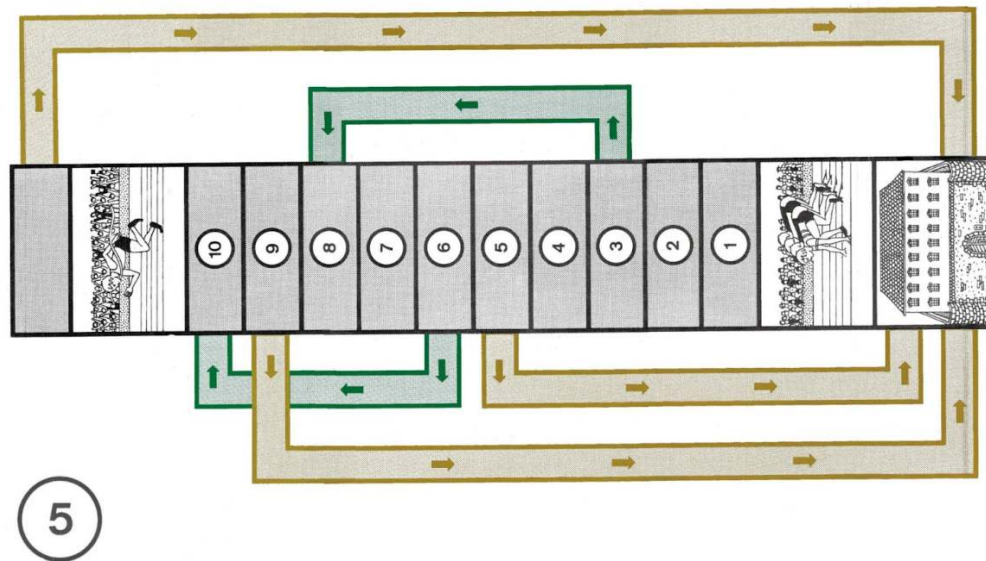
Font: Joan Jareño

I si es vol programar un simulador amb Snap!, tenim aquest [exemple](#) de Raül Fernández.

Per treballar a l'aula el **saber #2.EST.PI.D** i el **saber #2.EST.PI.E**, cal tenir en compte que moltes vegades els jocs d'atzar ens donen un context magnífic per treballar la probabilitat. A la Caixa de Varga podem trobar diferents taulers on es juga a partir de daus i en aquest exemple triarem el [Joc de l'escala](#) (Tauler 5), en el qual és interessant analitzar la probabilitat de guanyar o perdre utilitzant un diagrama d'arbre.

Tal com s'indica a la pàgina 9 del [Manual de la Caixa de Varga](#), per jugar-hi necessitem un dau amb 3 cares verdes i 3 cares blanques (si no disposem d'aquest dau, podem fer servir generadors aleatoris alternatius equivalents), tants peons com jugadors i 80 fitxes de colors.

El tauler per jugar al Joc de l'escala és el següent:



Font: [Taulells A3](#)

Autor: Tamás Varga

Al començament del joc, cada jugador rep 10 fitxes. Les fitxes restants van al banc. Cada jugador col·loca el seu peó al camp d'Inici i tira el dau per torns.

Si el punt verd apareix a la part superior del dau, el jugador pot avançar 2 espais, en el cas contrari (espai blanc a la part superior), només 1 espai.

El jugador que arriba a la casella 11 (Arribada) rep 3 fitxes del banc. Al final d'una ronda de joc (quan tots els jugadors són a l'arribada o a la presó), tots tornen a la casella d'Inici i cada jugador que està a la presó ha de «comprar» la seva llibertat per 1 fitxa.

Comença una nova ronda de joc. Al principi del joc, els jugadors es posen d'acord en quantes rondes s'han de jugar en total. Guanya qui té més fitxes al final de les rondes acordades. Qualsevol jugador pot saltar-se una ronda si ho desitja.

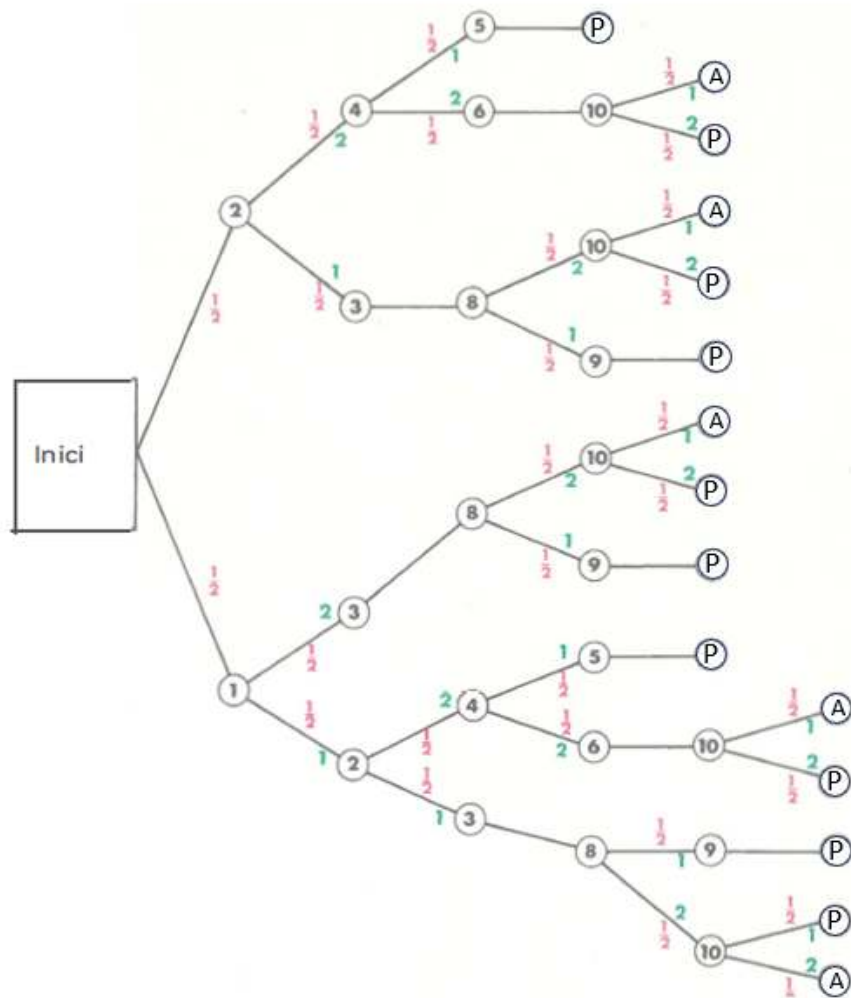
Pot ser útil començar amb unes quantes rondes per familiaritzar-nos amb el funcionament del joc.

Observem que hi ha caselles especials, com la 3 i la 6, que ens fan avançar diverses posicions, mentre que altres, com la 5, la 9 i la 12, ens condueixen directament a la presó. A més, és interessant notar que mai passarem per la casella 7.

A partir d'aquest moment podem començar a fer preguntes que ens ajudaran a l'anàlisi posterior:

- Quines seqüències de tirades ens porten directament a l'arribada? Quina és la més ràpida? I la més lenta?
- Quines seqüències de tirades ens porten directament a la presó? Quina és la més curta? I la més llarga?
- Què és més probable, acabar a l'arribada o a la presó? Quina creus que és la probabilitat d'acabar a l'arribada? I a la presó?
- Quina és l'esperança de guanys del joc?

Per respondre les tres primeres preguntes es pot construir, conjuntament amb l'alumnat, un diagrama d'arbre que en permeti analitzar totes les possibles jugades i la probabilitat de cadascuna.



Font: [Manual- La Caixa de Varga](#)

Autor: Tamás Varga

Com podem comprovar, només 5 de les 15 possibilitats ens porten a l'arribada, però no són equiprobables, perquè unes necessiten més tirades de dau que d'altres. Per calcular la probabilitat d'acabar a la casella d'arribada s'han de sumar les probabilitats dels diferents camins que ens hi porten.

$$P(\text{Arribada}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{Presó}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Aquí podem introduir el concepte d'esperança matemàtica, que es defineix com el valor esperat com a resultat d'un experiment aleatori que es repeteix un nombre elevat de vegades, i es calcula, en el cas d'una variable discreta, sumant els productes de tots els valors de la variable aleatòria per la seva probabilitat corresponent.

Així, si acabem a l'arribada, rebem 3 fitxes i, si acabem a la presó, n'hem de donar una per sortir:

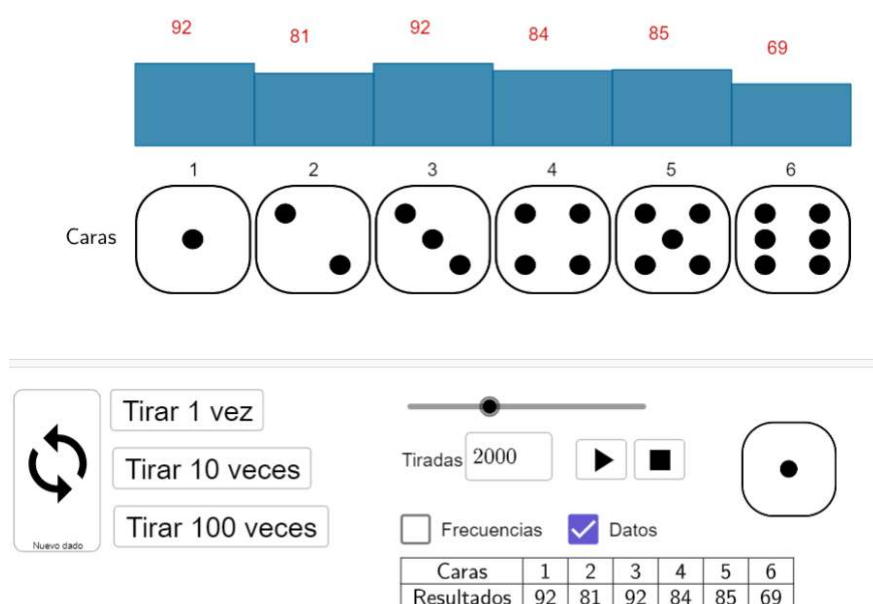
$$E(\text{Guanys}) = 3 \cdot \frac{1}{4} - 1 \cdot \frac{3}{4} = 0$$

A partir d'aquí es pot demanar a l'alumnat què passaria si fem petites modificacions del joc, sigui canviant el tipus de dau o bé el premi i la penalització per acabar a l'arribada o a la presó.

La llei dels grans nombres i el treball vinculat al **saber #2. EST.PI.F** ens serveix sobretot per a activitats experimentals en què ens és impossible calcular la probabilitat teòrica dels diferents esdeveniments. A 1r d'ESO, podeu trobar la proposta de l'activitat [Com cau una xinxeta?](#) d'Anton Aubanell o [Podem fer servir de dau una maquineta?](#) d'Enric Brasó.

Uns altres casos en què ens podria ser útil seria per calcular la probabilitat de les cares d'un dau carregat o bé d'un dau no regular. En aquests casos, necessitaríem molts daus idèntics per poder fer moltes tirades, cosa que de vegades pot ser complicat. Per una banda, els alumnes poden construir els daus carregats físicament amb cartolina posant un petit pes a l'interior d'una de les cares (per exemple enganxant amb cinta adhesiva una moneda o un clip).

També podem experimentar amb un dau carregat virtual com els que ens proposa José Luis Muñoz Casado a l'activitat [Dado cargado](#), en què els alumnes poden simular les tirades que desitgem d'un dau i han de decidir si està carregat o no. En la construcció es poden veure les freqüències absolutes i relatives de les tirades realitzades.



Font: [Dado cargado](#)

Autor: José Luis Muñoz Casado

Lligat amb el pensament computacional, bloc de sabers **#ALG.PC**, l'alumnat podria construir un dau virtual equiprobable per després passar a construir un dau carregat, utilitzant el llenguatge de programació desitjat. Per exemple, a l'[ScratchWiki](#) podem trobar un tutorial per crear un dau:

## How to Make Dice

This article will walk through **creating a simple die** with [Scratch](#). When finished a user should be able to press space and a random dice face should show on the screen. Start by creating a new [project](#) and delete the Scratch Cat [sprite](#).

### Contents [hide]

- 1 [Creating the Costumes](#)
- 2 [Coding the Dice](#)
  - 2.1 [Starting the Program](#)
  - 2.2 [Rolling the Dice](#)

Font: [How to Make Dice](#)

Una vegada creat el dau virtual equiprobable, cal pensar en com modifiquem el programa per aconseguir el dau virtual carregat desitjat.

Un bon recurs també de treballar la llei dels grans nombres i el saber **#2.EST.PI.F** és l'àbac probabilístic de Mari Carmen Garcia, una eina visual utilitzada que pot ajudar els estudiants a comprendre conceptes de probabilitat d'una manera intuïtiva i manipulativa. Aquest recurs es basa en l'ús d'un dispositiu similar a un àbac tradicional, però adaptat per representar situacions probabilístiques mitjançant fitxes de colors i laberints.

L'àbac probabilístic permet introduir les probabilitats compostes i experimentar amb situacions de probabilitat sense necessitat de fórmules matemàtiques complexes. L'alumnat pot moure les fitxes per veure com es modifica la probabilitat. Podeu veure el funcionament de l'àbac en aquest [enllaç](#). També podeu trobar [exemples de laberints](#) portats a terme per Raül Fernandez, que podeu fer servir a classe.

En el cas de la probabilitat, els jocs, i en particular els daus, han tingut un paper protagonista tal com ens explica Joan Jareño a l'activitat [Tirem els daus \(Part 1\)](#). Lligats amb el **saber #2.EST.PI.F**, també hi trobareu dos programes fets amb Scratch per simular un dau equiprobable i un dau carregat.

Una part important de l'aprenentatge de les matemàtiques és conèixer quina ha estat l'evolució històrica d'un tema concret, buscant informació sobre les diferents activitats que han fet avançar en el seu desenvolupament, és a dir tractar el **saber #2.EST.PI.G**.

Una de les opcions per visualitzar aquesta evolució dels coneixements de la probabilitat seria treballar a classe algun dels problemes històrics, com per exemple:

- **Problema del Cavaller de Méré**

Tal com expliquen Jesús Basulto Santos i José Antonio Camúñez Ruiz a l'article [El problema de los dados del caballero de Méré: soluciones publicadas en el siglo XVII](#) de la revista *Suma 56* (Basulto & Camúñez, 2007), el problema de cavaller de Méré es troba en una carta que Pascal va enviar a Fermat el 1654 on es posa de manifest que la pregunta li havia estat proposada per Antoine Gombaud, amic seu i jugador professional conegut com el Cavaller de Méré. Gràcies a la seva experiència, al joc Gombaud afirmava que si, per aconseguir almenys un 6 en tirar un dau, apostava quatre vegades, tenia un avantatge de 671 contra 625 de guanyar.

Tot i que Gerolamo Cardano ja treballa aquest problema en el capítol 11 del seu llibre *Liber de Ludo Alae* (Llibre de jocs d'atzar, 1564) no acaba de trobar el resultat. Serà més endavant Christiaan Huygens, que el 1655 s'assabenta de la correspondència entre Pascal i Fermat i acaba publicant el 1657 el tractat *De Ratiociniis in Ludo Aleae* (Calculant en jocs d'atzar).

Una vegada estudiada la situació, s'obté una relació recurrent  $e_{n+1} = \frac{5}{6}e_n + \frac{1}{6}$  on  $e_1 = \frac{1}{6}$  o cosa que és el mateix  $e_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$  i també equivalent a  $e_n = \frac{6^n - 5^n}{6^n}$  que ens dona la probabilitat de treure almenys un 6 després de  $n$  tirades. Així només ens cal buscar per quina  $n$  ens dona un valor superior a 0,5.

Huygens genera 3 funcions per poder veure en quin moment es produeix el canvi i confirmar les prediccions del cavaller de Méré:

Alternatives favorables al jugador que llança després de  $n$  tirades:  $f(n) = 6^n - 5^n$

Alternatives desfavorables al jugador que llança després de  $n$  tirades:  $h(n) = 5^n$

Alternatives totals:  $g(n) = 6^n$ .

Si fem una taula resum per a diferents valors per  $n$ :

| Tirades<br>$n$ | Alternatives totals<br>$g(n) = 6^n$ | Alternatives favorables<br>$f(n) = 6^n - 5^n$ | Alternatives desfavorables<br>$h(n) = 5^n$ |
|----------------|-------------------------------------|-----------------------------------------------|--------------------------------------------|
| 1              | 6                                   | 1                                             | 5                                          |
| 2              | 36                                  | 11                                            | 25                                         |
| 3              | 216                                 | 91                                            | 125                                        |
| 4              | 1296                                | 671                                           | 625                                        |

Es pot comprovar que, en el cas de 4 llançaments, el nombre de casos en què com a mínim apareix un 6 ja supera el que no n'aparegui cap i que confirma l'afirmació del cavaller de Méré.

Per tant,  $e_4 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} \approx 0,5177$  i, doncs, la probabilitat de guanyar és superior a la de perdre.

A classe es podria presentar el problema, experimentar amb el llançament consecutiu de daus fins que surti un 6, compartir el càlcul teòric i comprovar que la solució la podem treure ràpidament com la probabilitat complementària de no treure cap 6 després de 4 tirades.

Manuel Sada fa una proposta per resoldre aquesta qüestió amb el suport de GeoGebra [Un seis tras cuatro lanzamientos](#). També hi ha una segona part que es pot treballar en cursos posteriors en què el cavaller de Méré afirma que, en canvi, la probabilitat de treure un doble 6 en llançar dos daus és desfavorable després de 24 tirades. Manuel Sada també fa una proposta per resoldre aquesta qüestió amb el suport de GeoGebra titulada [Seis doble tras 24 intentos](#).

#### - Galileu i el problema del Gran Duc de la Toscana

«El duc de la Toscana va preguntar a Galileu: Per què quan es llancen tres daus s'obté més vegades la suma 10 que la suma 9 encara que totes dues es poden obtenir de 6 maneres diferents?».

Tot i que al seu llibre [Liber de Ludo Alae](#) (Llibre de jocs d'atzar - 1564), Gerolamo Cardano ja aborda les diferents maneres en què es poden obtenir les sumes de dos i tres daus, aquest llibre no es va publicar fins al 1663, quasi 100 anys després. I és Galileu qui, 50 anys després del plantejament del problema i sense conèixer l'obra de Cardano, aborda el problema que li planteja el Gran Duc de la Toscana. Galileu publica la solució al seu assaig breu tractat *Sopra le scoperte dei dadi* (Sobre els descobriments dels daus, escrit entre 1612 i 1623), tot i que el 1718, en una recopilació de les obres de Galileu, va ser publicat com a [Consideratione sopra il Giuoco dei Dadi](#).

La resposta queda aclarida quan es tenen en compte les reordenacions de les diferents maneres en què es pot obtenir la mateixa suma. Tot i que el 9 i el 10 es poden obtenir tots dos amb 6 combinacions de daus, aquestes combinacions no són equiprobables i, si tenim en compte les reordenacions dels daus, el 9 es pot aconseguir de 25 maneres diferents i, en canvi, el 10 de 27 maneres diferents.

|                                     |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-------------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Suma dels tres daus                 | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
| Maneres diferents d'obtenir la suma | 1  | 3  | 6  | 10 | 15 | 21 | 25 | 27 |
| Suma dels tres daus                 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |

En la taula següent, es pot comprovar com el 9 es pot obtenir de 25 maneres diferents i, en canvi, el 10, de 27 maneres diferents:

|           |                         |           |                         |
|-----------|-------------------------|-----------|-------------------------|
| Suma 9    | Reordenacions dels daus | Suma 10   | Reordenacions dels daus |
| 1 + 2 + 6 | 6                       | 1 + 3 + 6 | 6                       |
| 1 + 3 + 5 | 6                       | 1 + 4 + 5 | 6                       |

|           |    |           |    |
|-----------|----|-----------|----|
| 1 + 4 + 4 | 3  | 2 + 2 + 6 | 3  |
| 2 + 2 + 5 | 3  | 2 + 3 + 5 | 6  |
| 2 + 3 + 4 | 6  | 2 + 4 + 4 | 3  |
| 3 + 3 + 3 | 1  | 3 + 3 + 4 | 3  |
| Total     | 25 | Total     | 27 |

Així a classe es pot plantejar el problema, fer experimentació amb els 3 daus, analitzar quins grups de daus diferents ens donen suma de 9 o 10 i després analitzar quantes reordenacions podem fer de cadascun dels grups de daus per arribar a la resposta final.

Manuel Sada fa una proposta per resoldre aquesta qüestió amb el suport de GeoGebra titulada [Galileo y los tres dados](#).

## Blocs de competències: processos matemàtics i gestió socioemocional

El conjunt de sabers que constitueixen el sentit estocàstic, com tots els altres sentits, s'han de relacionar amb el conjunt de competències del currículum. Sense un coneixement dels sabers difícilment es poden desenvolupar els processos per avançar en l'assoliment de les competències i, d'altra banda, la manera com s'introdueixen, es construeixen i s'utilitzen els sabers és clau per fer un treball competencial.

Així doncs, tots els sabers poden contribuir a desenvolupar qualsevol competència si es treballen en activitats adequades. Igualment, un saber pot contribuir a desenvolupar diverses competències.

Es presenta la relació entre els sentits i les competències específiques a través dels processos: Resolució de problemes (competències específiques CE 1 i CE 2), Raonament i prova (competències específiques CE 3 i CE 4), Connexions, on distingim les internes (competència específica CE 5) i les externes (competència específica CE 6), Comunicació i representació (competència específica CE 7) i Gestió socioemocional (competències específiques CE 8 i CE 9).

Aquesta relació, pel que fa al sentit estocàstic, es concreta, en el marc d'aquest exemple, de la manera que es descriu en els apartats següents, tot i que hi pot haver altres anàlisis igualment vàlides.

### Resolució de problemes (CE 1 i CE 2)

La relació de l'estadística amb la resolució de problemes és fonamental, ja que permet transformar dades en informació comprensible, útil per a la presa de decisions tant en contextos de la vida quotidiana com en situacions matemàtiques. El procés d'interpretar i modelitzar problemes mitjançant dades requereix explorar diferents maneres d'actuar i raonar, buscant solucions que puguin ser validades matemàticament.

A través de l'estadística, es poden observar tendències, establir relacions entre variables i prendre decisions informades. En problemes reals, la construcció de taules de freqüències o la representació gràfica de dades ajuden a sintetitzar informació de manera clara, saber essencial a 2n d'ESO, **saber #2.EST.IN.D**. També es fan

servir aquestes eines en matemàtiques per treballar amb distribucions de dades o fer inferències.

El procés de validació de solucions implica avaluar els resultats obtinguts amb tècniques estadístiques per verificar-ne la fiabilitat i rellevància, tenint en compte el context global del problema. Aquesta validació pot incloure la comparació amb altres solucions possibles o l'avaluació de l'impacte de les decisions preses.

Amb eines com fulls de càlcul o programari estadístic, aquests processos es poden automatitzar, cosa que facilita el tractament de grans volums de dades i la seva anàlisi visual i numèrica, **saber #2.EST.IN.E.**

Per altra banda, a través de la probabilitat podem resoldre tota mena de situacions, sigui de manera experimental o teòrica, **saber #2.EST.PI.A.** L'ús de les eines digitals, tant per representar, calcular com per simular, ens facilitaran arribar a la resolució d'aquests problemes.

## Sabers

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar la resolució de problemes són, entre altres:

- La confecció de taules de freqüència, **saber #2.EST.IN.D.**, com a eina fonamental per organitzar, resumir i analitzar dades d'una manera estructurada. Aquestes taules ajuden a identificar patrons o tendències en un conjunt de dades i faciliten la presa de decisions, CE 2.
- L'elaboració de gràfics, **saber #2.EST.DI.E.**, la representació d'un conjunt de dades donades amb gràfics estadístics (gràfics de punts, de barres i de sectors, pictogrames...) manualment o fent servir eines de tractament de dades, desenvolupa la capacitat d'elaborar representacions matemàtiques eficaces per a la resolució de problemes i situacions de la vida quotidiana i s'alinea amb CE 1.
- El càlcul i la interpretació dels paràmetres de dispersió bàsics, **saber #2.EST.DI.I.**, ja que proporcionen informació clau sobre com es distribueixen les dades al voltant d'un valor central. Aquest coneixement és essencial per a l'anàlisi i la interpretació de les dades, especialment en situacions en què la variabilitat pot influir en les decisions o les conclusions i, per tant, desenvolupa la CE 2.
- El **saber #2.EST.IN.A** (Disseny d'investigacions i enquestes per donar resposta a una pregunta, repte científic o situació quotidiana), que és essencial tant en el desenvolupament de la CE 1 com CE 2.
- El càlcul de probabilitats tenint en compte el concepte de proporcionalitat, tant en esdeveniments senzills com compostos, ens permet resoldre diferents situacions i problemes, **saber #2.EST.PI.C.** La utilització de diagrames d'arbre o taules de contingència per representar totes les opcions, **saber #2.EST.PI.D.**, ens ajuden a trobar les diferents solucions.
- Per altra banda, la resolució a classe de jocs i de problemes clàssics ens permet veure i analitzar com va anar evolucionant històricament la teoria de la probabilitat, **saber #2.EST.PI.G**

## Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers fan referència directa al procés de resolució de

problemes. Per exemple:

- L'activitat proposada per l'Institut Moisès Broggi, [Es poden mesurar els idiomes?](#), l'activitat de l'NRICH [Substitution Cipher](#). i les activitats [lletres, paraules i frases...](#) del CESIRE, totes referenciades al **saber #2.EST.DI.D**, resolen el tipus de llengua d'un text a través de l'anàlisi de freqüències.
- El problema de l'entrenador de bàsquet esmentat al **saber #2.EST.DI.I**, especialment indicat per expressar amb coherència raonaments que permetin justificar la validesa de les solucions.
- [Slow reveal graphs](#) és una eina excel·lent per contribuir al desenvolupament de les competències CE 1 i CE 2.
- L'activitat proposada per Anna Ausina [L'atzar de Joan Brossa](#), que podeu trobar al **saber #2.EST.IN.A**, permet generar preguntes a partir d'arguments matemàtics per plantejar reptes.
- La resolució de l'activitat [Intuïció i probabilitat: el joc de la canyeta més curta](#) i [La Paradoxa de Monty Hall. Canvies o no canvies?](#) del **saber #2.EST.PI.A** ens demana raonar i argumentar com podem obtenir la solució teòrica, que inicialment pot semblar antiintuïtiva.
- La construcció del diagrama d'arbre per veure totes les opcions i calcular la probabilitat d'arribar a la meta o acabar a la presó del [Joc de l'escala](#) del **saber #2.EST.PI.D**.
- La publicació de la resolució dels problemes clàssics del **Problema del cavaller de Méré** i **Galileu i el problema del Gran Duc de la Toscana** ens permeten copsar el camí complex i llarg que va anar fent el desenvolupament de la teoria de la probabilitat que ara coneixem i que ens ajuda a resoldre'ls actualment d'una forma ràpida i elegant.

## Raonament i prova (CE 3 i CE 4)

L'estocàstica, que implica l'estudi de fenòmens aleatoris i la probabilitat, té una relació estreta amb la formulació i la comprovació de conjetures a través de diverses eines i mètodes. L'ús de materials com cartes, daus o altres i el programari estadístic o simuladors estocàstics permeten automatitzar i modelitzar experiments i fer prediccions i anàlisis sobre el comportament de les dades. A partir de l'observació de resultats repetits d'un experiment estocàstic, els estudiants poden formular conjetures i prediccions sobre els patrons que segueixen les dades o els comportaments probables d'un esdeveniment aleatori.

### Sabers

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar el raonament són, entre altres:

- Utilització i interpretació de dades i gràfics estadístics i valoració de la idoneïtat de cada tipus de representació, **saber #2.EST.DI.F**, permet desenvolupar la capacitat d'argumentació CE3.
- La interpretació de dades i obtenció de conclusions, **saber #2.EST.IN.F**, planteja la necessitat de fer un raonament que justifiqui el resultat obtingut i, per tant, permet el desenvolupament de la CE 3.
- La competència CE 4 està molt vinculada al bloc de pensament computacional del **saber #2.EST.PI.B**, tot i que aquest bloc també està fortament relacionat amb el raonament lògic i la competència CE 3.

- La predicció i l'anàlisi dels resultats d'un experiment aleatori a partir de la informació obtinguda de manera empírica o teòrica del **saber #2.EST.PI.A** està lligada al treball de la C3.
- La utilització de recursos digitals (fulls de càlcul, calculadores, GeoGebra...) per a la simulació i el càlcul de probabilitats del **saber #2.EST.PI.B** està lligada al bloc de pensament computacional i ens permet treballar la CE4.
- L'anàlisi del joc de Monty [La Paradoxa de Monty Hall. Canvies o no canvies?](#) i del [Joc de l'escala](#) estan directament lligades a la capacitat de raonament de l'alumnat per trobar la solució que de vegades pot ser antiintuitiva.

## Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers fan referència directa al procés de raonament i prova. Per exemple:

- Podem raonar sobre la intencionalitat de les males representacions gràfiques en les referències que apareixen al **saber #2.EST.DI.F**, en la campanya del CREAMAT [errors als mitjans](#) i [malaprensa](#). (CE 3)
- El conjunt d'activitats del **saber #2.EST.IN.F** com [Testing a new product](#) i les dues activitats esmentades a [Levels of Reasoning of Middle School Students about Data Dispersion in Risk Contexts](#) d'Ernesto Sánchez i Antonio Orta, unes activitats en què cal llegir més enllà de les dades per prendre decisions de manera raonada en contextos propers i reals de l'alumnat (CE 3)
- Les tasques [Treballem la probabilitat amb la micro:bit](#) o els materials del curs de formació [Programem matemàtiques amb Snap!](#), **saber #2.EST.PI.B**, en ser un conjunt de materials creats per desenvolupar habilitats de pensament computacional, fomentant la creativitat i la resolució de problemes, s'ajusten perfectament al procés de raonament i a les competències corresponents (CE3 o CE4)
- Les tasques [La paradoxa de Monty Hall. Canvies o no canvies?](#) i del [Joc de l'escala](#) ens permeten posar en joc la capacitat de raonament i treballar la CE3.

## Connexions amb altres parts de la matemàtica (CE 5)

Les connexions internes entre estocàstica i la resta de sentits matemàtics en especial, amb el sentit espacial, l'àlgebra i el sentit de la mesura formen un teixit ric que permet als estudiants abordar problemes des de diferents perspectives i aplicar conceptes de manera integrada. Aquesta xarxa de relacions afavoreix un aprenentatge més profund i significatiu, cosa que permet consolidar les habilitats matemàtiques en diversos camps.

Una especial consideració a 2n d'ESO és el **saber #2.EST.PI.B**: la utilització de recursos digitals (fulls de càlcul, calculadores, GeoGebra...) per a la simulació i el càlcul de probabilitats obre la porta al pensament computacional, el qual proporciona les eines per descompondre problemes complexos, crear algorismes per simular-los; i analitzar els resultats i els processos estocàstics ofereix un context ric en què aquestes

habilitats es poden aplicar. Aquesta combinació és essencial en camps com la ciència de dades, la simulació i la investigació científica.

## Sabers

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar les connexions internes són, entre altres:

- El **saber #2.EST.DI.E**, és a dir la representació d'un conjunt de dades donades amb gràfics estadístics.
- L'elecció de mostres significatives d'una població a fi de realitzar un estudi estadístic, **saber #2.EST.IN.C**, en les quals es treballa amb volums o àrees.
- La utilització de recursos digitals (fulls de càlcul, calculadores, GeoGebra...) per a la simulació i el càlcul de probabilitats, **saber #2.EST.PI.B**, connecten directament amb els coneixements algebraics.
- Per altra banda, la vinculació entre el concepte de proporcionalitat i el càlcul de probabilitats, **saber #2.EST.PI.C**, així com el càlcul de probabilitats de la composició d'esdeveniments equiprobables, **saber #2.EST.PI.E**, tenen relació directa amb els sabers del bloc de numeració i mesura.

## Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers aporten o fan servir connexions internes. Per exemple:

- Les activitats de l'arc [Estadística amb excel 1](#) i [Estadística amb excel 2](#) de Sergio Gracia ens proposen treballar amb els fulls de càlcul per generar simulacions i experiments probabilístics, cosa que connecta el **saber #2.EST.DI.E** amb la llei dels grans nombres **saber #2.EST.PI.F** i **saber #ALG.PC.E**.
- Les activitats esmentades en el **saber #2.EST.IN.C** de [Mathematics Assessment Project: How Many Jellybeans?](#) i [Counting trees](#) tenen connexions amb el sentit de la mesura i el sentit espacial.
- Les tasques [Treballem la probabilitat amb la micro:bit](#) o els materials del curs de formació [Programem matemàtiques amb Snap!](#), **saber #2.EST.PI.B**, en ser un conjunt de materials creats per desenvolupar habilitats de pensament computacional amb connexions amb el **bloc de sabers #ALG.PC**.

## Connexions amb altres matèries i amb l'entorn (CE 6)

El context és essencial en l'estocàstica perquè proporciona el marc necessari per interpretar resultats, dissenyar models, comprendre la variabilitat i prendre decisions informades. El context assegura que els processos estocàstics tinguin sentit en la realitat concreta en què s'apliquen per tal de permetre que els models siguin més precisos, útils i aplicables. Sense el context adequat, les anàlisis i les conclusions poden ser errònies o no tenir cap valor pràctic.

## Sabers

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar les connexions externes són, entre altres:

- L'anàlisi de gràfics **saber #2.EST.DI.A** i **saber #2.EST.DI.E** permet connectar les matemàtiques amb nombroses àrees del coneixement: altres ciències, actualitat, tecnologia... i, per tant, implica la construcció de models matemàtics per estudiar fenòmens naturals i socials. Per tant, reforcen la CE 6.
- El disseny d'investigacions i enquestes, **saber #2.EST.IN.A**, per resoldre un problema, necessitat o repte expliciten la importància del context extern, reforçant també la CE 6. Cal destacar que, a 2n d'ESO els contextos haurien de ser més complexos que a 1r.
- La valoració dels jocs d'atzar en l'evolució i el desenvolupament de la teoria de la probabilitat, **saber #2.EST.PI.G**, vinculat a valorar l'aportació actual i històrica de les matemàtiques al progrés de la humanitat.

## Recursos

Molts dels recursos descrits per treballar diferents sabers del sentit estocàstic ofereixen oportunitats per fer connexions externes. Per exemple:

- L'anàlisi de gràfics del web del *New York Times* [what's going on the graph](#), que permet analitzar l'impacte de les dades científiques, tecnològiques, socials, artístiques i culturals de les notícies d'actualitat dels darrers 6 anys i, per tant, desenvolupar el pensament crític de l'alumnat.
- [Estadístiques als diaris](#) de Sergio Gracia, la qual pretén que l'alumnat es familiaritzi amb els gràfics estadístics que es poden trobar als diaris i que tracten temes generals com ara l'augment de preus, els nombre de turistes o de naixements, etc.
- [Who speaks more](#), una activitat basada en l'[anàlisi estadística més gran sobre els diàlegs de les pel·lícules de Disney](#), que ens permet fer una anàlisi matemàtica des d'una perspectiva de gènere.
- [El problema dels residus](#) de Xavier Gelada Serrat, esmentat al **saber #2.EST.IN.A**, on es pot treballar estadística amb un problema real com és la gestió de residus.
- L'activitat esmentada al **saber #2.EST.DI.C**, [Mesurant les il·lusions òptiques](#) de Joan Jareño, amb connexions amb el sentit de la mesura.
- Problema del Cavaller de Méré i Galileu i el problema del Gran Duc de la Toscana esmentats al **saber #2.EST.PI.I**, per identificar i valorar l'aportació històrica de les matemàtiques al progrés de la humanitat.

## Comunicació i representació (CE 7)

La connexió entre l'estocàstica i la competència 7 és més que evident, ja que l'estocàstica sovint requereix una comunicació clara i precisa per explicar fenòmens incerts, interpretar dades i transmetre la variabilitat

inherent als processos aleatoris.

Un dels elements més importants de l'estocàstica és la representació de dades mitjançant gràfics estadístics (histogrames, diagrames de barres, gràfics de sectors, etc.) i la visualització de distribucions de probabilitat. Aquesta representació visual ajuda a comunicar patrons de variabilitat i tendències dins de les dades de manera intuïtiva i efectiva.

Cal posar especial atenció a treballar a classe que l'alumnat sigui capaç d'utilitzar la terminologia i el vocabulari adequat, tant en la comunicació escrita (resolució de problemes, informes, etc.) com en la comunicació oral (presentacions, discussions en grup); hi tindrà, per tant, un paper fonamental discutir en grups les conclusions basades en dades recollides en experiments o sondatges, reflexionar sobre les variacions i comunicar els resultats i debatre i validar hipòtesis a partir de les dades estadístiques o probabilístiques, per tal que l'alumnat pugui desenvolupar habilitats de comunicació crítica i la capacitat de defensar o reformular els seus punts de vista.

## Sabers

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar la comunicació i la representació són, entre altres:

- El **saber #2.EST.DI.A** per tal de visualitzar a través de gràfics un conjunt de dades i justificar conclusions.
- La utilització i la interpretació de dades i gràfics estadístics i la valoració de la idoneïtat de cada tipus de representació, **saber #2.EST.DI.F**, que promou dialogar entre iguals per descriure i explicar idees matemàtiques.
- L'elaboració d'un informe on s'explica la metodologia emprada en l'estudi estadístic i on es mostren els resultats, **saber #2.EST.IN.E**.
- El treball amb diferents tipus de representacions com taules de contingència o diagrames d'arbre a l'hora de resoldre problemes de probabilitat, **saber #2.EST.PI.D**.

## Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers del sentit estocàstic fan referència al procés de comunicació i representació. Per exemple:

- El recurs [Societat Catalana d'Estadística](#) del [Concurs Data Storytelling](#), que reconeix els millors tuits estadístics amb representació visual.
- Analitzar els gràfics de la campanya de CREAMAT [errors als mitjans](#) i l'enllaç de [malaprensa](#), tots dos esmentats al **saber #2.EST.DI.F**, que permet justificar i raonar els errors, alguns intencionats, d'una representació gràfica.
- L'activitat del grup Vilatzara [Una gran Epidèmia](#), esmentada al **saber #2.EST.IN.E**, per comunicar la informació i les conclusions d'un estudi de dades.

- El [Joc de l'escala](#) del [Manual de la Caixa de Varga](#) esmentat al **saber #2.EST.PI.D**, en què es desenvolupen diferents formes d'expressió per fer el càlcul de probabilitats.

## **Gestió socioemocional (CE 8 i CE 9)**

El procés d'aprenentatge de l'estadística, i especialment el càlcul de probabilitats, requereix un conjunt d'habilitats i actituds clau que no només impliquen el domini dels conceptes teòrics, sinó també la perseverança, la consciència del mateix aprenentatge i la capacitat de reconèixer i corregir errors.

L'estudi de l'estadística i el càlcul de probabilitats sovint implica processos que poden ser laboriosos. És fonamental que els alumnes desenvolupin la perseverança necessària per completar aquests estudis amb èxit, ja que els resultats poden no ser immediats, concretament, la llei dels grans nombres permet que la probabilitat observada s'acosti a la probabilitat teòrica amb el temps. Això ensenya els alumnes a persistir i no rendir-se després de pocs intents experimentals.

Per altra banda, la consciència del mateix aprenentatge o metacognició ajuda a identificar els nous conceptes que s'estan adquirint; cal fomentar la discussió raonada tant a l'hora de dissenyar un estudi estadístic o probabilístic com a l'hora de comunicar les conclusions extretes. A través de la discussió col·lectiva, es pren consciència de les diverses maneres d'abordar els problemes i s'identifiquen quins conceptes s'han aplicat correctament.

Finalment, cal potenciar l'autoavaluació, una habilitat essencial per a l'aprenentatge autònom i reflexiu, especialment en estadística, en què la interpretació i la comprensió de dades poden ser subjectes a errors o malentesos. Podem animar-los a reflexionar sobre el procés d'un estudi estadístic:

- Era clar el que volia investigar? Quins eren els objectius del meu estudi estadístic?
- Les dades que he recollit eren suficients per respondre les preguntes de recerca? He utilitzat una mostra adequada per al problema que volia estudiar?
- La metodologia estadística que vaig triar (mitjanes, mediana, probabilitats, etc.) era la correcta per a les dades i l'objectiu de l'estudi?

L'autoavaluació d'un estudi estadístic no només permet als alumnes reflexionar sobre el seu rendiment i corregir errors, sinó que també fomenta una actitud de responsabilitat personal i millora contínua, fomentant la CE 8.

Pel que fa a la competència 9 cal assenyalar que la probabilitat o l'estadística, sovint requereix col·laboració i intercanvi d'idees en grups. El treball en equip és clau en activitats en què els alumnes recullen dades, fan càlculs, interpreten resultats o resolen problemes de probabilitat junts.

La gestió socioemocional està vinculada a dues competències específiques:

- CE 8, relacionada amb el desenvolupament d'habilitats personals com les creences, les actituds i les emocions envers les matemàtiques.
- CE 9, centrada en el desenvolupament d'habilitats socials com el treball en equip i la presa de decisions.

A continuació s'indiquen alguns aspectes que, treballats des del sentit estocàstic, poden contribuir al desenvolupament de les competències CE 8 i CE 9.

### **Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 8**

- El **saber #2.EST.PI.B** amb connexions amb **#ALG.PC** i el bloc de pensament computacional està estretament vinculat a la gestió socioemocional, i posa èmfasi en valors com l'autoconfiança, la persistència, l'adaptabilitat, la flexibilitat, la creativitat, la col·laboració i la gestió constructiva de l'error. Aquesta idea és plenament aplicable més enllà de l'àmbit del pensament computacional.
- El potencial històric de l'estadística pot ajudar els alumnes a entendre la seva rellevància en la vida quotidiana i en la societat. En aquest nivell, coincidint amb el treball que s'està portant a terme a l'àmbit de socials, d'història en l'edat mitjana, pot resultar convenient parlar del paper de les dades en el comerç de les espècies durant els segles <sup>xvi</sup> i <sup>xvii</sup>, en què els comerciants usaven dades de demanda i oferta per prendre decisions estratègiques sobre rutes comercials.
- És molt beneficiós que l'alumnat prengui consciència dels avenços que fa en l'aprenentatge de l'estadística i la probabilitat, ja que aquest procés no només reforça la seva confiança en les seves capacitats, sinó que també li permet valorar la bellesa i la utilitat de les matemàtiques. Quan els estudiants reconeixen el seu progrés poden veure que aquestes eines matemàtiques no només els ajuden a resoldre problemes, sinó que també tenen aplicacions pràctiques en la seva vida quotidiana i en el món que els envolta.
- Un recurs per fomentar la utilitat de les matemàtiques i, concretament, de la probabilitat el trobem a [Matemàtiques en acció](#), al vídeo de Miquel Roig, del Banc de Sabadell, que parla d'«Economia, riscos i probabilitat».

### **Alguns aspectes que contribueixen al desenvolupament de la competència CE 9**

L'estocàstica ofereix grans oportunitats per treballar en equip, i promou actituds positives, implicació en la presa de decisions i respecte per les aportacions dels altres, per superar qualsevol idea limitant sobre les habilitats pròpies o alienes en matemàtiques. A continuació, es destaquen quatre activitats concretes en aquest àmbit:

- El conjunt d'activitats de [Mathematics Assessment Project](#) esmentades al **saber #2.EST.IN.C** i al **saber #2.EST.IN.F**, de la Universitat de Califòrnia a Berkeley i el *Shell Center* de la Universitat de Nottingham, on es desenvolupen les competències vinculades a la resolució de problemes amb un interessant procediment de treball en grup.
- Les activitats matemàtiques vinculades al pensament computacional ofereixen excel·lents oportunitats per fomentar el treball en equip i la col·laboració, en concret, les activitats [mòdul 2: Probabilitat i Simulació](#) del Programem matemàtiques amb Snap! i [Treballem la probabilitat amb la micro:bit.](#), totes dues referenciades al **saber #2.EST.PI.B**.
- El conjunt de jocs de [la Caixa de Varga](#) esmentades al **saber #2.EST.PI.E**, que permet als alumnes compartir idees i coneixements, la qual cosa enriqueix l'aprenentatge de tots els membres del grup.

