

TOR 2n d'ESO: Sentit espacial

Consideracions generals.....	1
Blocs de sabers.....	1
Formes geomètriques de dues i tres dimensions.....	1
Sabers.....	1
Descripció i orientacions.....	2
Reflexions inicials.....	2
Comentaris sobre les connexions.....	2
Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació.....	2
Observacions sobre alguns sabers específics.....	3
Recursos i activitats.....	3
Recursos i activitats generals per al bloc de sabers.....	3
Recursos i activitats per treballar sabers concrets.....	4
Localització i sistemes de representació.....	20
Sabers.....	20
Descripció i orientacions.....	20
Reflexions inicials.....	20
Comentaris sobre les connexions.....	21
Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació.....	21
Recursos i activitats.....	21
Recursos i activitats per treballar sabers concrets.....	21
Visualització i modelització geomètrica.....	22
Sabers.....	22
Descripció i orientacions.....	23
Reflexions inicials.....	23
Comentaris sobre les connexions.....	23
Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació.....	23
Observacions sobre alguns sabers específics.....	24
Recursos i activitats.....	24
Recursos i activitats per treballar sabers concrets.....	24
Blocs de competències: processos matemàtics i gestió socioemocional.....	27
Resolució de problemes (CE 1 i CE 2).....	27
Sabers.....	27
Recursos.....	27
Raonament i prova (CE 3 i CE 4).....	28
Sabers.....	28
Recursos.....	28
Connexions amb altres parts de la matemàtica (CE 5).....	29
Sabers.....	29
Recursos.....	29
Connexions amb altres matèries i amb l'entorn (CE 6).....	29
Sabers.....	30



Recursos.....	30
Comunicació i representació (CE 7).....	30
Sabers.....	30
Recursos.....	31
Gestió socioemocional (CE 8 i CE 9).....	31
Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 8.....	31
Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 9.....	32

Consideracions generals

La geometria ens ajuda a interpretar el món que ens envolta. El seu estudi i el desenvolupament del sentit espacial és un objectiu en si mateix, però alhora ajuda a comprendre i a desenvolupar la resta de sentits i a consolidar els coneixements propis d'altres branques de les matemàtiques. A més, la geometria pot condicionar o ajudar a la recerca de la solució de problemes propis d'altres disciplines. Per tots aquests motius, cal parlar especial atenció a l'estudi de la geometria, i la geometrització de l'educació matemàtica hauria de ser habitual a les aules de secundària.

A grans trets, el desenvolupament del sentit espacial al llarg de l'educació secundària comença donant un pes molt important a l'estudi de figures geomètriques de dues i tres dimensions, formalitzant i aprofundint en un treball ja iniciat a l'educació primària, i acaba de manera més abstracta treballant els sistemes de representació i la geometria analítica, tot passant per l'estudi dels moviments i les transformacions geomètriques elementals. Al llarg de tot el període, a més, cal parlar especial atenció a la visualització i modelització geomètrica, no només durant l'estudi de la geometria, sinó especialment durant el treball en les altres branques de les matemàtiques. Aquesta geometrització dels altres sentits servirà, d'una banda, per consolidar l'aprenentatge dels continguts que s'estiguin treballant en aquell moment i, de l'altra, per aconseguir una base geomètrica més sòlida.

Al llarg de tot el treball fet entorn del sentit espacial s'ha volgut donar continuïtat a les línies de treball que promou el document [Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria](#) (Aubanell, 2015).

Un espai que pot servir de suport en l'aprenentatge de les matemàtiques en general i del sentit espacial en particular és el Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA) que, en totes les exposicions que organitza pel territori, inclou mòduls que ajuden a l'assoliment dels sabers tractats al llarg de l'etapa. Alguns dels mòduls que estan relacionats amb els sabers proposats en el sentit espacial a 2n d'ESO són: [Balances pitagòriques](#), [La paradoxa del quadrat](#), [el Polydron](#), [Calidoscòpis polièdrics](#) o [Mirallet, mirallet](#), entre d'altres.

En el segon curs de l'educació secundària obligatòria, el sentit espacial pren una importància rellevant. Durant el curs anterior s'han revisat alguns sabers que l'alumnat ja coneixia des de l'educació primària i s'han treballat alguns sabers nous, però sobretot s'ha començat a introduir un grau més alt de formalització. En aquest segon curs es continua augmentant aquesta formalització i apareixen sabers nous i importants, que caldrà treballar amb profunditat per assegurar-ne una bona comprensió i aplicació. S'introdueixen els teoremes de Tales i de Pitàgores que, no es pot oblidar, són la base de gran part de la geometria que l'alumnat veurà en els estudis posteriors.

Durant aquest curs també es comença el treball amb coordenades cartesianes com a eina fonamental per a la introducció de les funcions (vegeu el sentit algebraic). En canvi, en aquest curs no es tractarà el bloc Moviments i transformacions, ja que aquest es reserva totalment per treballar-lo a tercer. Finalment, igual que a primer, el bloc Visualització i modelització geomètrica promou una visió geometritzada de la resta de sabers del currículum i d'altres àrees de coneixement.

Blocs de sabers

Formes geomètriques de dues i tres dimensions

Sabers

- A. Reconeixement i estudi de figures semblants al pla i a l'espai. Raó de semblança.

- B. Comprensió i aplicació del teorema de Tales en diferents contextos. Posició de Tales. [ESS] #NUM.QU, #NUM.RP, #MES.ME, #ALG.MM, #ALG.RF
- C. Descoberta, conceptualització i demostració geomètrica del teorema de Pitàgores. [ESS] #MES.ME, #ESP.VM
- D. Resolució de problemes que impliquin el teorema de Pitàgores. #MES.ME
- E. Estudi de les propietats i els elements de cossos geomètrics. Classificació de poliedres i cossos rodons. [ESS]
- F. Estudi i visualització de cossos geomètrics a través dels seus desenvolupaments plans. #MES.ME

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

L'estudi de les figures geomètriques de dues i tres dimensions continua, i augmenta el seu pes específic, a segon d'ESO, de manera que es converteix en un dels grans blocs del curs. D'una banda, l'estudi i la classificació d'objectes fa el salt de les dues a les tres dimensions, i aprofundeix així un treball ja iniciat a primària entorn dels poliedres i alguns cossos rodons. D'altra banda, no s'abandonen les figures planes sinó que s'hi aprofundeix amb la introducció dels teoremes de Tales i de Pitàgores.

Aquest bloc pot servir per treballar en grup la descoberta de propietats d'algunes figures geomètriques com podrien ser el mateix teorema de Pitàgores o la característica d'Euler per a poliedres.

Comentaris sobre les connexions

El bloc de formes geomètriques està estretament connectat al sentit de la mesura (#MES.ME), ja que el càlcul de longituds, àrees i volums forma part del treball amb figures geomètriques, siguin planes o tridimensionals. El mateix passa amb els teoremes de Tales i de Pitàgores, en què el sentit espacial i el de la mesura van de bracet i les activitats i recursos proposats es poden vincular als dos sentits amb els matisos pertinents.

L'àlgebra (#ALG.MM i #ALG.RF) i la numeració (#NUM.QU i #NUM.RP) també tenen representació en aquest bloc, ja que, conjuntament amb la geometria, són les tres potes sobre les quals es recolza la proporcionalitat geomètrica. L'últim enllaç d'aquest bloc és intern del sentit espacial (#ESP.VM). És difícil deslligar les formes geomètriques de la visualització, però en especial es considera que el teorema de Pitàgores s'ha d'abordar des del seu significat genuí, i per poder fer-ho, és necessari fer-ne una visualització geomètrica.

Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

En aquest bloc, els sabers que s'han destacat estan relacionats amb el teorema de Tales i el teorema de Pitàgores, per la rellevància que tenen aquests teoremes i pel pes que tindran, a partir de la seva introducció, en el treball i l'estudi de les matemàtiques. En referència al teorema de Tales, s'ha destacat el **saber #2.ESP.FG.B**, però s'entén que per poder treballar-lo correctament, el **saber #2.ESP.FG.A** és igualment necessari. Pel que fa al teorema de Pitàgores, malgrat que els dos sabers relacionats es consideren importants, s'ha volgut destacar la descoberta, la conceptualització i la demostració geomètrica per davant de la resolució de problemes per dos motius: el primer és que es considera molt important transmetre que el teorema de Pitàgores és una propietat associada a la geometria i no a l'àritmètica, i el segon és que es considera que una gran part del professorat ja incorpora en la seva actuació docent la resolució de problemes que requereixin el teorema de Pitàgores quan el treballen. Aquest treball de resolució de problemes en què habitualment es demana buscar longituds desconegudes també s'ha abordat des del sentit de la mesura #MES.ME.

A banda dels dos teoremes ja esmentats, el tercer saber que s'ha destacat és la classificació i l'estudi de les propietats dels cossos geomètrics. Es tanca, així, una línia iniciada a primer d'ESO amb l'estudi de figures de dues dimensions.

Observacions sobre alguns sabers específics

Els sabers d'aquest bloc es poden agrupar en tres grups: per una banda, els **sabers #2.ESP.FG.A i #2.ESP.FG.B**, que serien els que fan referència al teorema de Tales; per altra banda, els **sabers #2.ESP.FG.C i #2.ESP.FG.D**, que estan relacionats amb el teorema de Pitàgores, i finalment, els **sabers #2.ESP.FG.E i #2.ESP.FG.F**, que recullen l'estudi de cossos geomètrics.

El **saber #2.ESP.FG.A** pretén que l'alumnat sigui capaç d'identificar i de generar figures semblants. Conèixer que dues figures són semblants si es mantenen els angles i els costats homòlegs són tots proporcionals serà necessari per poder resoldre els problemes de cerca de la raó de proporcionalitat dels costats, de les àrees o dels volums de les figures i problemes d'escala, entre d'altres (**saber #2.ESP.FG.B**).

Tal com ja s'ha comentat anteriorment, es considera que s'ha de treballar a consciència el **saber #2.ESP.FG.C** per poder transmetre a l'alumnat el significat real del teorema de Pitàgores. Si s'aconsegueix transmetre la idea que el teorema de Pitàgores és una propietat geomètrica i es visualitza, es farà un pas endavant per evitar que el teorema quedi amagat darrere una fórmula. D'aquesta manera, es potencia no només la comprensió, sinó també la capacitat de reconèixer les situacions en què s'ha d'utilitzar per al càlcul de determinades mesures o per a la solució de problemes com els que es poden plantejar al **saber #2.ESP.FG.D**.

Per acabar, a l'estudi de cossos geomètrics plantejat en el **saber #2.ESP.FG.E** es pretén definir els elements d'un poliedre (cares, arestes, vèrtexs, diagonals, angles...), classificar-los seguint diferents criteris (nombre de cares, regularitat, concavitat-convexitat...), estudiar les característiques d'alguns poliedres amb nom propi (sòlids platònics, prismes, piràmides, antiprismes, bipiràmides...), descobrir la característica d'Euler per a poliedres, identificar cossos rodons i estudiar les característiques d'alguns cossos de revolució amb nom propi (cilindre, con i esfera). Tot aquest estudi desembocarà en la necessitat de calcular àrees i volums de poliedres, i aquí és on entrarà en joc el **saber #2.ESP.FG.F**.

Recursos i activitats

Recursos i activitats generals per al bloc de sabers

Per tal de treballar tot el bloc de sabers de manera general, tot i que podem trobar recursos per treballar el sentit espacial a gairebé totes les campanyes del CREAMAT, en destaquem dues per la gran quantitat de propostes que hi podem trobar. D'una banda, tenim la campanya [Impulsem la geometria](#), que es va publicar al web del CREAMAT durant el curs 2012-2013 amb l'objectiu de dinamitzar aquest bloc del currículum i que des d'aleshores ha anat augmentant el nombre recursos disponibles. D'altra banda, la segona campanya que cal destacar és la de [Laboratori de matemàtiques](#), on podem trobar activitats amb *pattern blocks*, *multilink*, geoplans, tangrams... materials que, portats a l'aula amb bones propostes, poden facilitar l'aprenentatge de la geometria. Recordem que el material per si sol no fa res, és el material més una bona activitat que l'acompanyi el que el convertirà en un bon recurs.

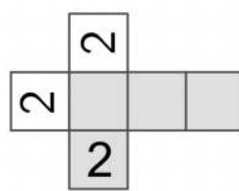
També volem destacar l'apartat de geometria del [Polypad](#), amb moltes eines que permeten explorar i investigar de manera molt intuïtiva.

Encara que ja s'hagi citat anteriorment, val la pena tornar a recordar el document [Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria](#) (Aubanell, 2015), on trobem orientacions i molts exemples d'activitats per treballar el sentit espacial.

I ja per acabar, anomenarem la [Prova Cangur](#), que pot ser una font inesgotable de recursos i idees per treballar molts dels sabers del sentit espacial al llarg de tota l'etapa. Per exemple, per a 2n d'ESO podem trobar-hi propostes com les que es mostren a les imatges següents:

2. La Rosa té un paper retallat com en la figura de la dreta, que es pot plegar formant un cub. Quin dels cinc cubs següents es pot obtenir amb el desplegable de la Rosa?

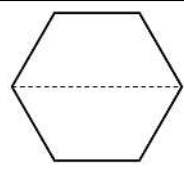
A)  B)  C)  D)  E) 



Font: Prova Cangur de 2n d'ESO de 2023

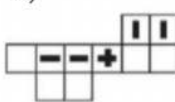
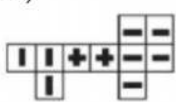
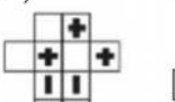
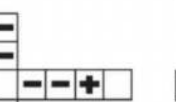
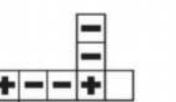
28. Un hexàgon regular es pot dividir de moltes formes, de manera que totes les peces resultants siguin iguals. Per exemple, en la figura el teniu dividit amb dos trapezis iguals. De quina de les maneres següents no es pot dividir un hexàgon regular?

A) 6 triangles equilàters iguals B) 3 rombes iguals C) 4 trapezis iguals
D) 12 rombes iguals E) 6 rombes iguals



Font: Prova Cangur de 2n d'ESO de 2024

25. Quin dels desplegaments de les opcions de resposta no pot correspondre al sòlid representat en la figura de la dreta?

A)  B)  C)  D)  E) 



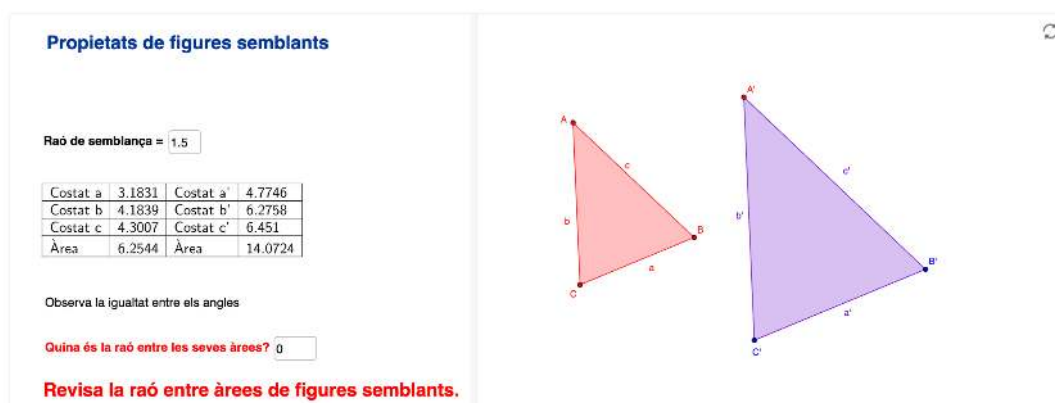
Font: Prova Cangur de 2n d'ESO de 2022

Recursos i activitats per treballar sabers concrets

Saber #2.ESP.FG.A

Per treballar el **saber #2.ESP.FG.A**, trobem molts recursos interessants fets amb GeoGebra. Un exemple és [Figures semblants](#), de David Virgili. En primer lloc, es demana a l'alumnat que justifiqui si les figures que es mostren (tres grups diferents de figures) són semblants o no i, posteriorment, se li demana que construeixi pentàgons semblants treballant la raó de semblança i també la raó entre les àrees. Aquesta activitat forma part d'un paquet de tres, elaborades totes per David Virgili, per treballar la semblança i el teorema de Tales. Les tres activitats es poden trobar a l'[enllaç](#).

Un altre recurs també del GeoGebra és [Propietats de les figures semblants](#) de Jordi Font, on es treballen les raons de proporcionalitat entre els costats de dos triangles i entre les àrees d'aquests dos triangles.



Font: [Propietats de les figures semblants](#), de Jordi Font

Saber #2.ESP.FG.A

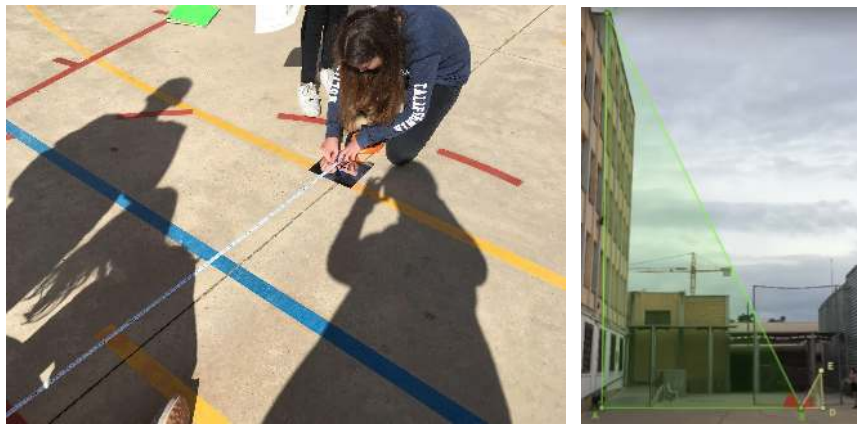
A l'ARC trobem l'activitat de Josep Lluís Cañadilla [Construcció de figures semblants](#), també per treballar el **saber #2.ESP.FG.A**. En una primera part de l'activitat es proposa a l'alumnat modificar la grandària d'una figura amb l'editor de textos de manera que n'obtingui una altra de semblant. Amb la segona part de la proposta, l'alumnat aprèn a dibuixar figures semblants amb el GeoGebra, tal com ho faria fent servir eines de dibuix.



Font: elaboració pròpia

Saber #2.ESP.FG.B

Una activitat que ens pot servir per treballar tant el saber **#2.ESP.FG.A** com el **saber #2.ESP.FG.B** és [Tales, ombres i altures](#) de Núria Serra, que es pot trobar a l'ARC. Es proposa seguir els passos de Tales de Milet per tal de calcular l'altura de tres objectes: una porteria, una cistella de bàsquet i la porta principal de l'institut. Per comprovar la fiabilitat dels resultats, l'alumnat ha de fer el càlcul dos cops, un amb el membre de l'equip més alt i l'altre amb el membre de l'equip més baix. Al guió de l'activitat l'alumnat fa els càlculs, així com un dibuix de la situació amb les dades. En acabar, es posen en comú els resultats de tots els grups i, en el cas que hi hagi discrepàncies, es mira d'esbrinar quins poden ser-ne els motius. L'activitat pot servir com a punt de partida d'una altra si fem aquesta pregunta a l'alumnat: i si està ennuvolat, com calcularíem les altures? A partir d'aquí, es podria treballar la llei de la reflexió i fer l'activitat amb miralls, tal com es mostra a les imatges següents o en aquesta proposta del vídeoMAT: [Què faria Tales un dia ennuvolat?](#).



Font: elaboració pròpia

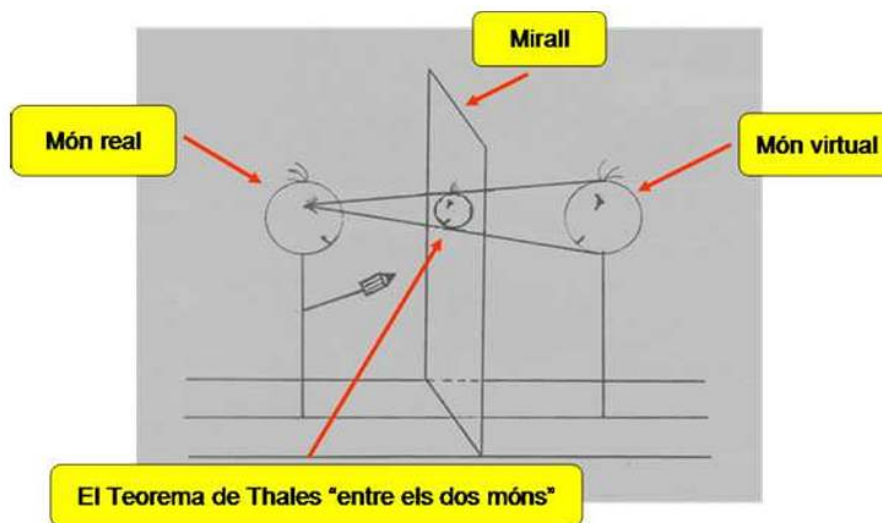
Saber #2.ESP.FG.B

Les escales de mapes, plànols i maquetes poden ser un bon recurs per treballar els **sabers #2.ESP.FG.A i #2.ESP.FG.B**, donat que expressen raons de proporcionalitat entre les mesures dels models i les de la realitat. El treball amb mapes i amb plànols proporciona un context real en què aplicar els sabers. Es poden fer projectes interdisciplinaris on sigui necessari dissenyar i construir maquetes de cases o edificis, de peces tecnològiques o del sistema solar. Un exemple d'això el trobem al projecte «[Home \(Casa\)](#)» de Jordi Domènech, a la campanya del CREAMAT [Matemàtiques i projectes](#). La proposta tracta de dissenyar una casa amb unes condicions inicials establertes, fet que permet el treball entre diferents disciplines: matemàtiques, economia i tecnologia. El projecte treballa de forma ben clara moltes de les competències específiques de la matèria de matemàtiques, però també treballa a fons el vector de ciutadania democràtica i consciència global, ja que connecta amb diverses problemàtiques relacionades amb l'habitatge: el preu, la gentrificació de les ciutats, els desnonaments...

També al web de projectes enllaçat des de la campanya del CREAMAT es pot trobar el recurs "[Sistema solar a escala](#)", de l'INS Marta Mata de Montornès del Vallès (i altres). A l'entrada se'ns presenten múltiples maneres d'abordar el treball matemàtic del projecte i com connectar-lo amb l'entorn proper de l'alumnat. Al Garraf existeix una [ruta del sistema solar a escala](#). Prenent com a centre del sistema solar l'Observatori Astronòmic del Garraf, la ruta segueix una representació a escala dels diferents planetes de manera que es pren consciència de l'espai interplanetari i de com es veuen el Sol i els planetes des de qualsevol altre astre. Caminant a raó d'un milió de quilòmetres a cada passa, la ruta també permet gaudir de l'entorn natural. Es pot consultar una descripció i les coordenades de la ruta a l'[enllaç](#).

Saber #2.ESP.FG.B

Quantes vegades s'ha mirat el nostre alumnat a un mirall? Segurament, des de ben petits i petites ens ha encisat el reflex mostrat per un mirall, però quina relació existeix entre la dimensió de la imatge real i la que observem en un mirall? Aquesta pregunta és el pilar fonamental del recurs d'Anton Aubanell (per treballar el **saber #2.ESP.FG.B**) amb títol [Mirallet, mirallet, per què m'has fet tan petit?](#) i que es pot trobar a l'ARC.



Font: [Mirallet, mirallet, per què m'has fet tan petitet?](#), d'Anton Aubanell

El desenvolupament de l'activitat té tres fases ben diferenciades:



Font: elaboració pròpia

Primera fase: l'estudiant voluntari o voluntària dibuixa el contorn de la seva cara en un mirall. Per evitar l'efecte de paral·laxi, cal vetllar que es faci amb un ull tancat.

Segona fase: mostrem la imatge pintada al mirall a la resta de la classe i preguntem: «Mirallet, mirallet, per què m'has fet tan petitet?» L'efecte sorpresa que es produeix és molt interessant. Observen que la imatge pintada al mirall és molt més petita que el contorn real de la persona que l'ha dibuixat. Però, fins a quin punt és més petita la imatge pintada respecte a la real?

Tercera fase: en aquest moment és quan entra en joc el teorema de Tales. Mitjançant un esquema similar al de la imatge adjunta podem preguntar-nos quina relació s'estableix entre la imatge del «món virtual» i la que es projecta al mirall.

Donat que la distància entre la figura real i el mirall és prou curta (com a màxim la longitud del braç que ha fet el dibuix) l'efecte de perspectiva és irrellevant i les dimensions del dibuix són la meitat de les dimensions de la cara real. Es tracta d'un exemple de semblança amb raó 1:2. Però el que sorprèn més és la superfície que limita el contorn i que és una quarta part de la superfície de la cara. Tal com indica l'autor de l'activitat, es tracta d'una bona oportunitat per repassar el fet que la raó entre àrees de figures semblants és igual al quadrat de la raó de semblança.

Com a tancament, si es vol, es pot allunyar molt més el mirall de l'alumne o l'alumna (pot ser de punta a punta de l'aula) i s'observa que el contorn de la cara encara encaixa exactament amb el contorn pintat inicialment; les distàncies de les dues figures (la del «món real» i la del «món virtual») al mirall són iguals. Per tant, la longitud de la imatge projectada al mirall serà sempre la meitat de l'original.

Saber #2.ESP.FG.C

Per a la descoberta del teorema de Pitàgores, **saber #2.ESP.FG.C**, una possible activitat és que cada alumne dibuixi quadrats sobre els catets i la hipotenusa de diferents triangles rectangles, en calculi les àrees, comparteixi les dades obtingudes amb els companys i, una vegada aconseguits prou casos per estudiar, busqui patrons en les àrees per obtenir la propietat del teorema de Pitàgores. Aquesta activitat es pot fer tant en GeoGebra com en paper i les dues opcions generen uns beneficis més enllà de la descoberta del teorema.

Si es fa amb GeoGebra, amb una sola construcció es poden obtenir molts triangles rectangles i, per tant, s'obté una base de dades més gran (vegeu l'activitat del bloc Visualització i modelització geomètrica referent a la visualització del teorema de Pitàgores, **saber #2.ESP.VM.B**). Si es fa en paper, cada alumne treballarà amb un nombre limitat (i petit) de triangles rectangles i s'ha de fer un petit treball previ: el primer que cal assegurar és que els quadrats sobre els triangles siguin realment quadrats. Per assegurar-ho, es poden dibuixar els triangles rectangles sobre un geoplà de paper. En la construcció dels quadrats apareixerà el concepte de perpendicularitat, fet que permet connectar (sense explicitar-ho ni dir-ne el nom) amb com es generen vectors perpendiculars i com són els seus components. La segona cosa que cal assegurar és que el càlcul de l'àrea sigui correcte. Aprofitant el geoplà es pot obtenir l'àrea del quadrat sense necessitat de mesurar la longitud del catet o de la hipotenusa. Aquest càlcul permet treballar les diferents estratègies del càlcul d'àrees per descomposició (agrupant o eliminant zones).

Una cosa que es pot fer és pintar el quadrat sobre un catet d'un color (per exemple, blau), el quadrat sobre l'altre catet d'un altre color (per exemple, vermell) i el quadrat sobre la hipotenusa d'un tercer color (per exemple, negre). Per posar paraules a la propietat observada, es pot dir que la superfície blava més la superfície vermella ocupen el mateix espai que la superfície negra. D'aquesta manera, posem atenció al concepte i no a la fórmula.

Cal tenir en compte que la propietat observada es compleix en tots els triangles que han dibuixat els alumnes, però encara no es pot dir que la compleixin tots els triangles rectangles perquè s'han utilitzat uns triangles concrets. La compleixen els triangles utilitzats o bé tots? Per assegurar que es compleix, sempre cal fer una demostració. Es considera important fer la demostració del teorema de Pitàgores perquè, en general, les demostracions no són senzilles i els alumnes no en veuran gaires al llarg de la seva etapa a l'educació secundària, per tant, és important no perdre'n l'oportunitat. La proposta és fer una demostració geomètrica del teorema. Hi ha moltes demostracions visuals diferents del teorema de Pitàgores, una de les quals és la que mostra la imatge següent, i en el llibre de GeoGebra de Steve Phelps [Proofs without words](#) se'n poden trobar altres. Una opció és fer una demostració conjunta guiada pel professor o la professora. Una altra opció és aprofitar per treballar en grup, si es considera amb GeoGebra, diferents demostracions que després es puguin visualitzar.



Font: elaboració pròpia

És important diferenciar entre una «mostració» i una demostració. Una demostració és un conjunt de passos que es poden aplicar a qualsevol triangle rectangle; en canvi, una «mostració» consisteix a mostrar una propietat que es compleix en un triangle rectangle concret. En els vídeos següents se'n poden veure dues (encara que diguin que són demostracions) de diferents del teorema de Pitàgores: [vídeo de demostració 1](#); [vídeo de demostració 2](#).

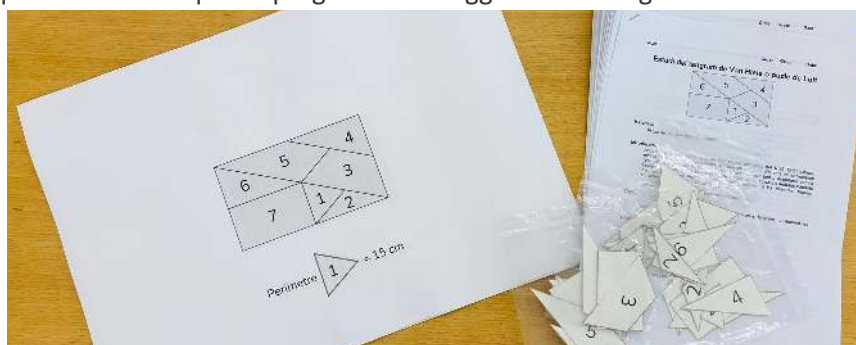
Saber #2.ESP.FG.C i saber #2.ESP.FG.D

Per treballar els **sabers #2.ESP.FG.C i #2.ESP.FG.D**, hi ha la seqüència d'activitats de Núria Serra «Un tangram diferent», la guia didàctica de la qual es pot consultar en aquest [enllaç](#). La seqüència està pensada per portar-la a classe en tres o quatre sessions i està dividida en tres parts ben diferenciades. Amb el pretext de conèixer el puzzle de Lott, també conegut com a tangram de Van Hiele, l'alumnat fa un estudi i classificació de figures planes, cerca patrons i, finalment, descobreix i aplica el teorema de Pitàgores.



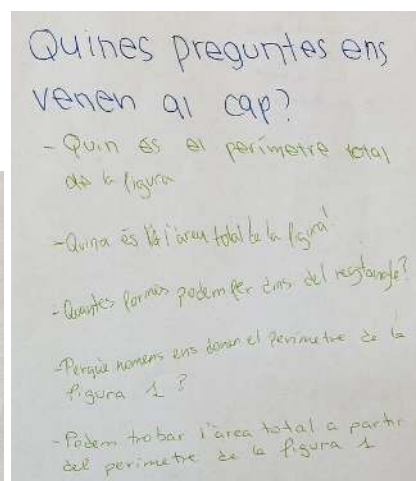
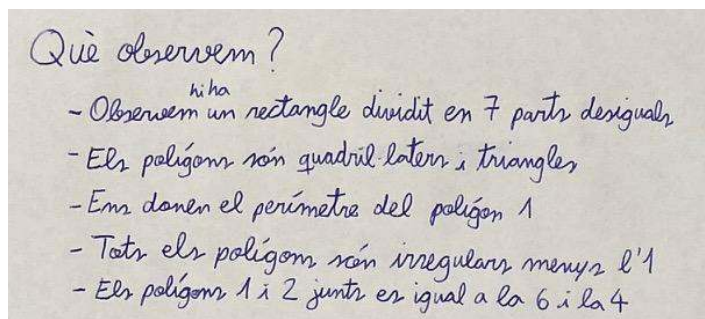
Font: Núria Serra

A la primera part, com a activitat d'escalfament, es lliura la imatge següent en format DIN A3 i l'alumnat haurà d'escriure què hi observa i quines preguntes els suggereix la imatge:



Font: Núria Serra

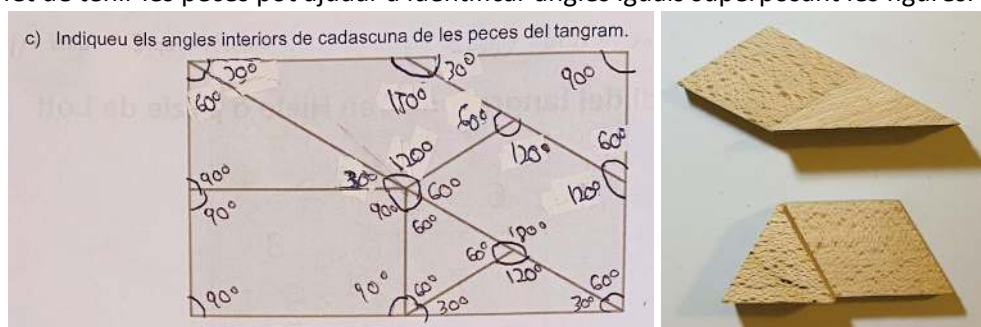
Aquesta mena d'activitats, conegudes com a «*what do you wonder, what do you notice*», són interessants pels motius següents, sempre que vagin acompanyades d'una bona gestió a l'aula. Demanar a l'alumnat què observa pot facilitar la conversa i demanar quines preguntes els venen al cap ajuda a fomentar la curiositat. També acostumen a provocar més participació i una millor valoració de les diverses perspectives que aporten els companys i companyes, impliquen l'alumnat de forma activa, en valoren la veu i les idees, i poden fomentar la generació d'idees i l'establiment de connexions entre conceptes matemàtics.



Font: Núria Serra

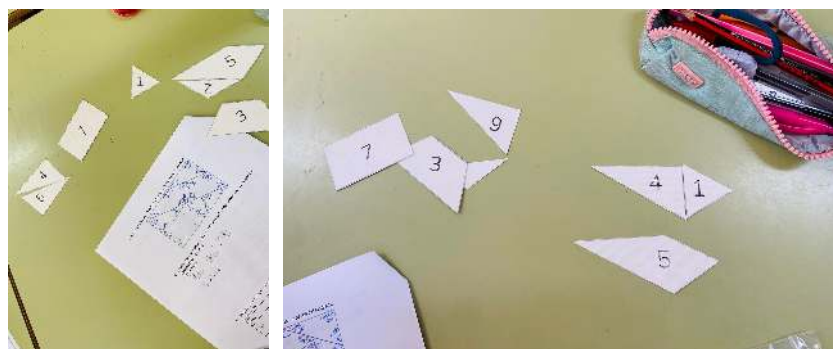
Tot seguit, es passa a estudiar les peces del tangram. Aquesta activitat serveix per fer un repàs de conceptes bàsics de geometria plana, treballar la diferència entre perímetre i àrea i, finalment, planteja la necessitat de trobar la manera de calcular el tercer costat d'un triangle rectangle del qual en coneixem dos.

Es dona a cada grup les peces del tangram fetes de cartolina. En els primers apartats, es demana que identifiquin quins polígons veuen en el tangram i que pensin com es poden classificar i ho facin. A continuació, es demana que indiquin el valor dels angles interiors de tots els polígons. Un error bastant comú és posar que l'angle de 60° del triangle rectangle és de 45° . El professorat, en veure l'errada, pot preguntar que per què pensen que és 45° . Una resposta freqüent és que al quadrat és així. Llavors una pregunta que pot ajudar a adonar-se de l'errada és plantejar quines són les diferències entre els quadrats i els rectangles. Tots els grups solen començar indicant els angles rectes, però n'hi ha que, un cop fet això, es queden encallats. En aquests casos, es pot donar la indicació que continuïn buscant els angles del triangle equilàter. El fet de tenir les peces pot ajudar a identificar angles iguals superposant les figures.



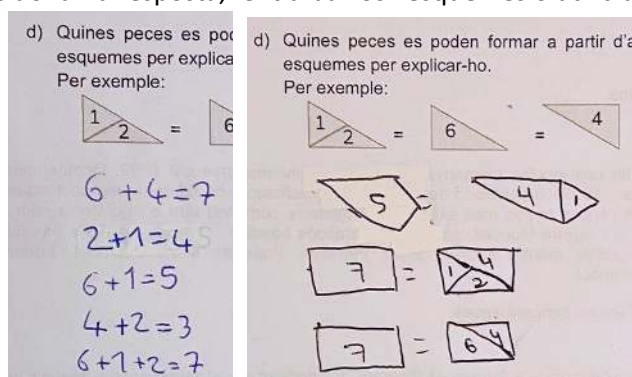
Font: Núria Serra

A l'apartat següent es demana quines figures es poden formar a partir de les altres. Potser alguns grups necessitaran l'aclariment que volem la mateixa forma i mida, és freqüent que algun grup busqui només la forma i trobi figures semblants (per exemple, amb les peces 1, 2, 6 i 7 es poden fer peces amb la mateixa forma que la 6 i la 4, però de mida diferent), que pot resultar interessant per ampliar el treball de l'activitat, però que no és un objectiu proposat inicialment. Les peces de cartolina són clau per donar resposta a aquest apartat i que tot l'alumnat tingui opcions a trobar les solucions.



Font: Núria Serra

Una pregunta interessant és si s'han trobat totes les possibilitats i, en cas de resposta afirmativa, demanar com se sap que no falta cap possibilitat. Pot resultar útil representar a la pissarra les possibilitats que van trobant els grups per, entre tot el grup de forma conjunta, trobar totes les opcions possibles. L'alumnat troba maneres diferents de donar la resposta, fent dibuixos i esquemes o utilitzant símbols matemàtics.



Font: Núria Serra

Tot seguit, es demana quina fracció respecte a la superfície total del tangram representa cadascuna de les peces i establim connexions amb el sentit numèric. Normalment, l'alumnat troba dificultats a explicar el perquè i justificar-ho, diu que «ja es veu». Cal demanar que facin l'esforç per trobar les paraules.

Peça	Fracció respecte la superfície total
1	$\frac{1}{16}$ perquè és la meitat d' $\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{16}$ perquè és la meitat d' $\frac{1}{8}$
3	$\frac{3}{16}$ perquè és la 1, 3 meitats
4	$\frac{1}{8}$ perquè és la meitat d' $\frac{1}{4}$
5	$\frac{3}{16}$ en sumes la 6 i la 1 que sumen la 3 dona $\frac{3}{16}$
6	$\frac{1}{8}$ perquè és la meitat d' $\frac{1}{4}$
7	$\frac{1}{4}$

Peça	Fracció respecte la superfície total
1	$\frac{1}{16}$ necessitem 2 de la 1 per fer una de la figura 4.
2	$\frac{1}{16}$ necessitem 2 de la 2 per fer una de la figura 4.
3	$\frac{3}{16}$ necessitem 3 de la 1 per fer la.
4	$\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ del total (7) = $\frac{1}{8}$
5	$\frac{3}{16}$ necessitem una de la 4 i una de la 1 per fer la.
6	$\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ del total (7) = $\frac{1}{8}$
7	$\frac{1}{4}$ Es veu que és $\frac{1}{4}$ del total.

Font: Núria Serra

En l'apartat següent es demana com es pot comprovar que les fraccions són correctes. Un altre cop, és important remarcar que cal justificar el que fan.

f) Com pots comprovar que no hi ha cap errada a l'apartat anterior? Comprova-ho.
Puc comprovar-ho sumant totes les fraccions. Si dona 1 estarà bé

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{2}{16} + \frac{3}{16} + \frac{2}{16} + \frac{4}{16} = 1 //$$

Font: Núria Serra

Es comença demanant a l'alumnat que trobi dues peces que tinguin la mateixa superfície, però diferent perímetre. Sigui superposant les peces de cartolina o bé amb les fraccions que han trobat als apartats anteriors, és senzill trobar dues peces de la mateixa superfície. El que no és immediat és que justifiquin que el perímetre és diferent. Si veiem que algun grup no van pel camí recomanable, podem induir a la revisió del que estan fent amb preguntes del tipus: «Esteu segurs que és així? Per què penseu que aquestes dues mesures són iguals? I si us feu un esquema amb les dades? Quines són les mesures que sabem amb seguretat? I si agafeu les peces i les superposeu?...»

Hi ha alumnes que fan bones observacions, però no acaben de justificar-ho. En aquest exemple, podríem demanar: «Com saps que el perímetre de la figura 1 és més petit que el de la figura 2?»

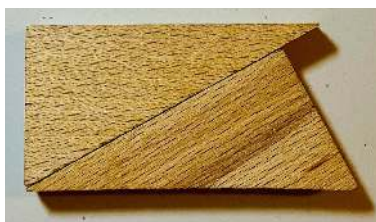
g) Agafeu dues peces que tinguin la mateixa superfície però diferent perímetre. Com sabeu que tenen la mateixa superfície però diferent perímetre? Expliqueu-ho de forma raonada.

La peça 1 i 2. Sé que tenen la mateixa superfície perquè les dos ocupen $\frac{1}{16}$ part del rectangle total però tenen perímetres diferents perquè els costats són diferents. El perímetre de la figura 1 és més petit que el de la figura 2.

Font: Núria Serra

Finalment, se'ls demana que trobin les mesures de tots els costats dels polígons del tangram tenint en compte que el perímetre del triangle equilàter és de 15 cm.

Aquells grups que volen acabar de pressa diran que els triangles rectangles tenen dos costats de 10 cm. El professorat els ha de guiar perquè vegin que no és possible, encara no saben que en un triangle rectangle la hipotenusa sempre és més gran que els catets, però ho poden deduir observant el dibuix del tangram o superposant les peces. Una manera molt clara de fer-los-ho veure és proposar-los que agafin els dos triangles rectangles i comparin longituds.



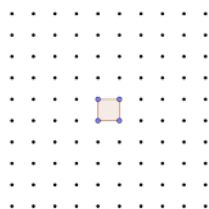
Font: Núria Serra

És important remarcar-los que han d'explicar el perquè de les seves conclusions. L'alumnat arriba a la conclusió que, amb les dades de què disposa, no pot trobar un dels costats del triangle rectangle. Per fer-ho haurà de seguir investigant, així que es dona pas a la segona part de la seqüència.

La segona part és una adaptació de l'activitat de l'NRICH [Tilted squares](#). L'alumnat necessita la fitxa de treball i geoplans o fulls amb trama quadrada. S'inicia l'activitat amb una presentació. És important que, a l'inici, l'alumnat encara no tingui la fitxa de treball ni els geoplans per evitar distraccions. A la presentació es fan un seguit de preguntes que en gran grup s'aniran responent. Pot haver-hi alumnes que no hagin

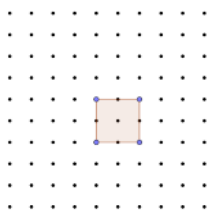
treballat mai amb geoplans i és important deixar clar que la unitat de longitud és la distància entre punt i punt (pot haver-hi alumnes que, en comptes de distància entre punts, comptin els punts). Les primeres preguntes són senzilles de respondre, és un bon moment per donar veu a aquell alumnat que habitualment té por de participar:

Quina superfície té aquest quadrat?



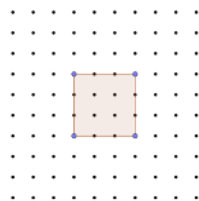
Font: Núria Serra

Quina superfície té aquest quadrat?



Font: Núria Serra

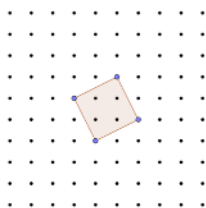
Quina superfície té aquest quadrat?



Font: Núria Serra

La pregunta següent té més dificultat i serà el fil conductor de tota la sessió:

Quina superfície té aquest quadrat?

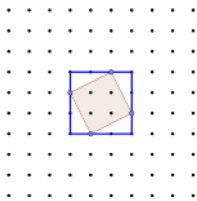


Font: Núria Serra

El fet que el quadrat estigui inclinat dificulta el càlcul a simple vista. Normalment, una de les respostes que l'alumnat acostuma a dir és que la superfície és 4 perquè, encara que el quadrat estigui inclinat, el costat és 2. Després de veure que no és 2, és l'hora de buscar estratègies per trobar la superfície. Es poden deixar

cinc minuts perquè cada grup parli i busqui opcions, si resulta difícil, es pot projectar la diapositiva següent de la presentació:

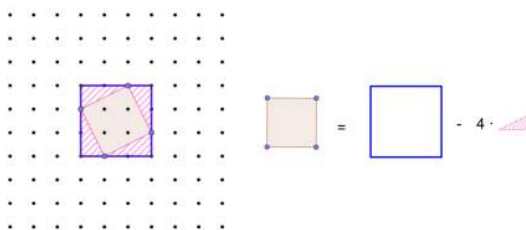
Quina superfície té aquest quadrat?



Font: Núria Serra

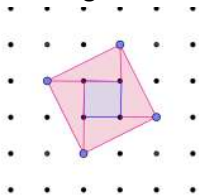
Es pregunta a l'alumnat si ara té cap idea i es deixen uns minuts perquè ho parlin amb els companys. Una possible estratègia és la que hi ha a continuació a la presentació:

Quina superfície té aquest quadrat?



Font: Núria Serra

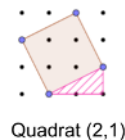
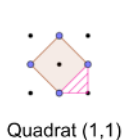
N'hi ha altres d'interessants que, si no surten a classe, val la pena de comentar, com ara fer el càlcul de la superfície del quadrat interior i sumar-li quatre triangles rectangles:



Font: Núria Serra

Per seguir l'activitat, és necessari posar nom als quadrats inclinats. Es projecta la diapositiva següent i es demana a l'alumnat que conjecturi el perquè del nom de cada quadrat:

Posem nom als quadrats

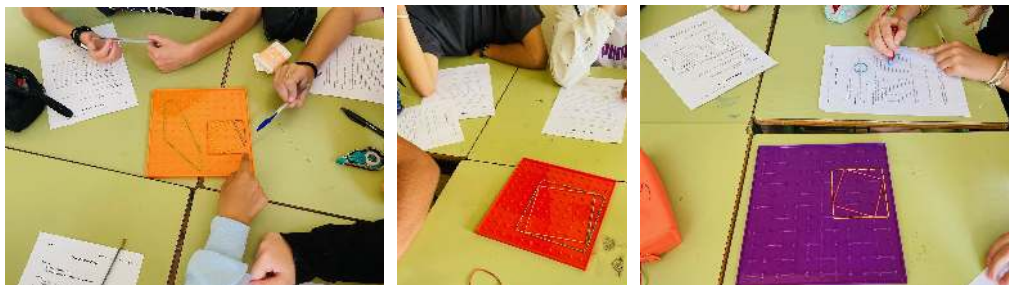


Font: Núria Serra

Cada quadrat està definit per una parella de nombres referents al triangle rectangle sobre el qual s'ha format el quadrat. El primer nombre és la base del triangle i el segon nombre és l'altura.

Un cop es té clar com anomenar els quadrats inclinats, es dona la fitxa de treball a cadascú i un geoplà per grup.

A cada grup li correspondrà calcular la superfície d'un quadrat inclinat diferent. Poden representar la situació al geoplà per visualitzar-la i fer més fàcil el càlcul o també en un full de trama quadrada.



Font: Núria Serra

Després es fa una posada en comú de tots els resultats i s'emplena la taula de la fitxa.

b) Posada en comú *

Grup	Quadrat	Superfície
1	(3,1)	10
2	(4,1)	17
3	(5,1)	26
4	(6,1)	37
5	(7,1)	50
6	(8,1)	65

Font: Núria Serra

Un cop s'ha fet la posada en comú, es deixa temps per fer els tres apartats següents. Hi ha alumnes que expressen verbalment la troballa (i podem aprofitar per comentar petites errades en l'expressió de la solució):

b) Poseu les dades de tots els grups en comú amb la finalitat de completar la taula anterior. Què observeu?
Multiplicuem el primer número del parèntesis per ell mateix i li sumem l'1

c) Quina superfície penseu que tindrà el quadrat (8,1)? Per què?
82 pq $(9,1) \rightarrow 9 \cdot 9 = 81 + 1 = 82$

d) Imaginem ara que construïm el quadrat a partir d'un triangle (a,1) on a és un nombre qualsevol. Escriu una expressió que representi la superfície del quadrat.
 $A = a^2 + 1$

Font: Núria Serra

I n'hi ha que fan servir llenguatge algebraic:

b) Poseu les dades de tots els grups en comú amb la finalitat de completar la taula anterior. Què observeu?
Quan el quadrat té els dos nombres senars el resultat es parell i quan té un nombre senar i un parell el resultat es senar. Ara multipliquem el primer nombre per ell mateix i sumem el 1.

c) Quina superfície penseu que tindrà el quadrat (9,1)? Per què? $S = x^2 + y$
Serà 82 perquè $9 \cdot 9 = 81 + 1 = 82$

d) Imaginem ara que construïm el quadrat a partir d'un triangle (a,1) on a és un nombre qualsevol. Escriu una expressió que representi la superfície del quadrat.
 $S = a^2 + 1$

Font: Núria Serra

Ara se'ls demana que, sense fer cap càlcul, conjeturin quina serà la superfície d'un quadrat construït sobre un triangle rectangle d'altura 2. La majoria de les respostes acostumen a ser que es multiplica la base del triangle per ell mateix i se suma 2 (el raonament que donen és que si abans sumàvem 1, ara sumarem 2):

e) Si ara construïm quadrats a partir de triangles (3,2) o (4,2), què creieu que passarà? Quina penseu que serà la superfície d'aquests quadrats? Conjectureu què pot passar.
 $S = 3 \cdot 3 + 2 = 11$ *Perquè si seguim la mateixa lògica que al principi hauríem de fer*
 $S = 4 \cdot 4 + 2 = 18$

Font: Núria Serra

Després se'ls demana que ho comprovin amb els geoplans i tornin a emplenar una taula com la de l'apartat a), però amb altura 2.

Es posen els resultats en comú i es deixa temps perquè observin què està passant. L'alumnat pot arribar a conjeturar una fórmula per al cas d'altura 2.

f) Repetirem el que hem fet a l'apartat a) però amb triangles d'altura 2.

Grup	Quadrat	Superfície
1	(3,2)	13
2	(4,2)	20
3	(5,2)	29
4	(6,2)	40
5	(7,2)	53cm ²
6	(8,2)	68

Què observeu?
Que aquesta vegada, a més de sumar-li 1, se li suma 2²
 $A = a^2 + 2^2$

Font: Núria Serra

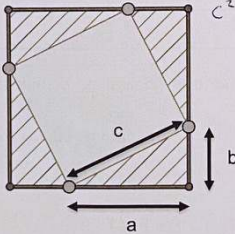
Hi haurà alumnes que arribaran a deduir una fórmula per al cas general abans que se'ls demani:

Què observeu?
Que si fem el quadrat del primer nombre i el quadrat del segon nombre i els sumem dona el resultat
 $S = x^2 + y^2$

Font: Núria Serra

Per acabar, se'ls demana que conjeturin una fórmula per al cas general, un quadrat construït sobre un rectangle de base a i altura b , i arribin així al teorema de Pitàgores:

g) Conjectureu com serà una fórmula per calcular la superfície d'un quadrat construït a partir d'un triangle (a,b) , on a i b són dos nombres qualsevol:



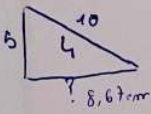
$c^2 = a^2 + b^2$ a això se li diu teorema de pitàgores

$c^2 \rightarrow pq$ l'àrea del quadrat és $c \cdot c$

Font: Núria Serra

A la tercera part de la seqüència d'activitats s'enuncia d'una manera formal el teorema i es donen exemples d'aplicació que l'alumnat haurà de reproduir. A continuació, se'ls demana que apliquin allò que han après per donar resposta al repte proposat a la primera sessió: trobar les longituds de tots els costats de les peces del tangram de Van Hiele.

d) Recupereu la fitxa anomenada Un tangram diferent. A l'últim apartat se us demanava quant mesuraven tots els costats de les peces. Ara tenim la informació i els coneixements necessaris per poder resoldre aquest repte. Detalleu a continuació tot el procediment.



$b^2 = 10^2 - 6^2$
 $b^2 = 100 - 36$
 $b = \sqrt{64}$
 $b = 8,66$

La figura 4 és igual a la 6, això vol dir que el costat que ens faltava de la 6 (que és el mateix del rectangle) també dona 8,66: com que la base del rectangle és la meitat del rectangle gran, l'altra base, és a dir, la base del triangle 2 també és 8,66. El costat que ens faltava de la figura 5 també ocupa la meitat del rectangle gran i, per tant, també és de 8,66.

Font: Núria Serra

Saber #2.ESP.FG.E

Una activitat molt interessant, que podem titular «Construcció de sòlids platònics», per treballar el **saber #2.ESP.FG.E** és la de trobar tots els sòlids platònics (o poliedres regulars) amb materials manipulatius, i fer-ne la construcció de manera que sigui, en ella mateixa, una demostració del fet que són aquells i només aquells. Per construir-los hi ha diversos materials, com el Lokon, que consta de peces en forma de triangle equilàter, quadrat i pentàgon regular, totes amb la mateixa longitud de costat, que encaixen entre elles. El Polydron magnètic fa la mateixa funció, però és més fàcil d'encaixar pel fet que fa servir imants. Amb aquestes peces proposem una investigació: quins poliedres podem construir amb peces totes iguals entre elles, coincidint a cada vèrtex el mateix nombre de peces?

A mesura que anem fent la investigació i la construcció, es va fent evident que els objectes matemàtics decisius en aquesta qüestió són els angles. Aniran sorgint algunes propietats de les figures, com ara que és necessari que la suma dels angles de les figures que conflueixen en un mateix vèrtex sigui inferior a 360° per

tal que es pugui plegar. En cas que sigui exactament 360° , tindrem un recobriment del pla, la qual cosa ens dona peu a una altra investigació molt interessant sobre els mosaics.

La investigació que proposem consisteix, a grans trets, a construir poliedres de manera ordenada i descartar els casos amb els quals no funciona. Per exemple, amb els triangles equilàters es veu fàcilment que no es pot construir una figura tancada de tres dimensions amb menys de quatre peces, però que amb exactament quatre es pot tancar. Apareix el tetràedre, que a cada vèrtex uneix tres triangles equilàters. Si es construeix un poliedre unint quatre triangles per vèrtex s'obté l'octaedre (vuit triangles) i si s'uneixen cinc triangles per vèrtex la figura que apareix és l'icosaedre (20 triangles). És fàcil veure que no es poden unir més de cinc triangles per vèrtex perquè amb sis ja s'arriba als 360° i ja no es pot plegar la construcció. Tampoc se'n poden utilitzar menys de tres, perquè quedarien dos triangles l'un sobre l'altre sense generar volum. La mateixa investigació es pot fer amb les altres peces, els quadrats només permetran unir tres peces a cada vèrtex generant un cub i els pentàgons també permetran només vèrtexs amb tres peces, generant un dodecaedre. Amb el material és fàcil veure que ja no es poden construir més poliedres regulars.

Una de les propostes del vídeoMAT del 2018, [Quants poliedres regulars hi ha?](#), tenia com a objectiu fer aquesta recerca.

Saber #2.ESP.FG.E

La característica d'Euler relaciona el nombre de vèrtexs, cares i arestes dels poliedres. Es proposa descobrir aquesta relació a partir de la recerca amb diferents poliedres.

Una manera de portar-la a l'aula és fer una investigació conjunta entre tot el grup classe: analitzar diferents figures individualment i compartir els resultats en un espai visible per a tothom com la pissarra o bé un full de càlcul compartit, mitjançant una taula. D'aquesta manera, el docent pot anar revisant les aportacions dels alumnes (comprovant mentalment que siguin correctes amb la fórmula d'Euler) i demanar revisió quan el resultat no sigui correcte. Un cop recollits un cert nombre de resultats, guiarem el grup per observar la relació entre els vèrtexs, les cares i les arestes. Podem ajudar-los creant una nova categoria que sigui «cares + vèrtexs».

A la campanya Laboratori de matemàtiques del CREAMAT s'explica una proposta per treballar la característica d'Euler a l'aula, titulada [Comptem cares, arestes i vèrtexs](#).

Es pot trobar una referència a aquesta activitat al bloc de patrons d'aquest mateix curs ([#2.ALG.PA](#)), dins les propostes del sentit algebràic.

Saber #2.ESP.FG.E

Un altre recurs per treballar el **saber #2.ESP.FG.E** el trobem a la campanya del CREAMAT Mates *take away* i porta per nom [Poliedres amb brics](#). El resultat són poliedres fàcils de construir i fets amb material reciclable. Al blog de Manel Martínez trobem una entrada interessant sobre la mateixa temàtica i que porta el mateix nom, [Poliedres amb brics](#). L'autor del blog posa en relleu les característiques següents sobre aquesta activitat:

- La poden fer tots els alumnes alhora. És una activitat inclusiva, no necessita grans coneixements previs per part de l'alumnat i poden treballar conjuntament alumnes de diferents nivells. Tots aporten al resultat final.
- Té un fort component artístic que, sense gaires dificultats, permetrà que el centre en pugui lluir els resultats.
- De seguida, i de manera natural, portarà l'alumnat a investigar sobre les característiques dels poliedres, així com els seus elements: arestes, vèrtexs, cares, angles, díedres, etc.
- Es pot fer a qualsevol curs de l'ESO, per tant, és una bona activitat intercurricular o internivells.
- És una proposta de llarg recorregut: en funció de l'alumnat es pot estirar més i, fins i tot, pot esdevenir un projecte de recerca.
- Té un cost molt baix i requereix la implicació de tothom. És un recurs col·laboratiu.

Al blog es pot trobar el material necessari per portar l'activitat a l'aula, així com una descripció detallada de tots els passos. També hi trobem imatges sobre els possibles productes finals, com aquesta:



Font: [Poliedres amb brics](#), del blog El punt singular de Manel Martínez.

Saber #2.ESP.FG.E

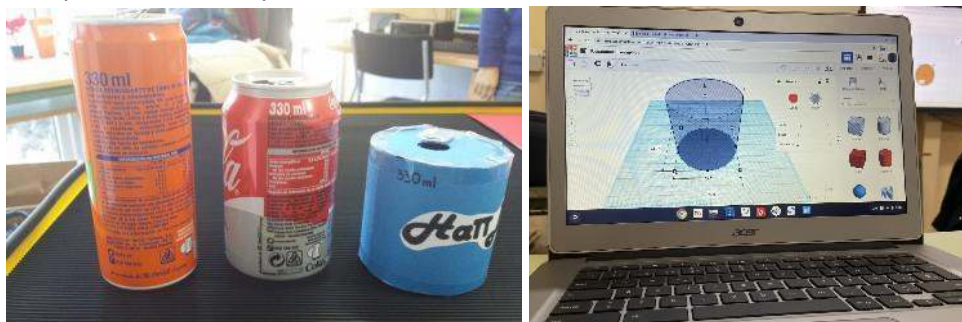
A l'ARC trobem l'itinerari [La volta al món en 8... edificis](#), on es proposa fer la volta al món a la recerca d'edificis amb forma de cossos geomètrics i fer-ne un estudi detallat. Consta de nou unitats en què s'estudia l'ortoeidre, el cub, els prismes de base triangular i pentagonal, la piràmide, el cilindre, el con, l'esfera i una de síntesi. Les activitats de les unitats són molt diverses i estan contextualitzades en el seu entorn. N'hi ha de resolució de problemes, de modelització, manipulables, de geometria dinàmica... Tenen diferents graus de dificultat, es poden fer individualment o en petit grup. Aquest itinerari el va elaborar l'equip ICE de matemàtiques de la UdL, 2013-16 (Germán Arbiol Oliver, Ramon Miquel Bergadà Marimon, Rosa Castillo Cervelló, Montserrat Córdoba Marsà, Andreu Grau Bernadó, Palmira Ortiz Escoda i Montserrat Siscart Alberich).

Saber #2.ESP.FG

Un exemple d'activitat per treballar els **sabers #2.ESP.FG.E i #2.ESP.FG.F** és [Dissenyem una llauna de refresc](#), de Núria Serra, que es pot trobar a l'ARC. En aquesta activitat es proposa un petit projecte que parteix de l'entorn proper dels alumnes. A partir de l'anàlisi de les dimensions de les llaunes de refresc habituals, es proposa un problema d'optimització del material. Òbviament, l'alumnat de 2n d'ESO encara no coneix les eines per atacar el problema analíticament, però no per això hem de descartar l'activitat, justament això la fa més interessant. Es proposa mesurar i calcular la capacitat de les llaunes de què es disposa i, posteriorment, variar-ne les dimensions per tal que, mantenint la mateixa capacitat, obtinguem una sèrie de dades (altura i radi, àrea lateral i total) que ens permetin concloure quina és la que té la superfície mínima. Un cop determinades les dimensions, es construeix en cartolina, amb la qual cosa treballem el pas de les dues a les tres dimensions i el seu desenvolupament pla.

Aquesta manera d'abordar el treball amb figures geomètriques permet no només conèixer bé les figures (en aquest cas, el cilindre) i calcular-ne alguna dada desconeguda, sinó que a més es treballa en un ambient d'investigació: es busquen relacions entre les diverses magnituds (observant com varien el radi o l'altura si mantenim el volum fixat) i es dona un sentit pràctic a la tasca. L'ús d'eines digitals, com ara un full de càlcul per recollir les dades, ens facilita la tasca de recollida i anàlisi de dades de les situacions possibles. Cal tenir en compte que l'organització de dades en taules és un recurs molt útil en la resolució de problemes, tant per poder-les analitzar i extreure'n la informació buscada (com en aquest cas), com per buscar patrons en altres tipus de problemes, per exemple.

En lloc d'acabar construint la llauna amb cartolina, una altra opció és dibuixar-la amb el Tinkercad per, posteriorment, imprimir-la amb impressora 3D.



Font: [Dissenyem una llauna de refresc](#), de Núria Serra.

Saber #2.ESP.FG.F

Per treballar el **saber #2.ESP.FG.F**, també ens pot ser d'ajuda fer servir alguna *applet*. Una d'interessant la trobem al web Illuminations de l'NCTM, [Geometric solids](#). Aquesta eina permet conèixer els sòlids platònics i les seves propietats a través del seu desplegament. Mitjançant la manipulació i la investigació, l'alumnat també pot acabar descobrint la relació entre el nombre de cares, arestes i vèrtexs, la característica d'Euler. És a dir, aquest recurs també ens pot servir per treballar el **saber #2.ESP.FG.E**.



Font: "[Geometric solids](#)", NCTM.

Localització i sistemes de representació

Sabers

- A. Localització en el pla mitjançant coordenades cartesianes. Origen històric. **[ESS] #ALG.RF**

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

Les coordenades cartesianes són un objecte matemàtic imprescindible per a la introducció de les funcions, que es proposa per aquest curs. És possible que l'alumnat encara no hagi vist mai aquests conceptes i, si ho ha fet, sigui en un grau de formalisme baix. En aquest curs es proposa introduir els conceptes, la nomenclatura i la notació propis de les coordenades cartesianes i la localització de punts en el pla mitjançant aquest sistema, així com la situació de punts en un pla a partir de les seves coordenades. El mateix nom d'aquest tipus de coordenades permet una introducció històrica interessant. Va ser René Descartes, el gran filòsof, matemàtic i científic francès, qui va idear una manera de relacionar els nombres amb les posicions en un pla, amb la voluntat de representar geomètricament les equacions algebraïques. El seu estudi el va portar a desenvolupar la geometria analítica.

Cal insistir molt en la necessitat de seguir sempre un determinat ordre en anomenar les abscisses i les ordenades, que és en realitat una convenció de la comunitat matemàtica perquè aquesta manera

d'anomenar els punts sigui universal. És una bona oportunitat per fer notar a l'alumnat la importància del llenguatge matemàtic i la necessitat de ser rigorosos en el seu ús.

Comentaris sobre les connexions

Com ja s'ha comentat anteriorment, aquest saber està estretament connectat amb **#ALG.RF**, donat que és una eina que permetrà el pas a la geometria analítica més endavant, utilitzant expressions algebraïques per determinar objectes geomètrics.

Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

Aquest saber es proposa com a essencial pel fet de ser la base sobre la qual es construirà tota la geometria analítica. A més, és una eina indispensable per poder introduir les funcions.

Recursos i activitats

Recursos i activitats per treballar sabers concrets

Saber #2.ESP.LS.A

Ens pot interessar parlar de per què es diuen coordenades cartesianes i qui va ser René Descartes. Un material per introduir aquesta qüestió i iniciar el treball del **saber #2.ESP.LS.A** pot ser el recurs de Claudi Alsina (presentat a l'assignatura Didàctica de la Matemàtica quan era professor de la Facultat de Matemàtiques i Estadística) [René, mon amour](#), una carta en què René Descartes parla en primera persona per donar-se a conèixer.

Saber #2.ESP.LS.A

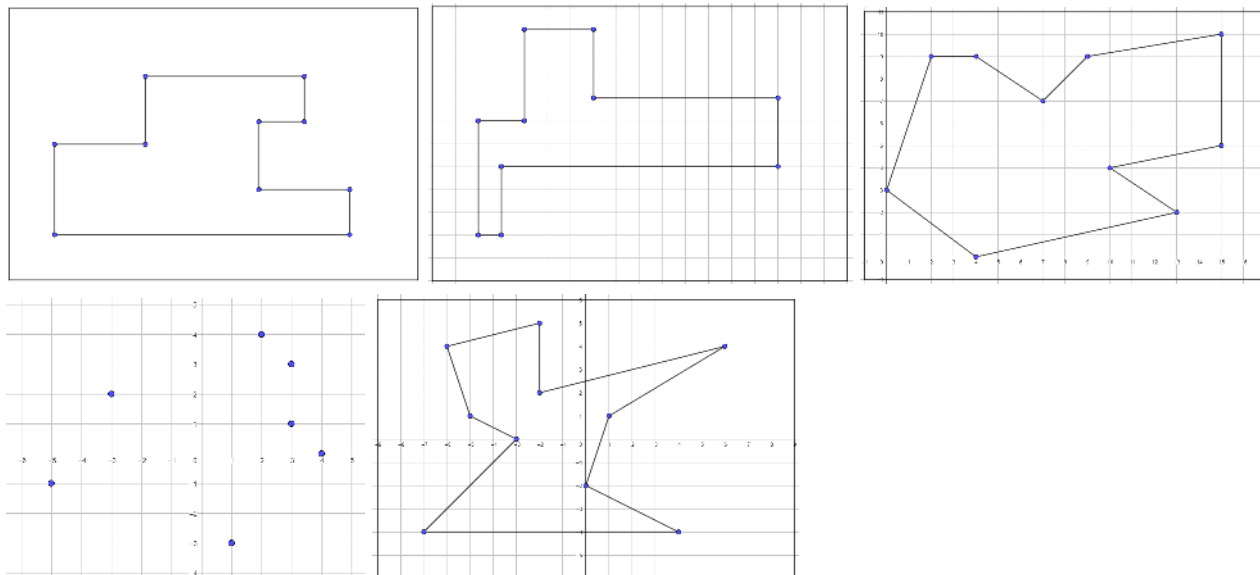
També per treballar el **saber #2.ESP.LS.A**, una possible manera d'introduir les coordenades cartesianes, si no les coneixen, pot ser provocar-ne la necessitat mitjançant el plantejament d'una activitat que requereixi localitzar punts concrets. Per exemple, es pot plantejar una imatge amb alguns objectes (com ara creus) distribuïts al llarg de tota la superfície, i fer preguntes sobre alguns dels punts, que els alumnes han de respondre sense apropar-se a la imatge: «Quin és el punt que està més a l'esquerra, o més amunt?» «On posaríeu el punt mitjà entre aquests dos?» (tot assenyalant dos punts qualssevol). Posteriorment, es pot projectar la mateixa imatge amb una quadrícula de fons, amb la qual cosa serà molt més fàcil assenyalant-los oralment, encara que sigui amb un llenguatge natural (el segon quadratet en horitzontal i el tercer en vertical, per exemple). Sense adonar-se'n, ja estaran fent servir les coordenades i només caldrà formalitzar-ho. D'aquesta manera tan senzilla, fem evident una necessitat i les coordenades cartesianes ens ho resolen.

Saber #2.ESP.LS.A

Amb la idea de generar la necessitat de les coordenades es pot fer un dictat amb l'alumnat per treballar el **saber #2.ESP.LS.A**. L'activitat consisteix a agrupar els alumnes per parelles i que un de la parella dicti una imatge a l'altre sense que aquest segon la pugui veure. En aquest cas, ens interessa que les imatges siguin més fàcils de dictar amb l'ús de les coordenades. L'activitat [Introducció a les coordenades](#) és una mostra d'imatges possibles, però se'n poden generar de noves, de la mateixa manera que aquesta mena d'activitat també pot servir per treballar altres conceptes. És una proposta molt rica per treballar la comunicació i per observar el llenguatge que utilitzen alumnes. Pot servir per introduir un tema, com en aquest exemple, o per tancar-lo.

Un membre de la parella se situa d'esquena a la pissarra amb un full i un bolígraf per poder fer «un dibuix». El segon es col·loca mirant la pissarra de manera que les dues esquenes es toquin (és bo que la distància sigui curta perquè es generarà xivarri). El professor projecta una imatge semblant a les que es mostren a continuació i l'objectiu de cada parella és que la persona que veu la imatge la dicti a la persona que no la veu per aconseguir que aquesta segona la reproduïxi de la manera més fidel possible, evidentment, sense poder comunicar-se de cap manera amb la persona que dicta. Només pot parlar la persona que veu la

pissarra. Cada vegada que es canvia d'imatge es pot intercanviar el rol dels alumnes. Cada dictat es pot fer durar tant com es vulgui, però tres minuts per imatge permeten anar avançant per arribar a explicar el que es vol i permeten que hi hagi prou dinamisme a la classe, només cal tenir clar que no és prou temps i s'ha de fer saber als alumnes per evitar que es frustrin.



Font: elaboració pròpia

Una vegada acabat el dictat, pot ser bo fer una petita reflexió conjunta de les estratègies que s'han seguit per dictar la imatge i parlar dels elements que es van incorporant (graella i eixos). Hi ha alumnes que expliquen les imatges parant atenció als segments i d'altres que ho fan fixant-se en els punts. L'objectiu és col·locar punts, per això en una de les imatges només hi ha punts, però encara que hi hagi segments es pot dir als alumnes que el que es pretén és col·locar punts i després unir-los. Una bona idea és demanar-los que, abans de veure la imatge nova, pensin com a parella una estratègia que els permeti col·locar punts de manera eficient. La majoria de les parelles troben una manera eficient que després permetrà estirar el fil i explicar bé les coordenades cartesianes. Una bona manera de tancar l'activitat és que el professor/a acabi dictant una imatge a tots els alumnes: això li permet explicar el conveni de les coordenades mentre dicta i l'alumnat queda sorprès del fet que tots (llevat d'algun despistat) han obtingut el mateix resultat i que és idèntic al dibuix que s'estava dictant.

Saber #2.ESP.LS.A

A l'ARC trobem l'activitat d'Àlex Sayós per treballar el **saber #2.ESP.LS.A** [El joc dels vaixells](#), recurs que pretén consolidar la representació de punts en el pla, tenint com a referència un sistema de coordenades cartesià.

Saber #2.ESP.LS.A

Una proposta interessant per treballar també el **saber #2.ESP.LS.A** és l'activitat de l'NRICH [A Cartesian puzzle](#). L'alumnat té les coordenades d'alguns quadrilàters, però en cada cas falten les coordenades d'un dels vèrtexs. Es tracta de trobar les coordenades desconegudes i posar en joc també els coneixements sobre simetria.

Visualització i modelització geomètrica

Sabers

- Visualització de les funcions constant, lineal i afí com una recta amb unes característiques concretes. **[ESS]** **#ALG.RF**

- B. Visualització del teorema de Pitàgores com la relació entre les àrees dels quadrats construïts sobre els costats d'un triangle rectangle. #ESP.FG #ALG.PC
- C. Reconeixement de connexions entre el sentit espacial, la resta de sentits i altres àrees de coneixement properes a l'alumnat. [ESS]

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

Com s'ha comentat a les consideracions generals del sentit, el bloc Visualització i modelització geomètrica ha d'impregnar no només el sentit espacial, sinó tota la resta de sentits que es treballin a l'aula de matemàtiques. Aquesta impregnació ajudarà a la comprensió dels sabers d'altres sentits i alhora enfortirà la base dels continguts geomètrics.

L'ús de models geomètrics, a més d'ajudar tot l'alumnat en la comprensió de conceptes, és la via d'entrada a aquests conceptes per a alguns d'ells. El fet de mostrar un mateix concepte des de diferents punts de vista fa que més alumnes hi puguin accedir. Visualitzar geomètricament propietats aritmètiques o elements algebraics ajuda a fer palpables aquestes idees, i proporciona així una entrada menys abstracta per a una part important de l'alumnat.

Durant el segon curs d'ESO la geometria pren un pes important i és per aquest motiu que aquest bloc de sabers no és gaire extens, però malgrat això es deixa a criteri del professorat (i se l'anima a fer-ho!) el fet de «geometritzar» altres sabers.

Comentaris sobre les connexions

Les connexions amb altres sabers són l'essència d'aquest bloc de sabers i és lògic que el bloc de visualització estigui connectat als altres sentits. A causa del pes de la geometria en el curs, la quantitat de sabers d'aquest bloc no és gaire elevada, però tots ells estan connectats a algun bloc de sabers.

Per a aquest curs també es proposa la introducció a les funcions i el treball amb les funcions constants, lineals i afins. Sembla lògic que l'explicació de l'expressió algebraica d'aquest tipus de funcions ha d'anar acompanyada d'una visualització geomètrica que permeti relacionar cadascuna de les expressions amb un tipus concret de recta i, per tant, la connexió amb #ALG.RF ve donada de forma directa.

De forma interna dins el sentit espacial, i tal com ja s'ha esmentat en el bloc #ESP.FG, es considera molt important la visualització geomètrica del teorema de Pitàgores. Aquesta visualització no només hauria de ser-hi present durant el descobriment i la demostració del teorema, sinó també, encara que sigui només una visualització mental, sempre que s'utilitzi el teorema. La visualització del teorema de Pitàgores permet fer un treball amb programes de geometria dinàmica i, per tant, també es treballen els sabers del bloc #ALG.PC.

Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

Un dels sabers essencials d'aquest bloc és el **saber #2.ESP.VM.C**. Aquest es repeteix al llarg de tota l'etapa i sempre s'ha marcat com a essencial perquè, tal com s'ha anat repetint, es considera molt important que es geometritzin tants sabers com sigui possible, siguin del sentit que siguin.

De la resta de sabers, s'ha destacat el **#2.ESP.VM.A**, perquè es considera essencial tractar les funcions no només des d'un punt de vista algebraic, sinó veient com cadascuna de les expressions correspon a una representació concreta, en aquest cas rectes amb diferents característiques.

El **saber #2.ESP.VM.B** no s'ha destacat en aquest bloc, no perquè no es consideri important la visualització del teorema de Pitàgores, sinó al contrari, perquè s'ha destacat aquesta rellevància com un saber essencial en el bloc **#ALG.FG**.

Observacions sobre alguns sabers específics

El **saber #2.ESP.VM.A** pretén que en el moment de treballar les funcions constants, lineals i afins, es visualitzi que aquestes es poden representar per una recta en uns eixos de coordenades. Es considera que aquest treball és molt més ric si es fa en les dues direccions, és a dir, si es treballa la representació d'una determinada expressió i també l'expressió, encara que sigui de forma qualitativa, d'una determinada representació.

Recursos i activitats

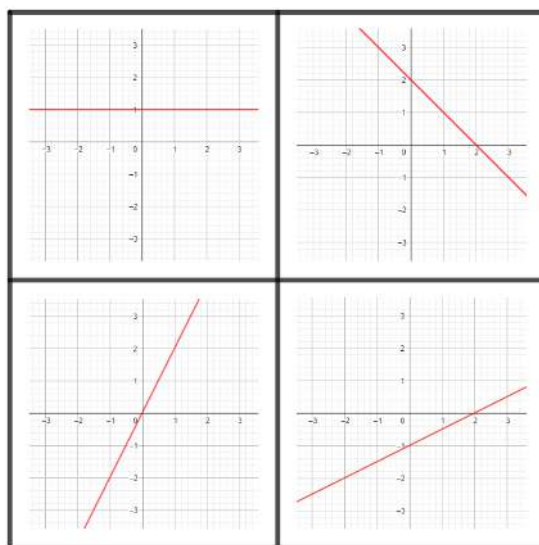
Recursos i activitats per treballar sabers concrets

Saber #2.ESP.VM.A

Un recurs que pot servir per treballar el **saber #2.ESP.VM.A**, i molts altres, és el WODB («*Which One Doesn't Belong?*»), que a vegades es tradueix al català com a «Queli», «quin és l'intrús?»), proposat com a recurs per treballar el **saber #2.ESP.CE.J** del sentit socioemocional.

En l'activitat es mostra a l'alumnat quatre imatges i es demana quina de les quatre és la intrusa, és a dir, quina no té una característica que tenen les altres tres o, a la inversa, quina és la característica que fa que cadascuna sigui especial. Una vegada mostrades les imatges, cal donar temps als alumnes perquè reflexionin sobre les característiques de cadascuna. Si és la primera vegada que fan l'activitat, és possible que busquin una sola imatge intrusa, però una vegada coneixen el recurs, ja saben que han de buscar les característiques que fan que cadascuna sigui especial. Aquesta activitat potencia molt el raonament i la comunicació d'idees.

Un exemple de Queli podria ser el que es mostra a la imatge següent, però se'n podrien fer moltes de diferents.

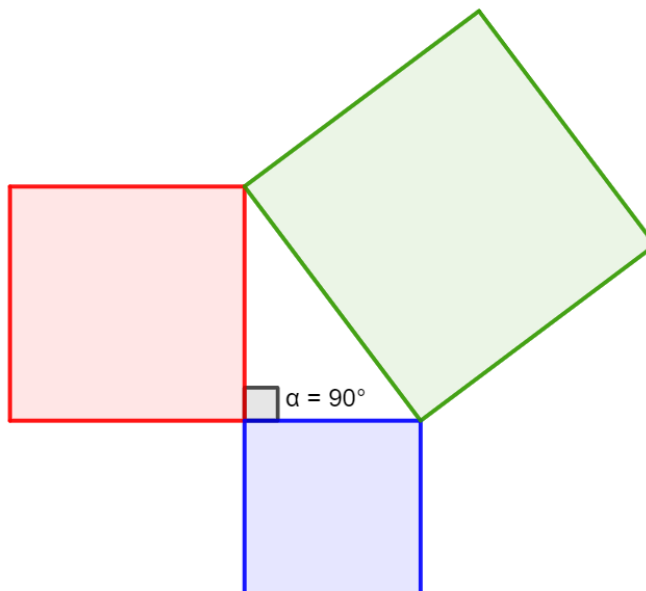


Font: elaboració pròpia

També és interessant que sigui el mateix alumnat qui generi aquestes Quelis. Podem trobar informació interessant sobre les Quelis a la campanya [Dimensió web](#) del CREAMAT.

Saber #2.ESP.VM.B

Quan es parla de visualitzar el teorema de Pitàgores, com en el **saber #2.ESP.VM.B**, el que es pretén és que es dibuixi, encara que sigui de forma mental, la imatge següent:

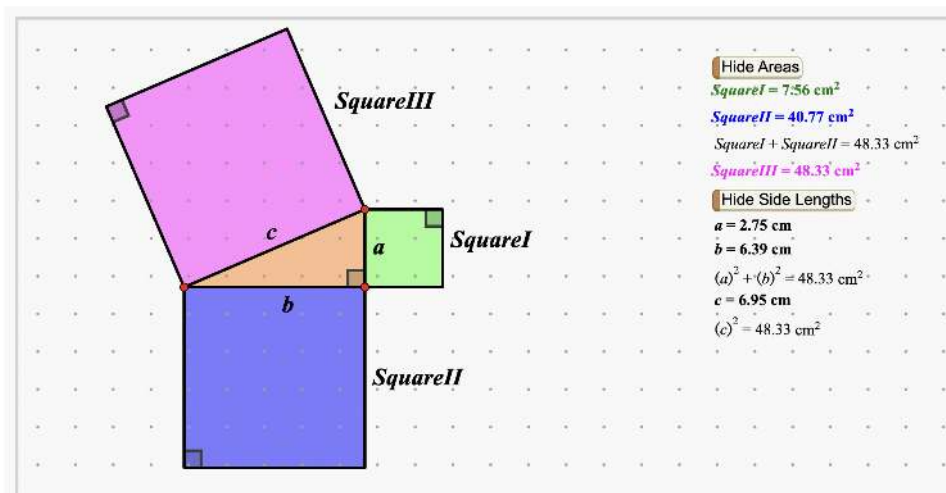


Àrea zona blava + Àrea zona vermella = Àrea zona verda

Font: elaboració pròpia

S'hauria d'aconseguir que aquesta visualització aparegués a les classes de matemàtiques des del moment que s'enuncia el teorema de Pitàgores i que aquesta continués per sempre, fins i tot quan els alumnes ja resolen problemes i situacions que requereixen l'ús del teorema. Que la visualització sigui present no vol dir que els alumnes sempre hagin de dibuixar aquesta representació, que és una opció, sinó que els alumnes, en el seu procés de resolució, l'han de tenir al cap. El moment en què cada persona necessiti deixar de fer el dibuix al paper per passar a fer-lo mentalment és diferent per a totes les persones i no és dolent que, com a professors, es permetin diferències entre l'alumnat.

Per treballar-ho a classe podem fer servir alguna *applet*, com la que es troba al web Illuminations de l'NCTM, [Pythagorean review](https://illuminations.nctm.org/Pythagorean-review/), en què l'alumnat pot experimentar movent els vèrtexs del triangle rectangle i observant que la relació entre les àrees es manté:



Font: [Pythagorean review](#), NCTM

Una altra opció per treballar aquest saber a classe és que siguin els mateixos alumnes els que hagin de fer la construcció amb algun programa de geometria dinàmica. Un exemple de les instruccions que es poden donar a l'alumnat és el següent (sempre que ja tinguin cert domini del programa):

1. En primer lloc, heu de construir un triangle rectangle (que continuï sent rectangle quan en moveu els vèrtexs). Haureu de fer servir l'eina de rectes perpendiculars.
2. Heu de construir un quadrat sobre cada costat del triangle:
 - a. Un quadrat el costat del qual sigui la mida d'un dels catets.
 - b. Un quadrat el costat del qual sigui la mida de l'altre catet.
 - c. Un quadrat el costat del qual sigui la hipotenusa.
3. Heu de mostrar el valor de l'àrea de cadascun dels quadrats.
4. Heu de comprovar que es compleix el teorema, sigui quin sigui el triangle rectangle. Moveu els vèrtexs del triangle i observeu si la relació entre les àrees es manté.

Saber #2.ESP.VM.C

Per treballar el **saber #2.ESP.VM.C**, reconeixement de connexions entre el sentit espacial, la resta de sentits i altres àrees de coneixement properes a l'alumnat, el professorat ha de plantejar situacions i activitats en què aquest reconeixement sigui possible. Tal com s'exposa a l'apartat «Blocs de competències», dins el punt de connexions amb altres matèries i amb l'entorn, a través del reconeixement, la descripció i la representació de figures planes i tridimensionals, és a dir, a través del coneixement espacial, es pot descriure i interpretar el món on vivim. El treball del sentit espacial a 2n d'ESO ens obre les portes per poder connectar les matemàtiques amb altres matèries i disciplines de maneres molt diverses. El treball dels teoremes de Tales i de Pitàgores ens proporciona contextos històrics on poder establir connexions interessants, i la interpretació de plànols i mapes i la creació de maquetes ens poden ser molt útils a les matèries de tecnologia, física i química, biologia, educació visual o en molts projectes STEAM.

També cal fer notar, com es comenta també a l'apartat «Blocs de competències», dins el punt de connexions amb altres parts de la matemàtica, que el treball de les figures i cossos geomètrics connecta directament amb el sentit de la mesura, donat que ens permet el càlcul de longituds, àrees i volums. Amb el treball de proporcionalitat geomètrica, el sentit espacial connecta amb el sentit numèric, per una banda, però també amb el sentit algebraic. Amb aquest últim sentit, s'estableix una altra connexió forta quan es treballen les coordenades cartesianes, eina fonamental per representar funcions.

Blocs de competències: processos matemàtics i gestió socioemocional

El conjunt de sabers que constitueixen el sentit espacial, com tots els altres sentits, s'ha de relacionar amb el conjunt de competències del currículum. Sense un coneixement dels sabers, difícilment es poden desenvolupar els processos per avançar en l'assoliment de les competències i, d'altra banda, la manera com s'introdueixen, es construeixen i s'utilitzen els sabers és clau per dur a terme un treball competencial.

Així doncs, tots els sabers poden contribuir a desenvolupar qualsevol competència si es treballen en activitats adequades. Igualment, un saber pot contribuir a desenvolupar diverses competències.

Es presenta la relació entre els sentits i les competències específiques a través dels processos: resolució de problemes (competències específiques CE 1 i CE 2); raonament i prova (competències específiques CE 3 i CE 4); connexions, en què distingim les internes (competència específica CE 5) i les externes (competència específica CE 6); comunicació i representació (competència específica CE 7), i gestió socioemocional (competències específiques CE 8 i CE 9).

Aquesta relació, pel que fa al sentit espacial, es concreta, en el marc d'aquest exemple, de la manera que es descriu en els apartats següents, tot i que poden existir altres anàlisis igualment vàlides.

Resolució de problemes (CE 1 i CE 2)

El treball dels sabers del sentit espacial a 2n d'ESO propicia que l'alumnat investigui dibuixant, visualitzant, transformant, comparant i classificant objectes geomètrics. Si escollim bons problemes podem aconseguir que l'alumnat compregui a fons les idees geomètriques més rellevants del curs. La proporcionalitat geomètrica i el teorema de Pitàgores ens proporcionen molts contextos de resolució de problemes i investigacions, amb varietats d'estratègies de resolució per mostrar i treballar a l'aula.

Sabers

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar la resolució de problemes són, entre altres:

- El **saber #2.ESP.FG.B**, que permet plantejar situacions en què es necessita el teorema de Tales per arribar a la solució i, per tant, contribueix al desenvolupament de la CE 1 i la CE 2.
- El **saber #2.ESP.FG.D**, que interpel·la directament al desenvolupament de la CE 1 i la CE 2.
- El **saber #2.ESP.FG.E**, en què es treballen la classificació i les propietats dels cossos geomètrics, i això permet plantejar reptes entorn dels poliedres i els cossos geomètrics, fet que contribueix al desenvolupament de les competències CE 1 i CE 2.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diversos sabers fan referència directa al procés de resolució de problemes. Per exemple:

- L'activitat «Tales, ombres i altures», on es treballa el **saber #2.ESP.FG.B**, planteja el repte de trobar una altura inaccessible. Un context ideal per treballar tant la CE 1 com la CE 2.
- L'activitat «Mirallet, mirallet, per què m'has fet tan petit?», per treballar també el **saber #2.ESP.FG.B** a través d'un context real, planteja situacions i preguntes que requereixen l'ús d'eines conegudes per trobar-ne la solució, de manera que s'afavoreix el desenvolupament de la CE 1.
- L'activitat «Poliedres amb brics» (**saber #2.ESP.FG.E**) pot ser la base de bones investigacions, donat que es pot estirar o ampliar i, per tant, contribueix al desenvolupament de la CE 1 i la CE 2.
- L'activitat «Dissenyem una llauna de refresc» (**saber #2.ESP.FG.F**) proporciona un context que

genera un problema que permet a l'alumnat realitzar una investigació i fomenta el treball de la CE 1 i, sobretot, la CE 2.

- Als problemes de la Prova Cangur hi trobem múltiples propostes per treballar diversos **sabers** del bloc **#2.ESP.FG** a través de la resolució de problemes, que contribueixen, per tant, al desenvolupament de la CE 1 i la CE 2.

Raonament i prova (CE 3 i CE 4)

La geometria proporciona un context excel·lent per treballar el raonament matemàtic. L'estudi i classificació dels objectes geomètrics permet proposar activitats de cerca de patrons i detecció de regularitats, formular conjectures i generalitzacions sobre el que s'ha observat, validar les conjectures i construir arguments matemàtics. Un exemple clar n'és l'estudi de la característica d'Euler. A més, el teorema de Pitàgores proporciona l'espai idoni per començar a treballar demostracions matemàtiques a l'aula.

Sabers

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar el raonament són, entre altres:

- El **saber #2.ESP.FG.B**, que implica la comprensió del teorema de Tales, fet que porta implícit cert grau de raonament matemàtic i, per tant, promou especialment el desenvolupament de la CE 3.
- Anàlogament, la comprensió del teorema de Pitàgores també contribueix a la CE 3. Per reforçar aquesta contribució, el **saber #2.ESP.FG.C** incorpora la demostració del teorema.
- El **saber #2.ESP.FG.E**, que inclou l'estudi i la classificació de cossos geomètrics i, a més, permet el treball de la demostració que només hi ha cinc poliedres regulars, per tant, afavoreix el treball de la CE 3 i la CE 4.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diversos sabers fan referència directa al procés de raonament i prova. Per exemple:

- L'activitat «Figures semblants» (**saber #2.ESP.FG.A**) promou el raonament i la comunicació d'aquest raonament preguntant sobre la semblança, o no, d'un conjunt de figures, de manera que es treballa la CE 3. A més, promou l'ús i, per tant, l'aprenentatge dels programes de geometria dinàmica, que treballen també la CE 4.
- L'activitat «Descoberta del teorema de Pitàgores» (**saber #2.ESP.FG.C**), si es fa amb programes de geometria dinàmica, contribueix a la CE 4. Aquest estudi pretén que, amb un conjunt de dades prou gran, els alumnes cerquin patrons i facin conjectures, i acaba amb un treball entorn de les demostracions del teorema. Aquestes dues accions promouen el treball de la CE 3.
- La seqüència d'activitats «Un tangram diferent» (**saber #2.ESP.FG.C**) aborda la cerca de criteris de classificació de les peces d'un tangram i, per tant, afavoreix el desenvolupament de la CE 3 i la CE 4.
- L'activitat de construcció de sòlids platònics (**saber #2.ESP.FG.E**) proposa trobar-los tots. Mitjançant un procediment exhaustiu s'arriba a demostrar que només n'hi ha cinc. La mateixa demostració i el mètode utilitzat contribueixen a la millora de la CE 3.
- L'activitat «Quin és l'intrús?» (**saber #2.ESP.VM.A**) pretén que s'argumenti de manera raonada el motiu pel qual totes les imatges poden ser la que no pertany al conjunt, de manera que es potencia la CE 3.
- L'activitat que busca construir amb un programa de geometria dinàmica la imatge del teorema de Pitàgores (**saber #2.ESP.VM.B**) fomenta la millora de la CE 4.

Connexions amb altres parts de la matemàtica (CE 5)

El treball de les figures i cossos geomètrics connecta directament amb el sentit de la mesura, atès que ens permet el càlcul de longituds, àrees i volums. Amb el treball de proporcionalitat geomètrica, el sentit espacial connecta amb el sentit numèric, per una banda, però també amb el sentit algebraic. Amb aquest últim sentit s'estableix una altra connexió forta quan es treballen les coordenades cartesianes, una fonamental per representar funcions.

Sabers

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar les connexions internes són, entre altres:

- El **saber #2.ESP.FG.B**, que connecta de manera directa amb el raonament proporcional que es treballa des del sentit numèric, i potencia d'aquesta manera al desenvolupament de la CE 5.
- El **saber #2.ESP.FG.E**, que desembocarà en la mesura de les magnituds dels cossos geomètrics, de manera que contribueix a la CE 5 amb una connexió evident entre el sentit espacial i el de la mesura.
- De la mateixa manera, el **saber #2.ESP.FG.F** també promou al desenvolupament de la CE 5.
- El **saber #2.ESP.LS.A**, que afavoreix el desenvolupament de la CE 5 connectant els sentits espacial i algebraic.
- El **saber #2.ESP.VM.A**, que connecta determinats tipus de funcions amb una representació geomètrica concreta, i impulsa, així, el desenvolupament de la CE 5.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar sabers aporten o utilitzen connexions internes. Per exemple:

- L'activitat de descoberta del teorema de Pitàgores (**saber #2.ESP.FG.C**) requereix la mesura d'àrees, per tant, connecta amb el sentit de la mesura. A més, pretén que l'alumnat cerqui patrons en unes dades obtingudes. Aquests dos aspectes col·laboren a la millora de la CE 5.
- La seqüència «Un tangram diferent» (**saber #2.ESP.FG.C**) s'inicia estudiant i classificant polígons, però requereix també un treball de mesura de perímetres, àrees i angles. També relaciona les fraccions amb la superfície i, a la segona part, hi ha treball de patrons i llenguatge algebraic. És evident, per tant, el treball de la CE 5.
- L'activitat de descoberta de la relació d'Euler (**saber #2.ESP.FG.E**) proposa una investigació entorn de diferents poliedres i, cercant patrons, descobrir la característica d'Euler. Treballar els patrons en un entorn geomètric contribueix al treball de la CE 5.
- L'activitat de localització de punts al pla «A Cartesian puzzle» (**saber #2.ESP.LS.A**) connecta la localització de punts amb les propietats de les figures simètriques, i propicia així la millora de la CE 5.

Connexions amb altres matèries i amb l'entorn (CE 6)

A través del reconeixement, la descripció i la representació de figures planes i tridimensionals, és a dir, a través del coneixement espacial, es pot descriure i interpretar el món on vivim. El treball del sentit espacial a 2n d'ESO ens obre les portes per poder connectar les matemàtiques amb altres matèries i disciplines de formes molt diverses. El treball dels teoremes de Tales i de Pitàgores ens proporciona contextos històrics on poder establir connexions interessants i la interpretació de plànols i mapes i la creació de maquetes ens pot ser molt útil a les matèries de tecnologia, física i química, biologia, educació visual o en molts projectes STEAM.

Sabers

A tall d'exemple, esmentem alguns sabers d'aquest sentit que, entre altres poden ajudar a reforçar les connexions externes:

- El **saber #2.ESP.FG.B** proposa treballar el teorema de Tales a través de problemes d'escales i altres contextos, de manera que s'estableixen connexions amb situacions externes i s'afavoreix el desenvolupament de la CE 6.
- El **saber #2.ESP.FG.D** pretén resoldre problemes en contextos tant matemàtics com no matemàtics i, per tant, potencia el desenvolupament de la CE 6.
- El **saber #2.ESP.FG.E** estudia les propietats dels poliedres i permet establir connexions amb les formes del nostre entorn i així aprofundir en el treball de la CE 6.
- El **saber #2.ESP.LS.A** connecta amb la vida quotidiana dels alumnes i amb altres àrees parlant d'altres tipus de coordenades diferents de les cartesianes, com podrien ser les geogràfiques, treballant així la CE 6.
- El **saber #2.ESP.VM.C** promou la geometrització de qualsevol àrea del coneixement i, per tant, el desenvolupament de la CE 6.

Recursos

Molts dels recursos descrits per treballar sabers del sentit espacial ofereixen oportunitats per fer connexions externes. Per exemple:

- Les activitats sobre escales, mapes i plànols (**saber #2.ESP.FG.B**) plantegen contextos en què treballar la proporcionalitat geomètrica i el teorema de Tales, per tant, fomenten el treball de la CE 6.
- L'itinerari «La volta al món en 8... edificis» (**saber #2.ESP.FG.E**) proposa cercar edificis amb forma de cossos geomètrics i fer-ne un estudi. Així, es connecta la geometria amb l'entorn i es contribueix a la mirada matemàtica i al desenvolupament de la CE 6.

Comunicació i representació (CE 7)

L'alumnat estudia les característiques i propietats de les figures i cossos geomètrics i, amb l'ús de diversos tipus de representacions, pot conceptualitzar i també argumentar sobre les seves troballes. A 2n d'ESO es fa un petit pas per dotar de més formalisme el treball geomètric, i aprendre a comunicar els raonaments de manera precisa esdevé necessari de cara a crear uns bons fonaments per als cursos posteriors.

Sabers

A tall d'exemple, hi ha alguns sabers d'aquest sentit que, entre altres, poden ajudar a reforçar la comunicació i la representació:

- El **saber #2.ESP.FG.E** implica un treball profund de raonament que a la vegada s'ha d'argumentar, per tant, propicia el treball en comunicació i representació, és a dir el treball de la CE 7.
- El **saber #2.ESP.FG.F** és, en si mateix, una representació concreta d'un objecte matemàtic, per tant, treballant aquesta representació s'afavoreix el desenvolupament de la CE 7.
- El **saber #2.ESP.VM.B** pretén comunicar el teorema de Pitàgores amb una representació concreta que n'afavoreixi la comprensió i potencia, així, el desenvolupament de la CE 7.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar sabers del sentit espacial fan referència al procés de comunicació i representació. Per exemple:

- Les activitats sobre figures semblants «Figures semblants» i «Propietats de les figures semblants» (**saber #2.ESP.FG.A**) promouen el raonament i la comunicació d'aquest raonament preguntant sobre la semblança, o no, d'un conjunt de figures, i treballen així la CE 7.
- La seqüència d'activitats «Un tangram diferent» (**saber #2.ESP.FG.C**) inclou parts que, en si mateixes, impliquen que s'estableixin converses matemàtiques a l'aula, de manera que es provoca un treball de comunicació profund i, per tant, es desenvolupa la CE 7.
- L'activitat «Introducció a les coordenades» (**saber #2.ESP.LS.A**) impulsa la comunicació d'idees matemàtiques rellevants entre l'alumnat amb un dictat, cosa que contribueix a la CE 7.
- L'activitat «Quin és l'intrús?» (**saber #2.ESP.VM.A**) afavoreix la comunicació de conceptes matemàtics mitjançant l'argumentació sobre quina de les imatges és la que no pertany al conjunt, i potencia així la CE 7.
- L'activitat de visualització del teorema de Pitàgores (**saber #2.ESP.VM.B**) és en si mateixa la representació d'un concepte matemàtic, fet que contribueix a la CE 7.

Gestió socioemocional (CE 8 i CE 9)

D'una banda, com ja s'ha tractat al punt anterior, el treball dels sabers del sentit espacial afavoreix la comunicació i l'argumentació i permet, així, fer una reflexió sobre la comprensió individual i sobre les idees dels altres, i també crea l'oportunitat de valorar les estratègies pròpies i les dels companys. D'altra banda, el treball del sentit espacial dona peu a l'alumnat a proposar i poder treballar molt bones investigacions. Aquestes investigacions permeten treballar en equip, fomentant la col·laboració entre iguals, i també suposen un repte, el treball del qual pot ajudar a adquirir confiança en les pròpies capacitats i desenvolupar actituds positives.

A més, el sentit espacial és un espai idoni per a la manipulació, que és una eina important per vèncer els possibles bloquejos i afavorir la inclusió de tot l'alumnat.

La gestió socioemocional està vinculada a dues competències específiques:

- CE 8, relacionada amb el desenvolupament d'habilitats personals com les creences, les actituds i les emocions envers les matemàtiques.
- CE 9, centrada en el desenvolupament d'habilitats socials com el treball en equip i la presa de decisions.

A continuació s'indiquen alguns aspectes que, treballats des del sentit espacial, poden contribuir al desenvolupament de les competències CE 8 i CE 9.

Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 8

- Les activitats de resolució de problemes faciliten el treball socioemocional en tant que pretenen ser accessibles a tothom i, per tant, evitar els bloquejos, però també tenir diferents enfocaments possibles i fins i tot anar una mica més enllà, amb la qual cosa són motivadores també per a l'alumnat més avançat. La resolució de problemes és un entorn ideal per treballar la perseverança, la tolerància a la frustració o la gestió positiva de l'error. N'és un exemple l'activitat «Tales, ombres i altures» (**saber #2.ESP.FG.A**).
- La sorpresa també és un bon element per despertar la curiositat i fomentar una bona actitud de cara a les matemàtiques, i una bona activitat per provocar-la és «Mirallet, mirallet, per què m'has fet tan petit?» (**saber #2.ESP.FG.B**).

- Les activitats del tipus «Quin és l'intrús?» (**saber #2.ESP.VM.A**) estan pensades perquè es pugui contestar qualsevol de les quatre opcions i no hi hagi una única argumentació correcta. D'aquesta manera, qualsevol proposta dels alumnes ben argumentada, encara que sigui diferent de la dels companys, és bona, i es potencia així la participació i la confiança de l'alumnat.
- Les activitats del tipus «què observes i què et preguntes» que podem trobar dins la seqüència «Un tangram diferent» (**saber #2.ESP.FG.C**) acostumen a provocar més participació i una valoració més bona de les diverses perspectives que aporten els companys i companyes, un fet que implica l'alumnat activament.
- Un altre tipus d'activitat que ajuda a trencar falses creences i actituds negatives són les investigacions. En l'activitat «Construcció de sòlids platònics» (**saber #2.ESP.FG.E**) partim de la manipulació de materials, la qual cosa facilita l'entrada a tot l'alumnat, per anar construint un raonament que va trobant els poliedres possibles i descartant els altres casos. Previsiblement, tot l'alumnat trobarà alguna figura mentre va manipulant i construint. És una activitat en què tothom podrà dir alguna cosa i que, per tant, fomenta la participació i la confiança. El mateix passa amb les activitats més contextualitzades en forma de miniprojectes, com «Dissenyem una llauna de refresc».
- La gestió que es faci de les activitats és molt important quant al desenvolupament de la CE 8. Quan, en el marc d'una investigació com l'anterior, proposem treballar en equip, tenim l'oportunitat d'observar les troballes de cada grup i, a l'hora de posar-les en comú, podem donar veu a tots els grups, començant per les troballes més senzilles, que podem demanar que expliqui el grup que no ha arribat als raonaments més complexos.
- Quan el que busquem és una solució única, com per exemple la característica d'Euler, es pot pensar en un format més «competitiu», de manera que no s'expliquin els descobriments que van fent d'un grup a l'altre i tots tinguin, així, l'oportunitat d'arribar a la solució.
- Tot el bloc Visualització i modelització geomètrica (**#2.ESP.VM**) és clau. Els models geomètrics són una eina que afavoreix la comprensió dels sabers, ja que són una forma propera d'acostar aquests sabers a l'alumnat i fer que les activitats siguin atractives, d'inici, per a tothom. Poden esdevenir una eina poderosa per vèncer pors.

Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 9

- Les activitats que promouen la recerca de patrons, com per exemple la descoberta del teorema de Pitàgores (**saber #2.ESP.FG.C**) o la característica d'Euler (**saber #2.ESP.FG.E**), són un bon context per fer un treball col·laboratiu en gran grup. En aquests casos, la feina de tot l'alumnat és necessària per tenir una base de dades prou gran que permeti fer observacions per arribar a concloure les propietats que es busquen (o altres que poden aparèixer).
- Els sabers del bloc de figures geomètriques (**saber #2.ESP.FG**) que treballen la classificació i l'estudi de propietats són una bona font d'inspiració per trobar investigacions que permeten el treball col·laboratiu. Les investigacions proposades, com «Propietats de les figures semblants» (**saber #2.ESP.FG.A**), treballades de manera col·laborativa poden ajudar a construir coneixement de manera col·lectiva. L'alumnat ha d'escoltar l'opinió dels altres membres de l'equip i ha d'arribar a acords valorant l'opinió i les argumentacions dels companys i companyes, per tal de trobar la solució del repte plantejat.
- Els projectes amb connexions externes, com ara el projecte «Home (Casa)» (**saber #2.ESP.FG.B**), «Tales, ombres i altures» (**saber #2.ESP.FG.A**), «Sistema solar a escala» (**saber #2.ESP.FG.B**), «Poliedres amb brics» (**saber #2.ESP.FG.E**) o «Dissenyem una llauna de refresc» (**saber #2.ESP.FG.F**), promouen el treball col·laboratiu amb un objectiu comú, que és el de dissenyar i construir un producte final de manera col·laborativa. Això requerirà una feina d'equip en la qual s'haurà de planificar, arribar a acords o distribuir tasques, entre d'altres.