

TOR 2n d'ESO: Sentit de la mesura

Consideracions generals	1
Blocs de sabers	3
Magnitud	3
Sabers	3
Descripció i orientacions	3
Recursos i activitats	4
Mesurament	7
Sabers	7
Descripció i orientacions	7
Recursos i activitats	9
Estimació i relacions	30
Sabers	30
Descripció i orientacions	30
Recursos i activitats	31
Blocs de competències: processos matemàtics i gestió socioemocional	34
Resolució de problemes (CE 1 i CE 2)	34
Sabers	35
Recursos	35
Raonament i prova (CE 3 i CE 4)	35
Sabers	35
Recursos	36
Connexions amb altres parts de la matemàtica (CE 5)	36
Sabers	36
Recursos	37
Connexions amb altres matèries i amb l'entorn (CE 6)	37
Sabers	37
Recursos	37
Comunicació i representació (CE 7)	38
Sabers	38
Recursos	38
Gestió socioemocional (CE 8 i CE 9)	39
Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 8:	39
Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 9:	40

Consideracions generals

La mesura constitueix una de les principals activitats humanes a partir de les quals es desenvolupa la matemàtica. Està present en totes les cultures, atès que permet comparar, ordenar, estimar, calcular, amb més o menys precisió, diferents magnituds. (Bishop, 1999)

El sentit de la mesura engloba un conjunt de sabers agrupats en tres blocs principals: Magnitud, Mesurament i Estimació i relacions. Tot i que aquesta organització proporciona una estructura clara i global del que es vol treballar amb l'alumnat, a l'aula la seva aplicació pràctica no segueix una seqüència rígida. En les activitats d'experimentació, els sabers d'aquests blocs es connecten de manera natural, interactuant entre si per facilitar la construcció de coneixements més profunds.

A 1r d'ESO s'ha donat continuïtat al treball iniciat a primària per tal de consolidar els sabers fonamentals adquirits en aquesta etapa. S'ha posat especial èmfasi en l'establiment d'unitats patró de mesura adaptades a diferents situacions, sovint partint del propi cos (unitats antropomètriques) o d'objectes propers a l'alumnat. Aquesta aproximació ha permès comprendre conceptes com la longitud, el pes o el volum, alhora que s'ha introduït l'origen i la rellevància del sistema mètric, destacant el naixement del metre. Paral·lelament, s'han mesurat o calculat l'amplitud d'angles, perímetres i àrees de figures planes, afavorint una base sòlida per al treball en cursos posteriors. Pel que fa a l'estudi de fenòmens aleatoris simples, s'han posat els fonaments partint de l'experimentació directa, previ al càlcul de la probabilitat d'un esdeveniment a través de la regla de Laplace. Aquest enfocament ha permès desenvolupar intuïcions i habilitats inicials en l'àmbit del tractament de la incertesa, fomentant la curiositat i l'hàbit de conjecturar i comprovar resultats.

De cara a 2n d'ESO, es proposa continuar aquesta línia de treball. Lligat al sentit espacial, es preveu ampliar l'estudi de figures bidimensionals i introduir el treball amb figures tridimensionals com prismes i cilindres. A més, es planteja la descoberta i l'experimentació per l'aprenentatge dels teoremes de Tales i Pitàgores, que proporcionaran eines potents per abordar problemes més avançats. Pel que fa al tractament de la incertesa, s'ampliarà l'estudi als esdeveniments compostos, mantenint la mateixa metodologia basada en la conjectura, l'experimentació i la descoberta. Aquest fet permetrà una transició natural cap a la formalització dels càlculs mitjançant la regla de Laplace. D'aquesta manera, s'assegura una continuïtat i coherència amb el treball realitzat en cursos anteriors, sempre prioritzant la manipulació, la descoberta i la comprensió significativa dels conceptes.

El treball d'aquest sentit es beneficia enormement de les connexions amb altres sentits matemàtics, així com amb altres àrees de coneixement. No obstant això, també cal dedicar moments específics a explorar-lo de forma autònoma, destacant aquells aspectes únics que li donen valor, com les relacions entre magnituds en objectes bidimensionals i tridimensionals. Aquestes connexions proporcionen exemples rellevants per comprendre la importància del sentit de la mesura en contextos diversos.

De manera paral·lela, és essencial desenvolupar aquests sabers seguint els processos matemàtics, que inclouen la resolució de problemes, el raonament i prova, les connexions internes i externes, la comunicació, la representació i el desenvolupament socioafectiu. La resolució de problemes, en particular, actua com a pilar central de l'aprenentatge matemàtic, ja que vertebrava els altres processos i orienta les activitats cap a un objectiu concret. Com afirma Lluís Antoni Santaló (Santaló, 1975): «Ensenyar matemàtiques ha de ser equivalent a ensenyar a resoldre problemes. Estudiar matemàtiques no ha de ser res més que pensar en la solució de problemes.» Aquesta perspectiva situa el procés de resolució de problemes al centre, no només com a finalitat en l'aprenentatge de l'alumne, sinó també com a origen i camí.

Tal com indica el professor Anton Aubanell en les [Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria](#) (Aubanell, 2015, pàg. 72):

[...] són moltes les activitats que es poden fer a classe a l'entorn de la mesura. Serà bo que els alumnes treballin en grups, amb un bon grau d'autonomia i amb un ambient d'intercanvi d'idees, al llarg d'un procés per al qual es pot proposar un cert patró general de possibles accions:

- 1. Conjecturar, fer una estimació de la mesura que es busca. Si pot ser, posar-la en comú argumentant les raons que l'han fonamentada.*
- 2. Establir la unitat de mesura més adequada.*
- 3. Buscar o construir l'eina de mesura i conèixer bé com fer-la servir: cintes mètriques, làsers, goniòmetres, etc. La construcció d'un goniòmetre per part del mateixos alumnes és una proposta molt instructiva.*
- 4. Mesurar tant com calgui amb les millors condicions per garantir la màxima exactitud.*
- 5. Prendre consciència de l'existència d'errors en la mesura i de procediments que poden millorar-ne la precisió. Per exemple, fer la mateixa mesura repetidament i fer la mitjana dels resultats.*
- 6. A vegades s'estarà fent una mesura indirecta. En aquest cas, la mesura que s'està determinant no és la que s'ha mesurat directament sinó que ha de ser deduïda per mitjà de procediments geomètrics o trigonomètrics. En aquests casos cal tenir en compte dues coses:*
 - El domini dels conceptes i les relacions que cal posar en joc. (...)*
 - La propagació d'errors en el procés de càlcul. Els errors en els mesuraments inicials poden créixer i afectar significativament el resultat final. (...) Sovint, en aquest context, els alumnes tenen tendència a donar el resultat de les operacions fetes amb moltes xifres decimals, com si més xifres impliquessin més exactitud. És important subratllar el fet que no podem atorgar al resultat final més exactitud que la que tenien les dades de partida i que, potser, encara se n'ha perdut al llarg del procés de càlcul.*
- 7. Valorar la plausibilitat de la mesura obtinguda («Té sentit en el context?» «És coherent amb altres dades de què es disposa?») i la seva precisió, i expressar-la adequadament atenent, en especial, a les xifres significatives i a les unitats.*
- 8. Si és possible, fer comprovacions comparant el resultat obtingut en el mesurament amb mesures procedents d'altres fonts: si es tracta d'un edifici, preguntant a un veí; si es tracta d'un objecte petit, submergint-lo en aigua i mesurant l'augment de volum; en altres casos, embolicant l'objecte per aproximar-nos a la mesura de la seva àrea o emplenant-lo per al volum.*
- 9. Reprendre les conjectures fetes inicialment i valorar el nivell d'aproximació que s'havia assolit.*

Tenint en compte el caràcter eminentment experimental que caracteritza el desenvolupament d'aquest sentit, es recomana abordar-lo integrant els processos matemàtics amb activitats que combinin els tres blocs de sabers. D'aquesta manera, es posa el focus en el càlcul de mesures directes com a base per construir progressivament coneixement significatiu. Els conceptes teòrics es consolidaran en el moment en què sorgeixin com a necessaris dins del context d'una activitat, evitant anticipar-los de manera desconnectada de la pràctica. Entenem també que cal consolidar algunes tècniques i processos que van

apareixent amb les propostes que es realitzen, com per exemple la mecànica dels factors de conversió. En aquests casos però, preferim que es presentin a partir d'activitats de pràctica productiva, fent que aquest objectiu s'assoleixi de manera més indirecta ambientant-lo en la resolució d'un problema, en lloc de fer-ho amb activitats de pràctica reproductiva, només enfocades a l'automatització de les destreses bàsiques. Les representacions i resolucions de situacions reals de mesura directa actuaran com a models útils, que facilitaran a l'alumnat l'enfrontament a noves situacions i l'apropament gradual al càlcul de mesures indirectes. En aquesta línia, ens agradaria posar en valor els lemes 1 i 5 citats per Claudi Alsina en la conferència inaugural del passat 9 de novembre de 2024 en la jornada anual d'ABEAM:

- «LEMA 1. L'amor a les matemàtiques requereix partir d'uns coneixements mínims.»
- “LEMA 5. L'amor a les matemàtiques requereix fer assaigs i experimentació.»

Blocs de sabers

Magnitud

Sabers

- A. Establiment d'unitats de mesura adequades a cada situació per al càlcul de perímetres, àrees i volums. [ESS]
- B. Relació entre volum i capacitat d'un objecte per comparar les unitats de mesura corresponents.
- C. Ús de factors de conversió que permetin comparar unitats de mesura d'una mateixa magnitud. [ESS]
#NUM.RP

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

L'ús adequat de les magnituds i les unitats de mesura és fonamental per entendre el món físic i els fenòmens que ens envolten. Des de la vida quotidiana fins a l'àmbit científic, les magnituds ens permeten quantificar i descriure la realitat, facilitant la comunicació de resultats, l'anàlisi de problemes i la presa de decisions. La capacitat de seleccionar i utilitzar correctament les unitats de mesura, tant en situacions quotidianes com en altres de més complexes, és una habilitat transversal que no només involucra la matemàtica, sinó també la física, la química, la biologia i moltes altres disciplines. Aquesta habilitat és especialment rellevant en un món globalitzat, on la diversitat de sistemes de mesura continua sent una realitat, amb la coexistència del sistema internacional (SI) amb altres sistemes tradicionals com el sistema anglosaxó.

Comentaris sobre les connexions

Dins de les matemàtiques, els sabers sobre magnituds es connecten amb diversos sentits matemàtics. Per exemple, el sentit espacial és crucial quan treballem amb unitats de volum, àrea i perímetre. Els alumnes han de desenvolupar la capacitat d'imaginar i visualitzar objectes tridimensionals per entendre com canvien aquestes magnituds en funció de les seves dimensions. Les connexions amb el sentit numèric es fan evidents en l'ús de factors de conversió per establir les unitats de mesura adequades a cada context.

Aquestes connexions no només són rellevants dins de les matemàtiques, sinó que s'estenen a altres disciplines com la física, la química o la tecnologia. A la física, per exemple, la comprensió dels factors de conversió d'unitats de mesura de longitud, temps o velocitat serà necessària per abordar les primeres situacions relacionades amb moviments rectilinis uniformes. A química, la conversió entre unitats de volum

i capacitat és crucial per mesurar algunes magnituds de les substàncies, com la densitat, en experiments de laboratori. Amb aquestes connexions internes i externes, l'alumnat no només adquireix competències matemàtiques, sinó també una comprensió més àmplia i interdisciplinària que pot aplicar en altres camps de coneixement.

Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

Un dels sabers essencials en el treball amb magnituds és el saber **#2.MES.MA.A**. Identificar la unitat adequada en cada context és una habilitat indispensable tant per resoldre problemes com per comprendre els usos pràctics de la mesura en la vida diària. Des de l'antiguitat, l'establiment de diferents unitats de mesura ha estat un punt clau per al desenvolupament científic i comercial de les societats. Els alumnes, per tant, han de ser capaços d'adaptar-se a aquestes variacions i utilitzar amb seguretat unitats com els metres, litres o grams, així com les seves unitats derivades.

D'altra banda, el saber **#2.MES.MA.C** permetrà comparar unitats del sistema internacional amb altres sistemes de mesura. Aquesta destresa adquireix gran rellevància en contextos científics, on és important garantir que totes les mesures siguin coherents i comparables. Per exemple, la capacitat d'entendre la conversió entre litres i metres cúbics, o entre graus Celsius i Fahrenheit, és bàsica en el treball experimental. En contextos quotidians, els alumnes també poden trobar aquestes conversions, com ara convertir entre quilòmetres i milles en un viatge o entre hectàrees i metres quadrats en el sector agrícola.

Observacions sobre alguns sabers específics

La relació entre volum i capacitat d'un objecte és un altre saber que té una aplicació pràctica molt directa en la vida diària. Tot i que científicament el volum és la noció correcta, en molts àmbits socials i comercials es continua fent servir el concepte de capacitat per a líquids o altres substàncies. Els alumnes han de ser capaços de diferenciar entre aquestes dues nocions i utilitzar-les adequadament en funció del context. Per exemple, mentre que en la compra de begudes es parla habitualment en litres, la capacitat d'un contenidor més gran pot mesurar-se en metres cúbics, i caldrà saber establir la conversió entre aquestes unitats.

Recursos i activitats

Recursos i activitats per treballar sabers concrets

Establiment d'unitats de mesura adequades a cada situació, per al càlcul de perímetres, àrees i volums.

Entendre quines unitats són les més adequades per a cada situació és fonamental en el context del sentit de la mesura. En aquesta línia, el saber **#2.MES.MA.A** esdevé un aspecte clau que l'alumnat ha de desenvolupar al llarg de tota la secundària. Aquesta habilitat no només els permetrà resoldre problemes matemàtics, sinó que també els ajudarà a interpretar situacions en què la mesura té un paper crucial. Un aspecte interessant a treballar amb els estudiants és l'evolució de les unitats de mesura al llarg de la història, amb especial atenció a aquelles que fan referència al volum o la capacitat d'un objecte. Unitats com els [almuds](#), les [barcelles](#), les [quarteres](#) i les [faneques](#), entre d'altres, entraran en escena, i el fet que tinguessin significats diferents segons el territori subratlla la importància de l'establiment del sistema mètric.

En l'actualitat, fer un recull d'unitats de mesura que apareixen en etiquetes d'ampolles o llaunes pot ser una activitat molt enriquidora. Les unitats utilitzades, els seus múltiples i submúltiples, ens invitaran a reflexionar sobre la seva idoneïtat en cada cas. Un exemple interessant poden ser els pots de xampú o gel de bany; investigar les sigles *fl. oz.* pot esdevenir un petit treball d'investigació.

Relació entre volum i capacitat d'un objecte per comparar les unitats de mesura corresponents.

En el sistema mètric, el terme capacitat s'utilitza habitualment per referir-se a la quantitat de líquid que pot contenir un recipient, mentre que el volum es relaciona amb l'espai que ocupa un objecte en tres dimensions. Socialment, aquestes dues nocions es perceben com a diferents: la capacitat fa referència a la quantitat que un recipient pot emmagatzemar, mentre que el volum descriu l'espai ocupat per un cos. Per tant, caldrà treballar el **saber #2.MES.MA.B**, atès l'ús quotidià que encara es fa del concepte de capacitat.

Científicament, el terme capacitat és acceptat dins del sistema mètric, encara que el terme més apropiat és volum. Les unitats per mesurar el volum inclouen metres cúbics (m^3), decímetres cúbics (dm^3) i centímetres cúbics (cm^3), mentre que la capacitat sol mesurar-se en litres (L) i els seus submúltiples, com els mil·lilitres (mL) i centilitres (cL). Un litre és equivalent a un decímetre cúbic ($1 dm^3 = 1 L$), cosa que posa de manifest la relació directa entre volum i capacitat. En la campanya del CREAMAT, [vídeoMAT-plus Mesura](#), es proposen dues activitats per treballar la comparació entre capacitat i volum: Com és de gran un metre cúbic? i Com és de petit un centímetre cúbic?

Tot i que la capacitat no és una magnitud fonamental en el sistema internacional (SI), la seva acceptació social la fa rellevant en contextos no científics, especialment en l'ús vídeoMATquotidià per a l'emmagatzematge de líquids. Per tant, és important distingir entre volum i capacitat i entendre les unitats de mesura utilitzades en cada cas.

En l'article [Capacitat i volum](#) (Vilalta, 2021), s'aborda aquesta distinció. S'explica que, tot i la relació entre ambdós termes, la capacitat fa referència a la quantitat de líquid que pot contenir un recipient, mentre que el volum és l'espai ocupat per un objecte. La mesura de la capacitat depèn de factors com la manipulació dels recipients i les característiques dels líquids, i no sempre es pot determinar de manera constant sense considerar aquestes variables. Per obtenir més informació sobre unitats de mesura, es pot consultar la [Secció Catalana de Metrologia](#).

Ús de factors de conversió que permetin comparar unitats del sistema internacional d'unitats a d'altres sistemes de mesura.

La comprensió dels factors de conversió entre diferents unitats de mesura és fonamental per treballar amb magnituds en diverses disciplines, incloent-hi la física, la química i la tecnologia, entre d'altres. L'adquisició del **saber #2.MES.MA.C** ajuda els alumnes a reconèixer la diversitat de sistemes de mesura existents i a desenvolupar habilitats per comparar i transformar unitats tant del sistema internacional (SI) com d'altres sistemes més tradicionals o regionals.

En física i química, és essencial treballar amb unitats estandarditzades per garantir que les mesures siguin consistents i replicables. La connexió amb aquest saber es pot enfocar de diverses maneres:

- **Conversió de velocitats i distàncies:** En problemes de moviment o energia cinètica, els alumnes sovint han de convertir unitats com quilòmetres per hora (km/h) a metres per segon (m/s). Aquest tipus de conversió és fonamental per treballar les lleis de Newton o el treball i l'energia, en cursos posteriors.
- **Magnituds físiques:** En química, per exemple, els conceptes de molaritat o concentració requereixen la conversió entre litres, mil·lilitres i grams. El domini d'aquests factors de conversió és indispensable per resoldre problemes de química quantitativa.

No obstant això, tot i que el SI és el sistema de referència en l'àmbit científic, hi ha moltes unitats que no en formen part i s'utilitzen en la vida quotidiana, especialment en àmbits comercials, meteorològics i industrials. Per treballar aquest aspecte, pots proposar activitats com:

- **Conversió d'hectàrees a metres quadrats:** Aquesta unitat és habitual en el sector agrícola, i és important que els alumnes entenguin com passar d'una hectàrea (10.000 m²) a altres unitats més petites. Un bon recurs per a aquest tipus de conversions pot ser la lectura de notícies relacionades amb incendis, per exemple.
- **Conversió de milles a quilòmetres, de polzades a centímetres i de peus a metres:** Tot i que aquestes unitats són d'ús estès als Estats Units i en altres països anglosaxons, pot ser molt útil per als alumnes que consumeixen informació d'aquests països o viatgen a l'estranger. Val a dir, però, que en alguns contextos, l'ús de les milles terrestres o les polzades està estès arreu del món (les milles, en el futbol americà, o les polzades en les dimensions de pantalles o monitors).
- **Nusos a quilòmetres per hora (velocitat marítima):** Els nusos són una mesura típica de la navegació. Fer un paral·lelisme amb les velocitats en terra ferma pot ser una activitat interessant, sobretot en centres situats a prop de la costa, on aquesta realitat pot ser més propera als alumnes.

Adaptació del joc Timeline amb unitats de mesura

Al voltant de l'any 2010, va sortir a la venda el joc [Timeline](#) de l'autor francès Frédéric Henry. Aquest és un joc educatiu en el qual els jugadors han de col·locar esdeveniments o invents en una línia cronològica, intentant encertar en quin any van ocórrer o van ser inventats. Per què no fer-ne una adaptació per treballar amb magnituds?

Aquest recurs es pot estructurar en dues fases interessants:

1. **Creació del joc:** Els alumnes, agrupats en grups de 3-4, generen cartes per al joc. Les cartes han d'estar escrites pels dos costats. Per una banda, hi ha de constar una pregunta amb una resposta que requereixi una magnitud. Per exemple: A quants quilòmetres es troba, de mitjana, el planeta Terra del Sol? (cal observar que sempre, en les preguntes, s'indica la unitat de mesura). Una altra pregunta podria ser: Aproximadament, a quants graus Celsius bull l'aigua a nivell del mar? (una vegada més, es detallen les unitats de mesura). Amb unes 50 cartes n'hi ha prou perquè el joc sigui interessant.
2. **Juguem al joc:** Un cop creat el joc, s'intercanvien les baralles de cartes entre els grups per posar a prova les creacions dels companys. Si alguna baralla de cartes conté algun error, no ha de ser cap problema, ja que la detecció i correcció d'errades és una part fonamental del procés d'aprenentatge.

Mesurament

Sabers

- A. Selecció i ús d'instruments (analògics o digitals) per mesurar de manera directa diferents magnituds de l'entorn.
- B. Presa de mesures de les magnituds pròpies del curs i de l'entorn proper de l'alumne.
- C. Esbós, representació a escala i afitament d'objectes per tal de fer càlculs relacionats amb la presa de longituds i àrees.
- D. Ús del teorema de Tales per a la representació a escala d'objectes plans i deducció de mesures per mètodes indirectes. **[ESS]** **#NUM.QU**, **#ESP.FG**
- E. Descoberta del teorema de Pitàgores a través d'àrees de quadrats construïts en els costats de triangles rectangles. **[ESS]** **#ESP.FG**
- F. Ús del teorema de Pitàgores per calcular longituds d'elements de polígons. **#ESP.FG**
- G. Descoberta de l'expressió de l'àrea d'un cercle a través de material manipulatiu o aplicacions de geometria dinàmica.
- H. Ús de les relacions entre longituds, perímetres i àrees i càlcul de superfícies de regions poligonals i circulars per a la resolució de problemes en contextos diversos en el pla.
- I. Distinció entre àrees i volums de cossos geomètrics (prismes i cilindres).
- J. Representació plana d'objectes tridimensionals (prismes i cilindres) en la resolució de problemes. **#ESP.FG**
- K. Relació entre les freqüències relatives i les probabilitats d'esdeveniments compostos en experiments aleatoris a través de la regla de Laplace. **#EST.PI**, **#ALG.PC**

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

La presa de mesures d'entorns propers a l'alumnat i l'ús dels teoremes de Tales i Pitàgores són cabdals en el segon curs de secundària. Aquests sabers permeten que l'alumnat entengui les relacions entre objectes en el pla i, en cursos posteriors, en l'espai tridimensional. En contextos en què aquests dos teoremes són protagonistes, s'ha de posar en relleu la importància de la precisió en la presa de mesures, així com la propagació de l'error en els resultats finals. Aquest aspecte ha de conduir a una discussió natural sobre el grau de precisió que s'expressa en els resultats obtinguts. El treball amb mesures directes, mitjançant l'ús d'instruments analògics o digitals, forma part de la seva quotidianitat i es reforça amb l'aprenentatge indirecte a través de representacions a escala. Tot aquest treball aporta una comprensió profunda de la geometria i de com les relacions entre longituds, àrees i volums afecten la resolució de problemes en contextos reals.

Malgrat que ens trobem en el bloc de mesurament, no volem perdre l'oportunitat de comentar com la capacitat d'estimar mesures i de comprendre la seva importància és essencial per al desenvolupament d'habilitats matemàtiques i per a la formació d'una mentalitat crítica. Si centrem la mirada en el sentit estocàstic, la relació entre les freqüències relatives i les probabilitats d'esdeveniments aleatoris ha de seguir reforçant-se, ara, en l'estudi d'esdeveniments aleatoris compostos. L'aplicació d'aquests sabers en problemes on apareix la incertesa permetrà als alumnes no només adquirir coneixements matemàtics, sinó també desenvolupar una visió més àmplia sobre la mesura i la seva rellevància en la vida quotidiana.

Comentaris sobre les connexions

És molt recomanable que es treballi el bloc de mesurament de manera connectada amb els altres blocs de sabers de mesura, i amb els altres sentits del currículum. No obstant, és fonamental abordar-lo també de

forma específica, per tal de donar-li la rellevància que li correspon. Si només es treballa de manera interconnectada amb altres sentits, es pot córrer el risc que no sigui tractat amb la profunditat que requereix. Així, s'ha de vetllar perquè es duguin a terme ambdós camins. Trobem connexions amb el sentit espacial, que es reforça a través de l'ús dels teoremes de Tales i Pitàgores per a la resolució de problemes de mesurament. D'altra banda, es pot desenvolupar el sentit algebraic mitjançant l'ús de simuladors per a l'experimentació d'esdeveniments compostos, relacionant les freqüències relatives i els seus graus d'incertesa.

Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

El treball amb el teorema de Tales per representar a escala objectes és un saber essencial, ja que en conservar les proporcions de les magnituds, es facilita l'obtenció de mesures indirectes a partir de la mateixa representació. Aquest coneixement es complementa amb la descoberta del teorema de Pitàgores, que permet deduir relacions clau entre les longituds dels costats dels triangles rectangles. Això facilita la resolució de problemes de mesura aplicats a contextos reals. A més, aquests sabers es veuen ampliat quan es treballa amb el càlcul de superfícies poligonals i circulars o amb l'ús d'instruments de mesura digital per augmentar la precisió dels resultats.

Observacions sobre alguns sabers específics

El **saber #2.MES.ME.H** adquireix un paper clau en la resolució de problemes en diversos contextos plans. L'alumnat ha de ser capaç d'aplicar aquestes relacions tant en situacions quotidianes com en problemes més abstractes. A través de la manipulació d'objectes, l'experimentació amb programes de geometria dinàmica i la resolució de problemes, es fomenten les relacions entre longituds, perímetres i àrees.

Pel que fa a la geometria tridimensional, el **saber #2.MES.ME.I** pren importància en l'estudi de prismes i cilindres. L'alumnat ha de desenvolupar la capacitat de calcular tant l'àrea de les superfícies com el volum, i comprendre les diferències entre aquestes dues magnituds. Entendre que existeix una certa independència entre àrea i volum en cossos tridimensionals és un pas fonamental per consolidar aquest coneixement.

Quant a l'estudi d'esdeveniments aleatoris, seguint el procés de maduració de l'alumnat, avancem cap a la mesura de la incertesa en contextos compostos. Després del treball previ de primer curs de secundària, cal aprofundir en la relació entre freqüències relatives i probabilitats, com es recull en el **saber #2.MES.ME.K**. La naturalesa d'aquest saber, tal com s'ha concebut, permetria incloure'l tant en el bloc Mesurament com en el d'Estimacions i relacions. Darrere de la seva redacció hi ha una intenció metodològica. Recomanem que l'alumnat arribi a emprar la regla de Laplace a partir de la seva descoberta i comprensió. És crucial seguir les quatre etapes de l'aprenentatge: experimentació, descoberta, conceptualització i, si s'escau, demostració o formalització, tal com es recull en el document en les [Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria](#) (Aubanell, 2015, pàg. 67). L'experimentació és especialment important, ja que permet consolidar la comprensió de la probabilitat. Així mateix, evitar la [Llei forta dels petits nombres](#) ajuda a obtenir conclusions fiables. Utilitzar fulls de càlcul per recollir dades pot ser molt útil per obtenir un nombre elevat de simulacions i arribar a resultats més precisos aplicant la regla de Laplace.

Recursos i activitats

Recursos i activitats per treballar sabers concrets

Selecció i ús d'instruments (analògics o digitals) per mesurar de manera directa diferents magnituds de l'entorn. (ME.A)

Mesurar és una habilitat fonamental en l'aprenentatge de les matemàtiques, especialment en el camp del mesurament. En el context de 2n d'ESO, l'alumnat ha de seguir treballant **el saber #2.MES.ME.A** per mesurar magnituds com longituds, àrees, volums o angles, utilitzant eines que poden trobar en el seu entorn quotidià o en l'àmbit acadèmic. El domini d'aquests instruments permet als estudiants adquirir una comprensió més profunda de les magnituds que mesuren i d'aplicar-les a situacions reals. Partir d'un context en què calgui mesurar, generar la necessitat de l'ús d'instruments adequats, realitzar les mesures pertinents i, finalment, valorar-ne l'adequació i precisió és una seqüència que s'hauria de donar en les nostres aules. Aquest cicle ha de posar en relleu que aquest saber caldrà ser treballat de manera conjunta amb altres propis del nivell, especialment els **sabers #2.MES.ME.D, #2.MES.ME.F, #2.MES.ME.H i #2.MES.ME.I**. En tots aquests sabers, sempre que proposem un repte on s'hagi de mesurar el seu entorn, l'alumne haurà de prendre decisions entorn aquest saber («quines eines puc utilitzar?», «quina precisió obtindré?», «amb quina em quedo?»)

Pel que fa a la distinció d'instruments de mesura analògics o digitals, caldrà fomentar l'ús d'ambdós i significar els aspectes positius que aporten cadascun dels dos tipus dins de l'activitat. Per realitzar aquestes valoracions es posaran en acció molts dels sabers propis del sentit de la mesura. L'ús del regle, la cinta mètrica, transportador d'angles, el peu de rei..., han de conviure, a les nostres aules amb la balança digital, el sensor de distància o les diferents apps que ens permeten mesurar longituds o angles. Cal fer una menció especial a aquells instruments analògics (molt probablement rudimentaris) que puguin ser construïts pels nostres alumnes. Bon exemple d'aquests aparells poden ser el [Gruixòmetre](#) que ens proposa Anton Aubanell, o bé la [cinta diamètrica](#), semblant a la que fan servir a l'enginyeria forestal per estimar el diàmetre del tronc dels arbres. Com deia Puig Adam, la construcció d'aquests materials porta intrínsec un aprenentatge matemàtic molt rellevant.

Presa de mesures de les magnituds pròpies del curs i de l'entorn proper de l'alumne. (ME.B)

El **saber #2.MES.ME.B** ens genera una oportunitat molt interessant perquè l'estudiant pugui aplicar la geometria i la mesura en situacions pràctiques. L'acció de mesurar ha de permetre a l'alumne apropar el càlcul de mesures indirectes amb la mesura obtinguda a través d'instruments més o menys precisos. Aquest procés donarà sentit a les seqüències d'activitats que puguem proposar en les nostres aules.

Gran part d'aquest treball ja s'ha dut a terme en cursos anteriors amb la presa de mesures de longituds i àrees. No obstant, podem continuar el treball fet anteriorment i estendre'l amb aspectes relacionats amb volums i capacitats de prismes i cilindres. La presa de mesures d'un políedre o cilindre, el càlcul de la seva capacitat i la posterior comprovació a través d'un vas de precipitats o balança (si estem treballant amb aigua) pot ser una seqüència molt rica per treballar aquest saber amb el nostre alumnat. Per exemple amb la proposta [25 cm quadrats o cúbics?](#) de la professora Mireia Dosil que, malgrat que està plantejada inicialment per a 4t d'ESO, es pot adaptar perfectament i aplicar-la a 2n d'ESO. Partint de dues preguntes concretes: Quina superfície representen 25 cm²?, i Quin volum ocupen 25 cm³?, es busca poder-les respondre utilitzant d'una manera globalitzada els coneixements d'àrees i volums. Destaquem que en la mateixa pàgina s'incorpora un apartat amb instruments recomanats per avaluar el projecte, i un altre amb l'experiència feta per l'alumnat.

TRES LLAUNES ÉS UN LITRE?

En aquesta línia, després d'explicar que un decímetre cúbic és equivalent a un litre, es pot plantejar la pregunta de «Quantes llaunes de beguda de 33 cl es poden abocar dins d'un cub d'un litre?». Seguidament, es pot demanar que els estudiants facin les seves prediccions i raonin les seves respostes. A continuació, cal passar a la fase de comprovació i observar que hi caben tres llaunes. Per cloure l'activitat, caldrà comentar que les llaunes no estan totalment plenes (possiblement, per qüestions de seguretat).

Aquestes propostes i d'altres que posen en joc cossos de metacrilat es troben recollides en l'entrada del CREAMAT que porta per títol [Volums amb aigua](#). Molts dels recursos que hi apareixen segueixen la seqüència de presa de mesures, càlcul i comprovació posterior.

Esbós, representació a escala i afitament d'objectes per tal de fer càlculs relacionats amb la presa de longituds i àrees. (ME.C)

Des de primària, l'alumnat ha estat aplicant sabers relacionats amb el sentit de l'espai i la mesura en situacions quotidianes. Dins d'aquest context, el treball del **saber #2.MES.ME.C** representa un pas més en el seu aprenentatge. Aquest saber permetrà a l'alumnat convertir mesures reals en representacions més manejables i pràctiques, i viceversa. Això és especialment útil en situacions com mesurar una habitació, crear o interpretar un plànol o un mapa. A través d'aquestes activitats, l'alumnat es familiaritza amb les escales per calcular perímetres i superfícies amb precisió, mentre desenvolupen una comprensió més profunda de la proporcionalitat. Aquest aprenentatge serà rellevant a l'hora d'afrontar, en cursos posteriors, la relació entre longituds, àrees i volums de figures i cossos semblants.

CONSTRUCCIÓ DE LA MAQUETA DEL CENTRE

Una activitat interessant pot ser la construcció de la maqueta del centre, on cada grup construeix una part de l'edifici. Per tal que el producte final sigui reeixit, serà essencial que totes les parts estiguin construïdes a la mateixa escala. Així, abans de començar, caldrà acordar una escala comuna per a tots els grups. Un cop construïts els mòduls caldrà passar a la unió de les diferents parts i la seva posterior exposició. La mostra del producte final donarà visibilitat al treball realitzat a l'aula.

LA HISTÒRIA COM A CONTEXT PER A L'ENRIQUIMENT COMPETENCIAL DE L'ACTIVITAT MATEMÀTICA

Una proposta força més extensa per treballar el **saber #2.MES.ME.C** la podem trobar en l'article [La història com a context per a l'enriquiment competencial de l'activitat matemàtica](#) (Vilella, 2018). L'article posa l'accent en el fet de potenciar una mirada matemàtica en el nostre entorn (en aquest cas, es parteix de dades d'un poblat ibèric o d'una resta de ceràmica per realitzar tasques que estan a cavall de l'arqueologia i les matemàtiques). En el decurs del text, podem trobar diferents exemples en què caldrà elaborar esbossos a escala (pas previ a la resolució de reptes d'indagació arqueològica).

Ús del teorema de Tales per a la representació a escala d'objectes plans i deducció de mesures per mètodes indirectes. (ME.D)

El teorema de Tales, juntament amb el teorema de Pitàgores, són els dos pilars essencials en el sentit de la mesura de 2n d'ESO. En ambdós teoremes, cal tenir cura de fer una aproximació des de diferents recursos per tal d'arribar al màxim nombre d'alumnes. N'hi haurà que se sentin més atrets per activitats en què els materials són protagonistes. D'altres, potser els interessarà més contextos digitals en els quals s'evidencia la importància de la representació a escala de figures planes.

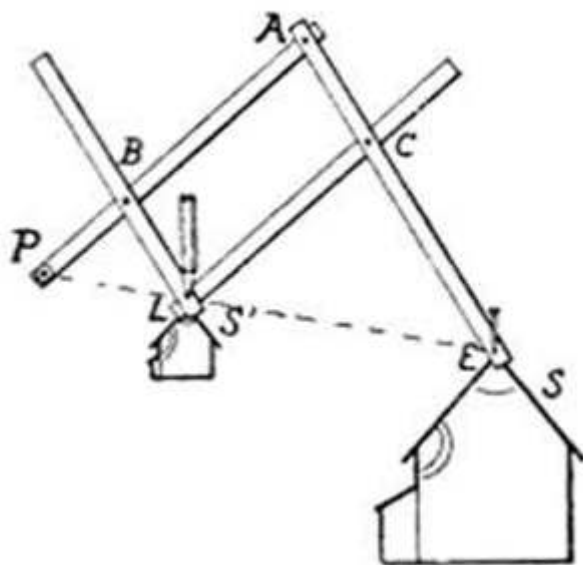
TALES ASSEDEGAT

Treballar amb fotografies fetes amb la tècnica de perspectiva forçada pot ser un recurs d'allò més atractiu per posar en relleu el teorema de Tales. A Catalunya tenim un banc de fotografies procedents del [Grup de fotografia matemàtica](#) de l'ABEAM. A part de l'excel·lent col·lecció de fotografies matemàtiques, podem

trobar un espai de recursos per portar a l'aula. L'activitat [Tales assedegat](#) ens ofereix una aproximació al teorema de Tales des de l'estudi i posterior creació d'il·lusions òptiques fotogràfiques.

EL PANTÒGRAF

El DIEC ens defineix el pantògraf com un «aparell per a copiar mapes, plànols, etc., a una escala determinada, format essencialment per quatre regles formant ballesta.»



Font: Volum I del Curso de Geometría métrica

Autor: Pere Puig Adam

Quin argument matemàtic sustenta el fet que es puguin reproduir imatges a escala? Una vegada més, el teorema de Tales serà al darrere d'aquest aparell. Actualment, el pantògraf s'utilitza en diversos contextos, tot i que la seva utilització ha disminuït amb l'arribada de la tecnologia digital. Tot i això, encara s'empren aquest estri en els camps de la joieria amb el gravat de peces o en la mecànica amb el tall mecànic amb fresadores, entre d'altres.

QUINA DESPROPORCIÓ!

Sovint, els nostres alumnes han d'adjuntar imatges als seus treballs. En fer-ho, cal que tinguin molta cura a l'hora de redimensionar les imatges. Posem, per exemple, que calgui inserir una imatge del quadre de *Las Meninas* de Pablo Picasso (oli sobre tela de 194 x 260 cm).



Font: [Las Meninas](#)
Autor: Lluís Ribes Mateu

El primer alumne ha escollit una imatge que ha trobat per la xarxa i n'ha modificat les dimensions. La imatge resultant té unes dimensions de 6 x 8,5 cm.



Font: Elaboració pròpia

El segon alumne també ha escollit una imatge que ha trobat per la xarxa i n'ha modificat les dimensions. La imatge resultant té unes dimensions de 6 x 4,45 cm.



Font: Elaboració pròpia

El tercer alumne ha escollit una imatge que ha trobat per la xarxa i n'ha modificat les dimensions. La imatge resultant té unes dimensions de 16,5 x 6 cm.



Font: Elaboració pròpia

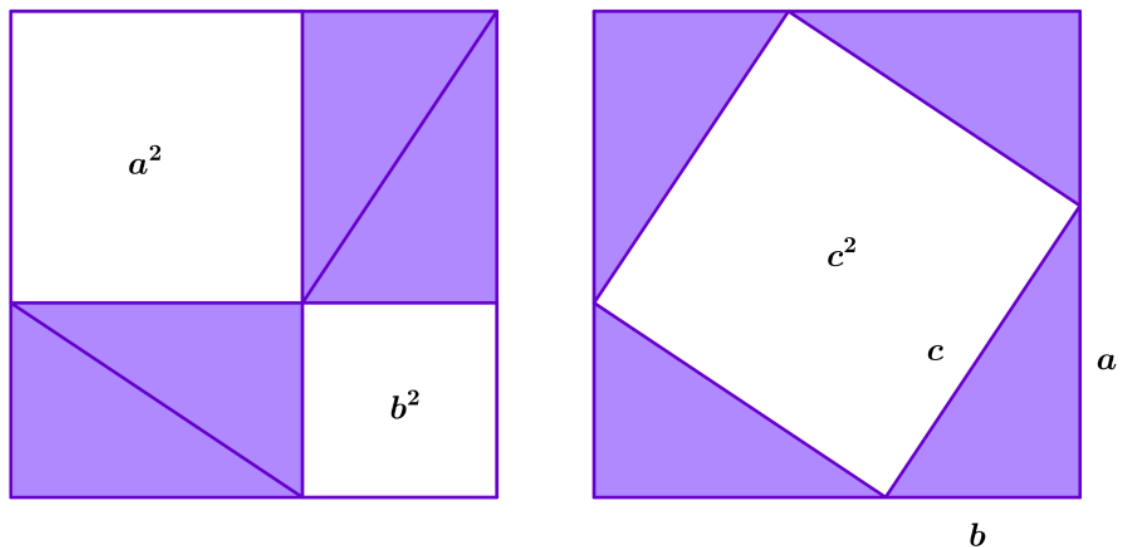
Quin dels tres alumnes ha redimensionat correctament la imatge del quadre? Per tal de respondre a aquesta pregunta caldrà fer ús de les proporcions entre els costats de les imatges per tal de comparar-ne les raons. Per finalitzar l'activitat es pot posar l'accent en el fet que la gran majoria de programes disposen d'alguna opció per garantir que es mantingui la relació d'aspecte de la imatge a l'hora d'augmentar-ne o reduir-ne les dimensions.

Descoberta del teorema de Pitàgores a través d'àrees de quadrats construïts en els costats de triangles rectangles. (ME.E)

Un dels resultats més potents en les matemàtiques és el teorema de Pitàgores: «*En qualsevol triangle rectangle, la suma de les àrees dels dos quadrats que tenen per costat els catets és igual a l'àrea del quadrat que té per costat la hipotenusa*». Aquesta invariància és un fet per captivar l'alumne. A continuació es descriuen quatre recursos per apropar el teorema de Pitàgores. Aquestes quatre propostes poden ser llegides independentment o ser desplegadas de manera seguida en l'ordre que es proposa.

SQUARE IT!

Sovint, quan volem treballar **el saber #2.MES.ME.E**, el primer obstacle que ens podem trobar a l'aula és la visualització de quadrats tals que els seus costats no siguin paral·lels als marges del full de treball o de la pantalla. Un excel·lent recurs per treballar aquest aspecte és el joc [Square it!](#) de la pàgina de NRICH de la Universitat de Cambridge. El joc, inspirat amb el clàssic Quod de G. Keith Still, té per objectiu disposar quatre fitxes en quadrat en un taulell de dimensions $n \times n$. D'entrada, pel simple fet de ser un joc de taula, ens convida a cercar una possible estratègia guanyadora. Posteriorment, l'evolució del mateix joc porta a construir quadrats girats. Aquest escenari ens permet estudiar les relacions que s'estableixen entre les àrees dels quadrats construïts sobre els costats d'un triangle rectangle.



Font: Elaboració pròpia

Després del joc, l'observació que l'àrea del quadrat de costat c és igual que la suma de les àrees dels quadrats de costat a i b és un pas molt natural. Per a aquells docents que els agradi el material manipulatiu, es poden construir els diferents polígons i mostrar la igualtat a mode de puzzle.

LA BALANÇA PITAGÒRICA

Una oportunitat de connectar internament la mesura de la massa d'objectes amb la de l'àrea de quadrats construïts sobre els costats d'un triangle rectangle és el mòdul de [Pitàgores](#) del Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA).

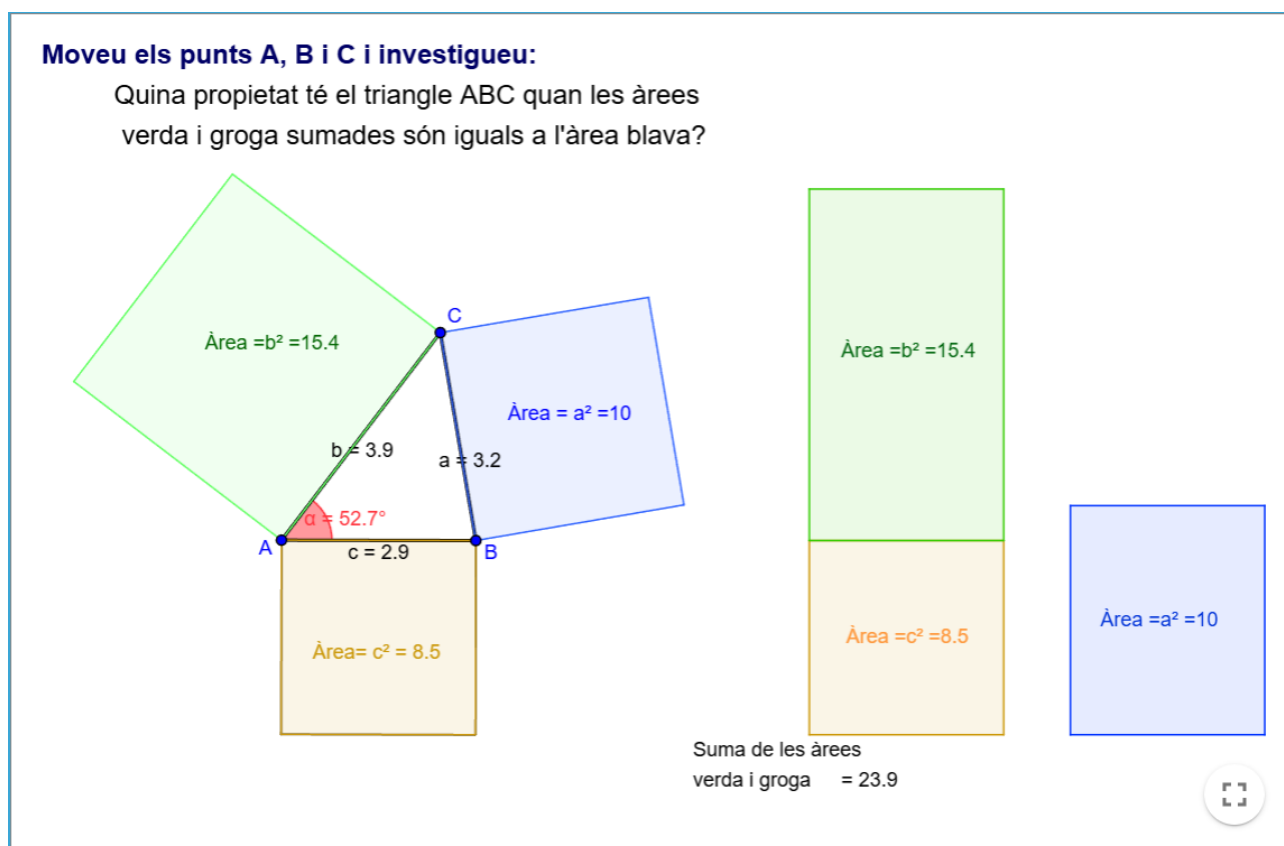


Font: [Pitàgores](#). Autoria: MMACA

El fet de cercar que l'analogia entre masses iguals en ambdós costats de la balança és equivalent a la igualtat d'àrees, és un recurs d'allò més rellevant. Si hi ha la possibilitat de fer la visita al MMACA, genial; altrament, és un recurs fàcilment reproduïble a classe. El fet de la construcció dels tres quadrats associats a un triangle rectangle i observar que tenen la mateixa massa pot tenir un valor didàctic molt interessant. Si es vol anar una mica més enllà, es pot ampliar el recurs amb figures semblants sobre cadascun dels costats del triangle rectangle i observar que es manté la igualtat entre àrees (des del MMACA es proposa un treball amb triangles equilàters i amb semicercles).

EL RECÍPROC DEL TEOREMA DE PITÀGORES

Un pas més cap a l'adquisició del **saber #ME.E** pot ser la recerca de la resposta a la pregunta següent: Què succeeix si el triangle no és rectangle? A través del recurs creat per Enric Brasó, [El recíproc del teorema de Pitàgores](#), es convida l'alumne a la recerca d'aquesta pregunta. En la seqüència d'experimentació, descoberta, conceptualització i, si s'escau, demostració, podem posar molta atenció en el tercer dels punts. Després de l'estudi dels casos agut, rectangle i obtús, es pot construir conjuntament amb tota la classe un «teorema» on es recullin les propietats de les tres famílies de triangles. Cada alumne, de manera seqüenciada, afegeix una paraula a la descripció de la suma de les àrees dels quadrats construïts sobre un triangle qualsevol.



Font: [El recíproc del teorema de Pitàgores](#)

Autor: Enric Brasó

EL TEOREMA DE HOMER SIMPSON

Per acabar aquest petit itinerari a través de la descoberta del teorema de Pitàgores es podrien anar a consultar les «inestimables» paraules del gran Homer Simpson. En la sèrie de dibuixos animats dels Simpson, capitanejada pel gran Matt Groenning, es poden trobar un bon recull de recursos matemàtics per portar a l'aula. N'hi ha molts que estan recollits i comentats en el llibre *Los Simpson y las matemáticas* (Singh, 2013).

En l'inici del capítol 10 de la temporada 5, el gran Homer es troba unes ulleres en una tassa del vàter. En veure-les, se les posa i enuncia el següent teorema: «*La suma de la raíz cuadrada de dos lados cualesquiera de un triángulo isósceles es igual a la raíz cuadrada del otro lado*». Malauradament, en els banys públics hi havia una altra persona que en escoltar l'enunciat del teorema respon: «*¡Eso es el equilátero, idiota!*».

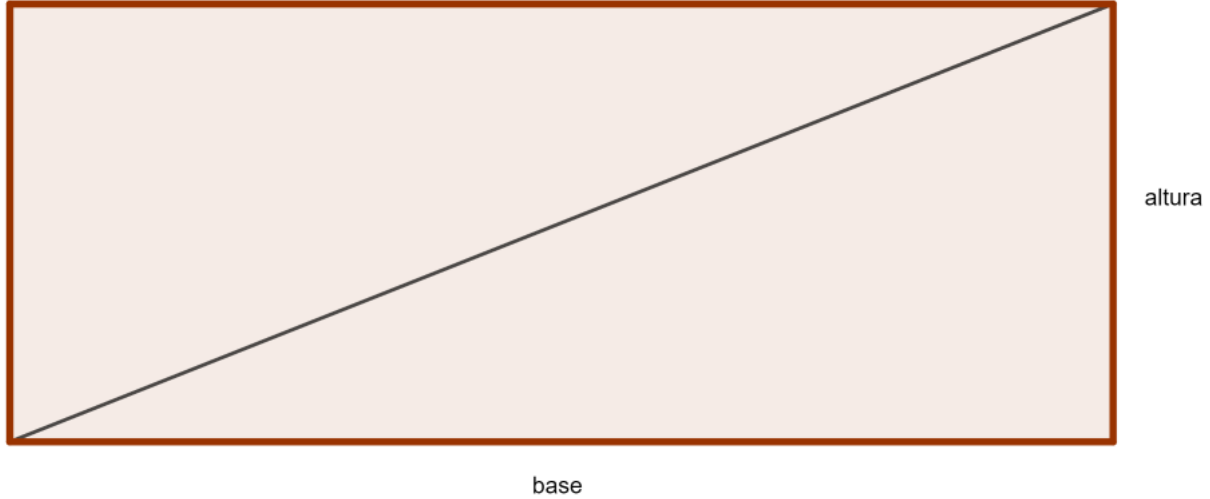
Ja tenim el tret de sortida de la nostra activitat! L'enunciat que recita el nostre protagonista dista del teorema de Pitàgores. Després de visualitzar l'escena, potser caldria estudiar quines paraules caldria canviar per tal que l'enunciat fos correcte. Posteriorment, podríem demanar a la classe que es cerquessin triangles que satisfessin l'enunciat «inventat». Existeix algun triangle amb aquestes propietats? La resposta és que no existeix cap triangle amb aquestes propietats. L'argument de tot plegat gira entorn de la desigualtat triangular.

Ara, a tall d'anècdota us proposem una darrera escena en la nostra activitat. Cerqueu talls per la xarxa (només cal indicar Pitàgores i Homer Simpson). Veureu que, depenent del doblatge, apareixen traduccions diferents, com per exemple aquesta [versió per a Espanya](#) i aquesta segona, per a [Hispanoamèrica](#). Per què s'ha traduït de maneres diferents? Valorem les diferents traduccions respecte de la [versió original](#)? Per què es deu haver comès aquesta errada? En tot cas, la traducció citada anteriorment concorda amb la versió original. Com a tall d'anècdota cal dir que els guionistes de la sèrie, en aquesta escena, van voler fer un homenatge a la mítica pel·lícula *El màgic d'Oz* (Víctor Fleming, 1939), en la qual l'espantaocells recita el mateix teorema que en Homer Simpson. En l'espai web [Bloc del Calaix +ie](#) de Joan Jareño, podreu cercar més informació en l'entrada que porta per títol [Un teorema ocellaire](#).

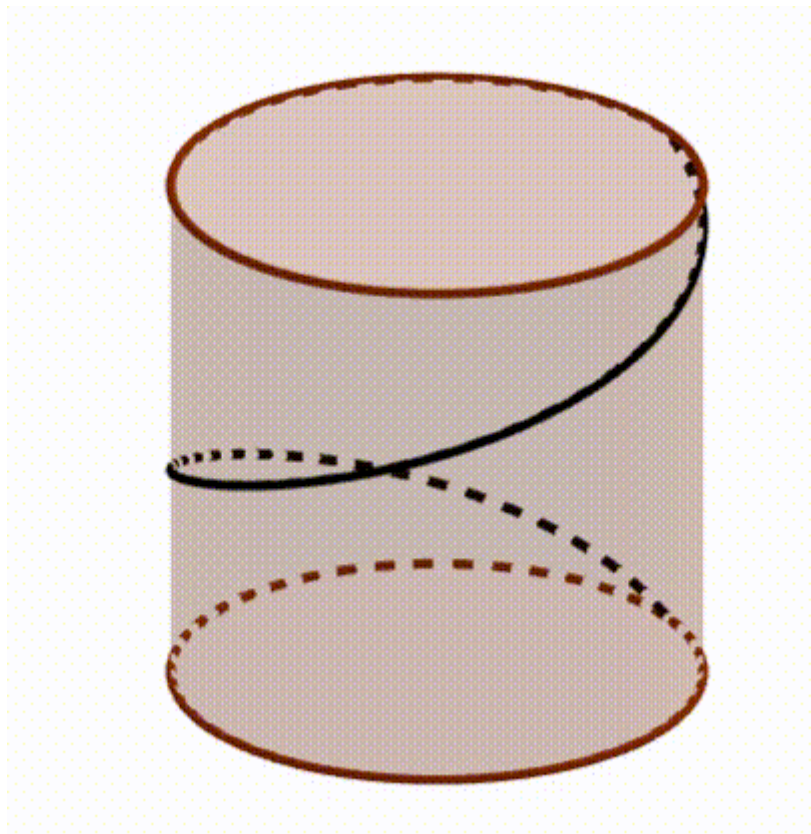
Ús del teorema de Pitàgores per calcular longituds d'elements de polígons. (ME.F)

La introducció del teorema de Pitàgores ha de fer-se de forma tranquil·la i pausada, posant de relleu la forta relació que existeix entre els quadrats que es poden construir sobre els costats d'un triangle rectangle. Aquest aspecte, tractat en el **saber #2.MES.ME.E** ens ha de conduir a l'aplicació del teorema de Pitàgores en diferents contextos propers a l'alumne. Aquests contextos han de poder permetre establir connexions tant amb altres sentits matemàtics com amb altres àrees de coneixement (posant una especial atenció a l'àrea de tecnologia).

LA LONGITUD D'UNA HÈLIX



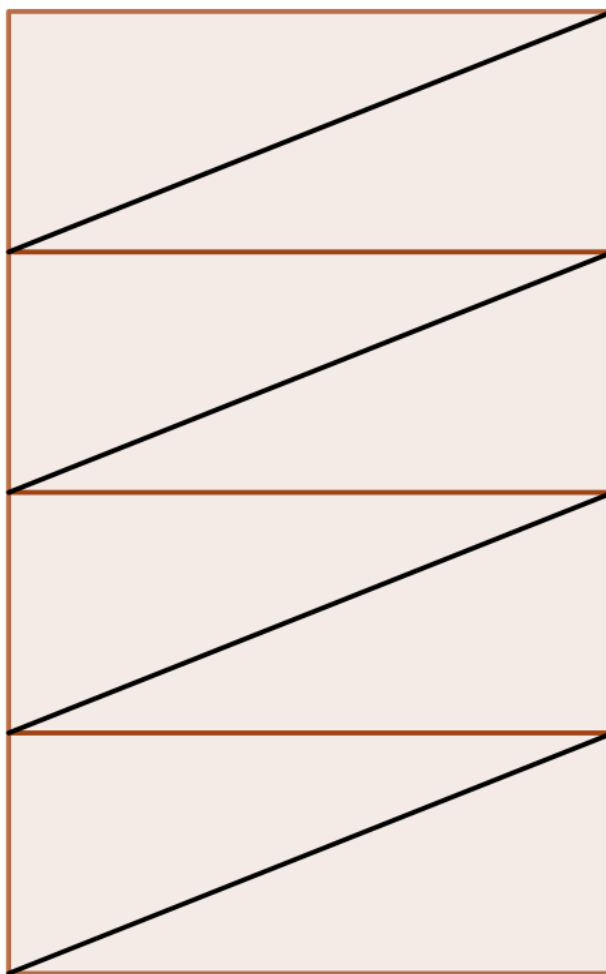
Font: Elaboració pròpia



Font: Elaboració pròpia

Si enrotllem un rectangle unint els dos costats oposats podem obtenir un cilindre. Aquest cilindre tindrà la mateixa altura que la longitud dels costats units i una base circular amb perímetre igual a la longitud del costat «lliure» del rectangle inicial. La diagonal del rectangle ens descriu una corba que té moltes aplicacions en el camp de la tecnologia, l'arquitectura o el disseny: l'hèlix. Quina serà la longitud de l'hèlix que hem construït? La longitud de l'hèlix és igual a la longitud de la diagonal del rectangle. Com la podem calcular? Amb el teorema de Pitàgores.

Un cop feta aquesta introducció, se'ns obre una nova pregunta: com ho podem fer per calcular les longituds d'hèlixs que facin més voltes al voltant del nostre cilindre? Desfent el camí, podem trobar una representació plana que ens pugui ajudar a resoldre el nostre dubte.



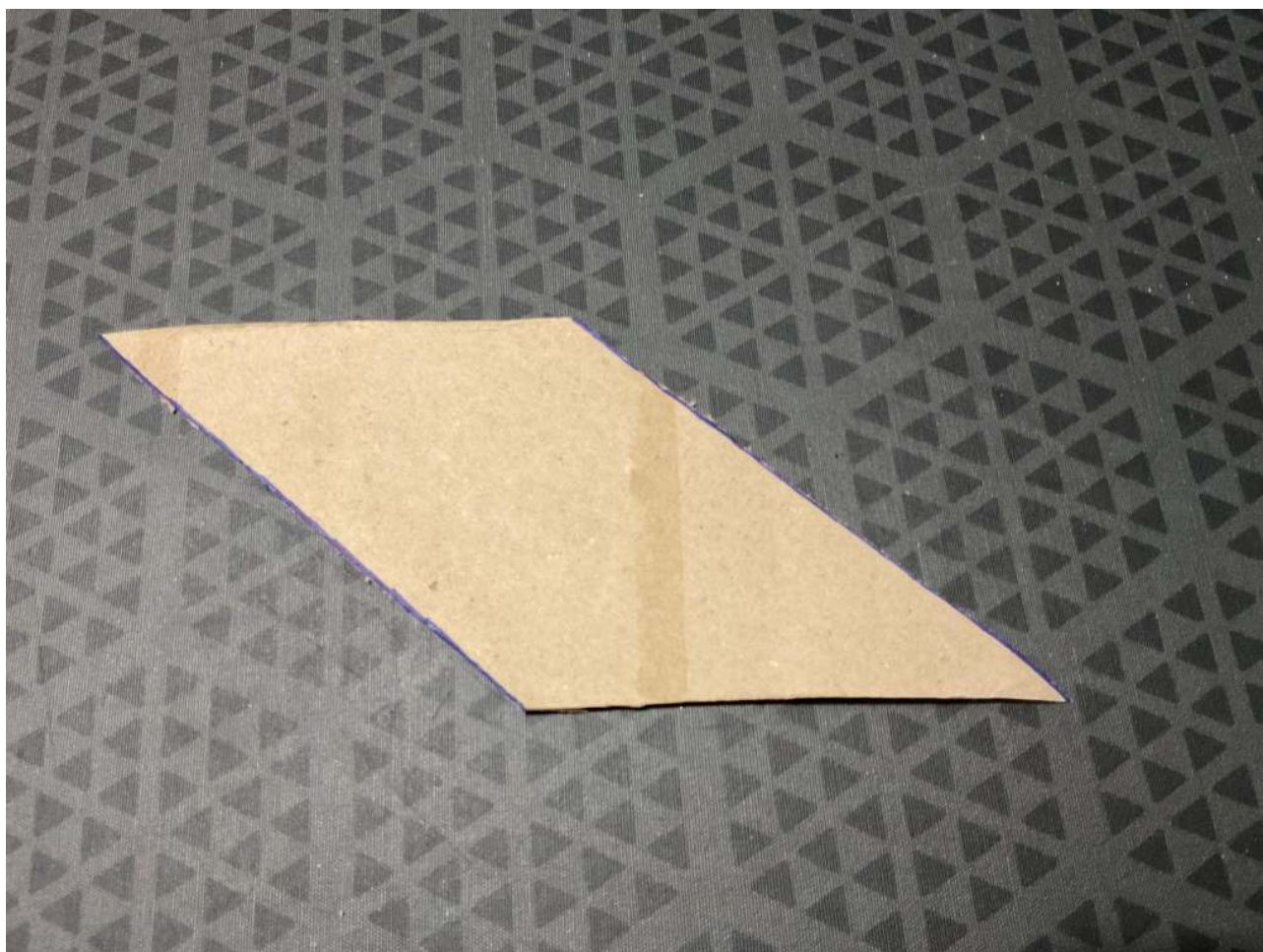
Font: Elaboració pròpia

Aquest recurs pot aparèixer de manera autònoma en l'àmbit matemàtic. No obstant, si es treballa conjuntament amb tecnologia, podem donar sentit geomètric als conceptes pas de rosca, angle de rosca, profunditat de la rosca...

Una altra possibilitat per donar recorregut a aquesta activitat és estudiar diferents hèlixs que podem trobar en diferents contextos quotidians arquitectònics (per exemple, la rampa d'accés al CosmoCaixa) o en el món del disseny (el desenvolupament del tub del rotlle de paper higiènic).



Font: Elaboració pròpia



Font: Elaboració pròpia

LES DIMENSIONS D'UNA PANTALLA O MONITOR

Un altre recurs per aprofundir en el **saber #2.MES.ME.F** en un context proper als alumnes és la determinació de les dimensions d'un monitor, mòbil o televisió. Les pantalles s'especifiquen habitualment per la longitud de la seva diagonal mesurada en polzades, mentre que les dimensions horitzontal i vertical depenen de la seva relació d'aspecte (com ara 16:9 o 4:3). Aquestes relacions d'aspecte es poden connectar amb el **saber #2.MES.ME.D**. A través del teorema de Pitàgores, es pot calcular la relació entre la diagonal i els costats del monitor.

Es pot proposar a l'alumnat calcular les dimensions horitzontal i vertical d'una pantalla donada la seva diagonal i la relació d'aspecte. L'activitat es pot ampliar demanant que comparin diferents pantalles disponibles al mercat o fins i tot dissenyin una pantalla personalitzada amb dimensions determinades. Aquest recurs connecta directament amb l'àmbit tecnològic i l'ús quotidià de dispositius del seu entorn.

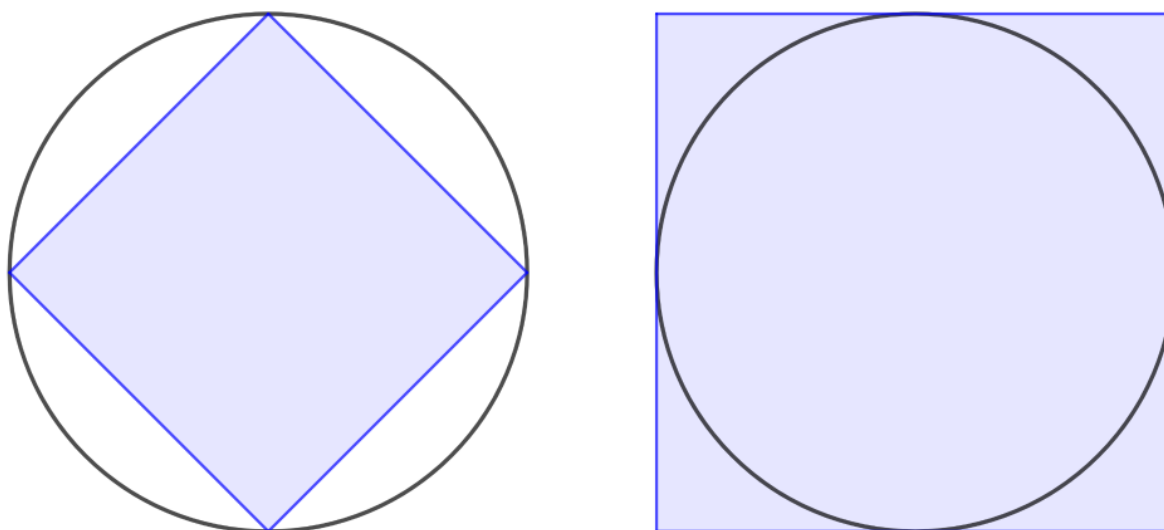
Descoberta de l'expressió de l'àrea d'un cercle a través de material manipulatiu o aplicacions de geometria dinàmica. (ME.G)

El càlcul de perímetres i àrees de figures geomètriques planes és un punt de connexió amb el sentit espacial que es va donant al llarg de tota la secundària. L'aprenentatge de noves figures geomètriques planes va associat a la descoberta de les seves magnituds. En el cas de la circumferència, tot i ser un objecte matemàtic que fa temps que és conegut, l'estudi de les seves mesures s'adquireix a la secundària. Al llarg del primer curs, s'ha treballat la relació de proporcionalitat directa entre el radi i el seu perímetre. Un cop

consolidat aquest saber, l'alumnat està preparat per a la descoberta de l'àrea del cercle. La demostració de la fórmula requereix uns fonaments matemàtics que són propis del batxillerat. Aquest fet no ha d'impedir que el nostre alumnat pugui apropar-s'hi sense pèrdua de rigor.

ACOTACIÓ DE L'ÀREA DEL CERCLE

Abans d'endinsar-nos en el **saber #2.MES.ME.G** es podria proposar a la classe si es podria trobar una cota superior i inferior de la superfície del cercle. Potser un primer pas podria ser intentar determinar quina o quines magnituds del cercle poden determinar-ne la superfície. En aquest cas, caldria esperar que la resposta fos que amb la mesura del radi s'hauria de poder determinar la seva àrea. A partir d'aquí, com podem relacionar l'àrea de la circumferència amb el seu radi? Atès que estem parlant d'una magnitud de superfície, la fórmula hauria de ser el producte d'una constant per r^2 . La recerca d'arguments que justifiquin per què ha de ser r^2 i no pas r o r^3 contribuirà al desenvolupament de l'argumentació dintre de l'aula.



Font: Elaboració pròpia

Un cop arribats a aquest punt, ja es pot passar a la darrera fase de l'activitat: l'acotació de l'àrea de la circumferència. Les dues imatges adjuntes ens mostren un camí possible per a la recerca d'una primera acotació. En aquest cas, seguint un procés similar al d'Arquimedes en l'estudi del perímetre d'una circumferència, podem arribar a veure que l'àrea del quadrat inscrit en una circumferència acota inferiorment l'àrea del cercle. D'una forma similar, es pot veure que l'àrea del quadrat que és tangent exteriorment al cercle és una cota superior a la superfície que s'està estudiant. Seria molt interessant arribar a cercar una expressió del tipus:

$$r^2 < A < 4r^2$$

on A expressa el valor de l'àrea del cercle.

L'ÀREA DEL CERCLE AMB FORMATGETS

Una activitat interessant per treballar el **saber #2.MES.ME.G** és utilitzar la descomposició del cercle en sectors circulars recollida en la proposta d'Anton Aubanell que porta per títol [Àrea del cercle](#). Es pot utilitzar un cercle fet de paper o cartolina que es talli en sectors circulars, o bé un paquet de formatgets com es veu en la següent imatge.



Font: Elaboració pròpia

Reorganitzant els sectors circulars podem formar una figura geomètrica similar a un paral·lelogram (on dos dels seus costats són concatenacions d'arcs circulars d'igual longitud). El càlcul de l'àrea de la figura que acabem de construir ens ha d'acompanyar a la recerca de la fórmula de l'àrea del cercle.



Font: Elaboració pròpia

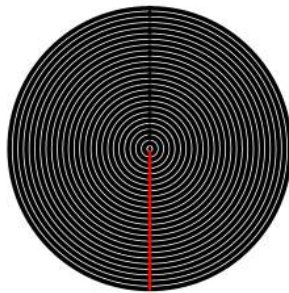
Cal destacar a l'alumnat que les superfícies de totes dues imatges són iguals. L'àrea de la segona imatge es pot aproximar mitjançant el càlcul de la superfície d'un paral·lelogram, considerant com a base el perímetre del cercle i com a altura el radi. Com que aquest paral·lelogram està format per dos cercles de radi igual, l'àrea del cercle inicial serà equivalent a la meitat de l'àrea del «romboide» format pels sectors circulars.

$$A_{\text{cercle}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \frac{2\pi r^2}{2} = \pi r^2$$

DESPLEGANT EL CERCLE

Per a aquell alumnat que li agradi més els recursos TAC, podem portar a l'aula un [recurs](#) fet amb GeoGebra i inspirat en un resultat recollit en el *Llibre de Geometria* d'Abraham Bar Hiyya (més conegut amb el sobrenom de Savasorda). El resultat es podria resumir de la següent manera:

Si obrim la superfície d'un cercle per un dels seus radis i s'aplanen totes les circumferències concèntriques, obtenim un feix de segments de longitud proporcional als radis respectius. La figura resultant serà un triangle que tindrà de base el perímetre de la circumferència exterior del cercle i d'altura com el seu radi.



Autor: Jordi Font

Es pot resumir de la següent manera:

- El perímetre de la circumferència $C = 2\pi r$, on r és el radi.
- L'àrea del cercle és equivalent a l'àrea del triangle de base C i altura r . Per tant,

$$A = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \frac{2\pi r^2}{2} = \pi r^2$$

Parafrasejant Vicente Meavilla en el llibre *Aprendiendo matemáticas con los grandes maestros* (Meavilla Seguí, 2017): «[...] aquesta activitat hauria d'aparèixer en tots els llibres de didàctica de geometria elemental».

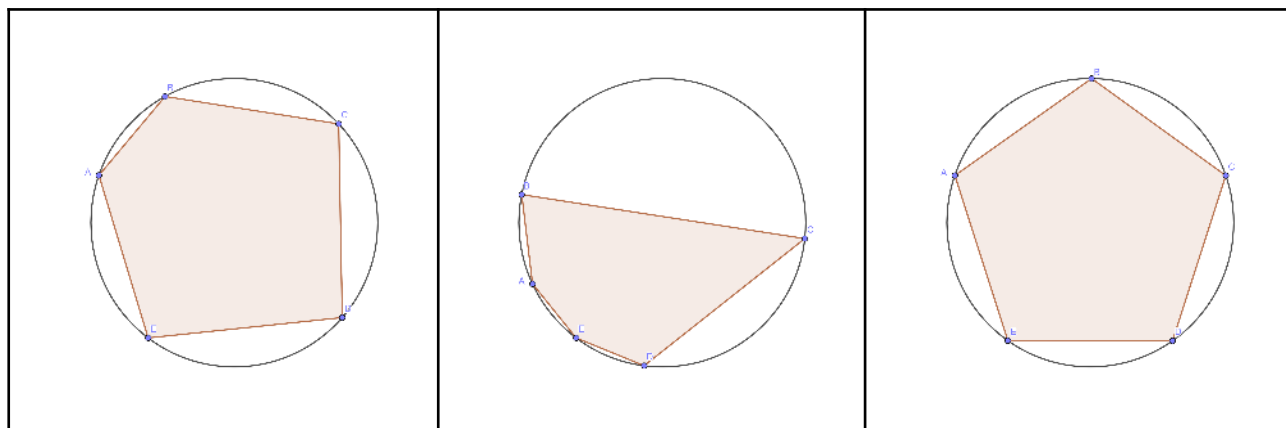
Ús de les relacions entre longituds, perímetres i àrees i càlcul de superfícies de regions poligonals i circulars per a la resolució de problemes en contextos diversos en el pla. (ME.H).

El coneixement i l'aplicació de les relacions entre longituds, perímetres i àrees és fonamental per comprendre millor la geometria de figures planes. Caldrà que l'alumnat desplegui tots els sabers treballats anteriorment per adquirir el saber #2.MES.ME.H. A 2n d'ESO, l'alumnat ja ha assolit coneixements bàsics sobre com mesurar distàncies i àrees, però en aquest nivell s'espera que apliqui aquestes habilitats per resoldre problemes més complexos. Això implica comprendre les relacions entre les dimensions d'una figura, el seu perímetre o àrea.

Durant aquest curs, s'ha aprofundit en la descoberta dels teoremes de Pitàgores i Tales, dos pilars essencials en la geometria. El teorema de Pitàgores ens relaciona les longituds dels costats d'un triangle rectangle a través de les àrees dels quadrats que es poden construir sobre ells. D'altra banda, el teorema de Tales ajuda a establir relacions proporcionals entre segments de rectes paral·leles i pot ser molt útil en la representació a escala d'objectes, una habilitat fonamental per treballar amb plànols i representacions geomètriques.

Des d'un context estrictament matemàtic, aquest saber ha de servir per reforçar les relacions que existeixen entre perímetre i àrea de figures planes. Proposar petites investigacions entorn de les magnituds de polígons poden reforçar aquest saber. Per exemple, fixat el radi d'una circumferència, tots els polígons inscrits tenen el mateix perímetre? I la mateixa àrea? En cas negatiu, quins seran els seus valors mínims? I màxims? Atès que aquesta investigació és molt extensa, pot ser interessant dividir la classe en grups; cada

grup es pot centrar en una família de polígons (triangles, quadrilàters, pentàgons...) i, finalment, compartir les conclusions que han obtingut amb la resta del grup.



Font: Tres imatges d'un pentàgon inscrit en una circumferència

Autor: Jordi Font

Una vegada més, aquest tipus d'activitats segueixen la seqüència d'experimentació, descoberta, conceptualització i, si s'escau, demostració. Pel que fa a la primera fase d'experimentació, podem optar per la presa de mesures i càlcul de l'àrea de polígons a través de la triangulació o bé a través de l'ús de programes de geometria dinàmica.

L'estudi de longituds i superfícies sobre mapes pot ser un recurs interessant per posar en joc aquest **saber #2.MES.ME.H**. La mesura de longituds i d'àrees amb fil i paper vegetal quadriculat que ens proposa Anton Aubanell en el recurs [Mesura de longituds i d'àrees amb fil i paper vegetal quadriculat](#) ens ha de permetre establir connexions entre la matemàtica i situacions contextualitzades més properes a l'alumne. La combinació entre l'ús de materials físics (com pot ser el fil i el paper quadriculat) i els mapes digitals que podem trobar, per exemple, al web de l'Institut Cartogràfic i Geològic de Catalunya ([Vissir3](#)) torna a ser protagonista a la gestió de l'activitat.

Seguint la mateixa línia, Joan Jareño, en la publicació que porta per títol [El riu, el nombre \$\pi\$ i distàncies al planeta](#), ens mostra una proposta d'allò més interessant: quina relació existeix entre la distància en línia recta entre la capçalera i la desembocadura d'un riu i la seva longitud? Estudiar els coeficients entre les dues magnituds de diferents rius, combinat amb articles relacionats amb el tema pot generar un espai de debat sobre la validesa o no del resultat esmentat. En la part final de la publicació es poden trobar diferents propostes d'ampliació per poder anar més enllà.

Distinció entre àrees i volums de cossos geomètrics (prismes i cilindres). ME.I

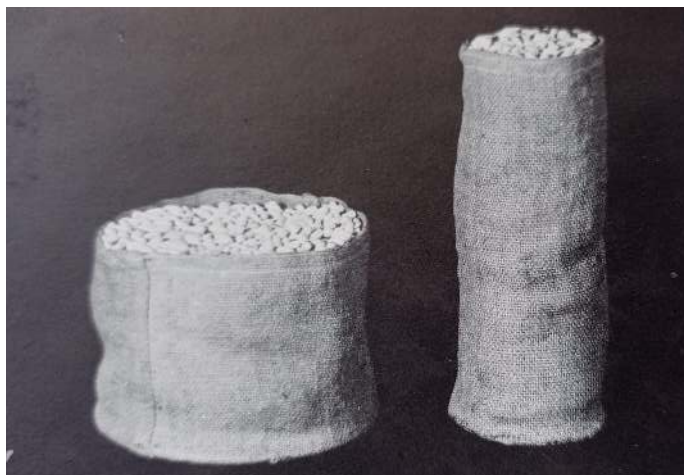
A mesura que avancem en l'aprenentatge de la geometria tridimensional, és important comprendre el **saber #2.MES.ME.I**, especialment pel que fa als prismes i cilindres. Mentre que l'àrea es refereix a la superfície que cobreix un objecte (ja sigui lateral, total o de les seves bases), el volum mesura la quantitat d'espai que aquest ocupa en un entorn tridimensional. Aquesta diferenciació és clau per resoldre problemes de capacitat i optimització d'espais, i té connexions naturals amb àmbits com la tecnologia, el disseny industrial o l'arquitectura. Estudiar cossos en els quals l'àrea és major que el volum, o a l'inrevés, pot ser un exercici interessant a l'aula, tot i que són unitats de mesura diferents.

DANDY CANDIES

De la mateixa manera que a cursos anteriors hem estat treballant la distinció entre perímetres i àrees, al curs de 2n d'ESO creiem que és interessant posar la mirada en el **saber #2.MES.ME.I** que se centra en magnituds en una dimensió més gran. La proposta dels [Dandy Candies](#) que fa en Dan Meyer gira entorn a un problema en tres actes (podeu cercar més informació referent a aquest tipus de recurs en aquest [enllaç](#) del CREAMAT). Després del visionament d'un vídeo d'un minut, es passa la paraula a l'alumne que, de forma ordenada, genera una bateria de preguntes associades al metratge vist anteriorment. La generació de preguntes, la posterior recerca i, finalment, la comprovació determinen una seqüència molt rica. A més, és un entorn ideal perquè en el mateix grup classe es donin diferents itineraris de recerca un cop resoltes les preguntes inicials. En el Banc de Recursos del Fem Matemàtiques, elaborat per les professores Cyntia Riquelme i Mireia López, podem trobar dues entrades basades en el problema [Empaquetem caramels](#) proposat en la segona fase del concurs Fem Matemàtiques, l'any 2018, i basat en els [Dandy Candies](#). Aquestes entrades, [Aigg les 3D! Un problema de geometria](#) i [Ampliació EMPAQUETEM CARAMELS feat. Jordi Font](#), proporcionen una anàlisi competencial de la resolució del problema, amb recursos i idees per dur-lo a l'aula.

CILINDRES D'ÀREA LATERAL IGUAL

Dos cilindres d'àrea lateral igual tenen la mateixa capacitat? Aquesta pregunta ha estat el fonament de diferents recursos que giren entorn a aquest fet. En el llibre *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (Galilei, 1638) trobem un estudi que gira al voltant de la capacitat d'uns sacs de tela que tenen la mateixa superfície lateral. Sobre el text de Galileu Galilei, la gran Emma Castelnuovo va organitzar diferents treballs amb els seus alumnes, tal com es pot veure en la següent imatge:



Font: Matematica nella realtà (Castelnuovo & Barra, 1976)

Autors: Emma Castelnuovo i Mario Barra

Una versió més actual i de proximitat ens la comparteix Núria Guitart que porta per títol [... i les crispetes?](#). L'activitat requereix un material de cost baix però d'alt valor didàctic. La clau de l'èxit gira entorn de preguntar a la classe que conjeturin què passarà abans de l'experimentació. Què creieu que passarà? N'hi haurà que creuran que, en tenir la mateixa àrea lateral, la capacitat d'ambdós cilindres serà la mateixa. D'altres es decantaran per un dels dos. Seguidament, en descobrir que el cilindre que té major capacitat és el més baix (el que té radi més gran) caldrà analitzar la fórmula per posar en relleu el paper que pren el radi

al quadrat. Per acabar, es pot demanar a l'alumne que cerqui exemples on àrea i volum tinguin relacions d'ordre diferents en funció de la magnitud que estiguem mirant, àrea o capacitat/volum.

Representació plana d'objectes tridimensionals (prismes i cilindres) en la resolució de problemes. ME.J

La projecció d'un objecte tridimensional en dues dimensions permet simplificar-ne l'estructura per facilitar-ne l'anàlisi i els càlculs. Aquest aspecte és especialment útil quan es vol calcular longituds, àrees o volums, o quan es volen comparar distàncies en diferents parts de l'objecte. L'adquisició del **saber #2.MES.ME.J** contribuirà a la resolució de problemes en geometria en dues i tres dimensions i altres disciplines relacionades amb la mesura i l'espai.

En el context de 2n d'ESO, els alumnes ja han adquirit una certa familiaritat amb les formes geomètriques bàsiques, com ara els polígons, i han après a calcular àrees i perímetres. Ara, amb la introducció d'objectes tridimensionals, s'enfronten al repte d'analitzar-los en relació amb la seva representació en el pla. Això requereix que desenvolupin habilitats de visualització espacial, ja que han de comprendre com desplegar les cares d'un prisma o d'un cilindre en un pla per tal de poder estudiar les seves propietats de manera més fàcil.

Aquesta habilitat no només millora la comprensió de les propietats geomètriques, sinó que també té aplicacions pràctiques en disciplines com l'arquitectura, la física o la indústria, on la capacitat de passar d'un model tridimensional a una representació plana és essencial per a la resolució de problemes reals.

LA CAIXA PERFECTA

Per exemple, en un prisma rectangular es poden desplegar les sis cares per obtenir una figura plana composta per rectangles que representen les superfícies d'aquest prisma. Es pot demanar als alumnes que dissenyin una caixa amb forma de prisma de base quadrada que tingui un volum de 1000 cm^3 . Els alumnes han de calcular les dimensions de la caixa i, després, fer-ne el desplegament en un pla. El repte consisteix a trobar la distribució de les dimensions que utilitzi la menor quantitat de material possible (és a dir, que tingui la menor àrea superficial). Aquesta optimització s'ha d'afrontar des d'un punt de vista experimental i qualitatiu (sense fer entrar en joc el concepte de derivada).

ESTUDI D'UNA LLAUNA DE REFRESC

De manera similar, en un cilindre el desplegament dona lloc a un rectangle (corresponent a la superfície lateral) i dos cercles (corresponents a les bases). A través d'aquestes representacions, els alumnes poden resoldre problemes relacionats amb el càlcul d'àrees, la comprensió de trajectòries i la determinació de longituds, entre altres conceptes. Proposar el disseny d'una llauna de refresc amb forma de cilindre que contingui 330 ml de líquid (0,33 litres) i cercar-ne les dimensions que en minimitzin la superfície pot ser una nova activitat en la mateixa direcció. Posteriorment, es pot proposar la comparació dels resultats obtinguts amb les dimensions que ens ofereixen les marques de refresc.

L'ARANYA I LA MOSCA

Un problema clàssic i de resposta evident té per protagonistes una mosca i una aranya:

En un prisma rectangular, una aranya es troba en una cara i una mosca en una altra cara oposada. Quin és el camí que ha de seguir l'aranya per arribar a la mosca?

Probablement, els alumnes intentaran resoldre-ho directament en tres dimensions. Després de l'acompanyament del docent, hauran de desplegar el prisma per representar el camí en dues dimensions i calcular la longitud exacta del recorregut. A [The Spider and the Fly](#) de NRIC es recullen diferents propostes per ser dutes a l'aula i, fins i tot, possibles respostes que han donat els alumnes davant d'aquest repte. En el cas que es vulgui fer una proposta d'ampliació, es pot proposar a l'alumnat canviar la geometria de la sala:

què passaria si fos una sala cilíndrica? Com serien les geodèsiques que hauria de seguir l'aranya per apropar-se de forma òptima a la seva presa?

Relació entre les freqüències relatives i les probabilitats d'esdeveniments compostos en experiments aleatoris a través de la regla de Laplace. ME.K

Seguint un procés de maduració de l'alumne, anem avançant en el camp de l'estudi d'esdeveniments aleatoris. Després del treball realitzat al primer curs de secundària, cal fer un pas endavant amb el treball del **saber #2.MES.ME.K**.

La relació entre freqüències relatives i probabilitats és clau per comprendre fenòmens aleatoris en matemàtiques. L'estudi de la freqüència relativa d'un esdeveniment ha de permetre a l'estudiant estimar la seva probabilitat. La regla de Laplace serà el punt de partida per calcular probabilitats teòriques en esdeveniments equiprobables. Ara bé, en un context d'esdeveniments aleatoris compostos (combinació d'esdeveniments simples fets de manera consecutiva) caldrà tenir molta cura a l'hora d'estudiar el nombre de casos possibles i favorables. Atesa aquesta dificultat, és clau una aproximació per part de l'alumne a través de l'experimentació i estudi de les freqüències dels esdeveniments aleatoris.

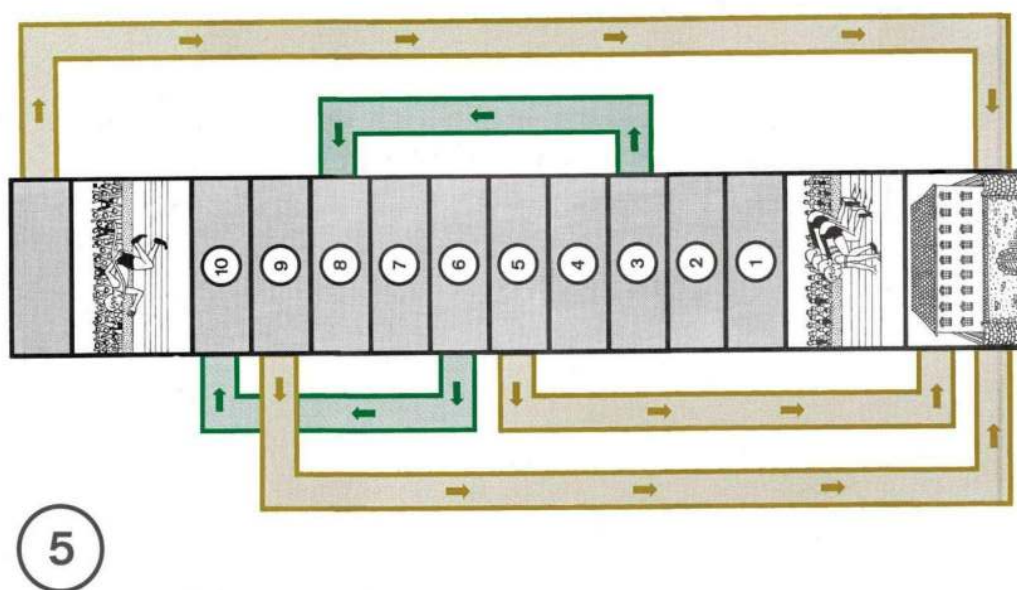
EL JOC DE L'ESCALA

Imaginem que volem estudiar el [Joc de l'escala](#) de la Caixa de Varga:

Material necessari: 1 cub amb 3 cares amb un punt verd i 3 cares buides, un peó per cada jugador i 80 fitxes d'un color diferent.

Al començament del joc, cada jugador rep 10 fitxes. Les fitxes restants van al banc. Cada jugador col·loca la seva fitxa al camp d'Inici i es tira el dau per torns. Si el punt verd apareix a la part superior d'un dau, el jugador pot avançar 2 espais, en cas contrari (espai blanc a la part superior) només 1 espai.

Qui arriba a la destinació (Z) rep 3 fitxes del banc. Al final d'una ronda de joc (quan tots els jugadors són a la meta o a la presó), cada jugador a la presó (G) ha de comprar la seva sortida per 1 fitxa.



Font: [Caixa de Varga](#)

Autor: Tamas Varga

La pregunta és clara: el joc afavoreix als jugadors, al banc o és un joc just? Abans d'atacar la pregunta a través d'un diagrama d'arbre (per exemple), és molt recomanable que es jugui (en petits grups de 3 o 4 estudiants) i es recullin els resultats de les diferents partides. Agrupant els resultats obtinguts dels diferents grups (o de diferents classes) tindrem un elevat nombre de resultats per poder fer unes primeres conjectures sobre el resultat esperat. Aquesta experimentació ens portarà de forma natural al càlcul dels casos favorables i possibles.

A tall d'ampliació d'aquest magnífic joc, es poden fer diferents estudis o variants d'allò més interessants:

- Quines són les caselles per on més es passa? I per on menys es passa?
- Què passaria si canviem la distribució de cares blanques o verdes del dau?
- Proposem que sigui l'alumnat qui dissenyi un taulell similar.

Aquesta activitat forma part del meravellós recurs que és la Caixa de Varga. Malauradament, aquest recurs ja no es pot adquirir (està descatalogat). Amb tot, els alumnes Roger Canals i Mario Delfa van fer un treball de recerca tutoritzat per Sergi Muria per recollir, traduir i digitalitzar gran part dels recursos que es podien trobar en la caixa original. Aquests materials es poden consultar en l'espai web de [La Caixa de Varga](#) de l'Institut Joncar.

Estimació i relacions

Sabers

- Estimació de mesures de longituds, àrees i volums a partir de l'experiència o dels atributs d'altres objectes. **[ESS]**
- Coneixement i ús de l'error absolut i relatiu per convenir i adequar la precisió dels resultats en situacions de mesura. **[ESS]** **#NUM.QU**
- Formulació de conjectures sobre l'anàlisi de la incertesa associada a un fenomen aleatori, basant-nos en l'estimació i l'experimentació. **#EST.PI**

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

L'estimació i la comprensió de les relacions entre magnituds físiques són fonamentals per desenvolupar una visió integrada de les matemàtiques a secundària. Així mateix, és essencial que l'alumnat conjecturi el grau d'incertesa d'un fenomen aleatori mitjançant l'anàlisi de les freqüències absolutes derivades de l'experimentació. El bloc d'Estimacions i Relacions introdueix la idea que tota mesura, ja sigui de magnituds com el perímetre, l'àrea o el volum, o d'esdeveniments aleatoris, implica una certa incertesa o error. Aquest enfocament permet que l'alumnat aprengui a assumir marges de precisió en les dades inicials i a comprendre la propagació de l'error en els càlculs posteriors.

A través d'aquest bloc, els estudiants es familiaritzen amb eines com l'estimació basada en l'experiència, l'ús de l'error absolut i relatiu, i la formulació de conjectures davant fenòmens incerts. Això fomenta una actitud crítica i reflexiva davant de situacions problemàtiques que involucren mesuraments i probabilitat, ja que aquestes esdevenen oportunitats per reflexionar sobre l'aproximació, la precisió i la incertesa en els

resultats.

Recomanem que en tota situació de mesura es comenci amb una estimació o predicció, que pot venir donada per un interval o cota. La posada en comú dels diferents intervals que sorgeixen en el grup classe poden afinar l'estimació, reduint-lo. Aquest treball, de manera gradual, ha de comportar que l'elecció final de l'interval estigui fonamentada en un raonament. D'aquesta manera provocarem que hi hagi hagut una comparació, ja sigui amb una imatge mental, amb un objecte físic del qual es coneix la mesura o amb experiències passades. Finalment, és important contrastar i analitzar l'estimació amb el mesurament, un cop fet.

Comentaris sobre les connexions

Aquest bloc presenta connexions fonamentals amb tres grans sentits matemàtics. D'una banda, els sentits numèric i espacial ens permetran treballar amb les estimacions i les relacions entre magnituds, com el perímetre, l'àrea o el volum. Aquí, la manipulació de nombres reals, com també la precisió en els càlculs, és clau per comprendre l'abast dels resultats i ajustar-los a la realitat. D'altra banda, el sentit estocàstic es fa present en la formulació de conjectures i la interpretació d'esdeveniments aleatoris. La connexió amb aquest sentit és especialment rellevant quan es treballa amb fenòmens incerts, ja que requereix de l'alumnat la capacitat de diferenciar entre allò que és probable i allò que és cert, la qual cosa demana una anàlisi rigorosa de la probabilitat. Així mateix, la connexió amb altres àrees del currículum enriqueix l'aprenentatge matemàtic i permet abordar aquestes habilitats des d'una perspectiva interdisciplinària, com, per exemple, les connexions que es donen amb la física i la química en els mesuraments d'objectes o fenòmens i la determinació d'errors experimentals.

Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

L'estimació de mesures de longituds, àrees i volums a partir de l'experiència és un saber que permet treballar amb objectes i situacions reals i ofereix a l'alumnat un context pràctic per posar en marxa les seves habilitats d'estimació. Paral·lelament, el coneixement de l'error absolut i relatiu és un altre saber essencial que permet analitzar la precisió dels resultats obtinguts, una competència crítica en qualsevol procés de mesurament. Aquests sabers, treballats de forma continuada al llarg del curs, ofereixen a l'alumnat eines per desenvolupar una actitud més crítica i reflexiva davant dels processos de mesurament i estimació.

Observacions sobre alguns sabers específics

El **saber #2.MES.ER.C** posa un èmfasi especial en la necessitat de passar per diferents fases abans d'arribar al càlcul formal de la probabilitat. És clau que l'alumnat formuli conjectures inicials (alerta amb la intuïció associada a experiments aleatoris) sobre el fenomen que s'estudia, seguides d'una fase d'experimentació i anàlisi de les freqüències relatives. Aquest procés permet una comprensió més intuïtiva abans d'introduir el càlcul formal del grau d'incertesa mitjançant la regla de Laplace, que es fonamenta en la mesura de probabilitats teòriques.

Recursos i activitats

Recursos i activitats per treballar sabers concrets

Estimació de mesures de longituds, àrees i volums a partir de l'experiència o dels atributs d'altres objectes. (ER.A)

L'estimació de mesures és una eina essencial en geometria, ja que permet als alumnes acostar-se al mesurament real a partir de la intuïció i l'experiència prèvia. El **saber #2.MES.ER.A** implica observar les dimensions d'un objecte, reconèixer-ne les característiques geomètriques i comparar-les amb objectes

coneguts. Per exemple, es poden estimar àrees o volums comparant-los amb objectes domèstics o elements de l'entorn escolar.

L'ús de teoremes com el de Pitàgores i Tales, ja treballats a 2n d'ESO, pot reforçar aquest procés. El teorema de Pitàgores és útil per estimar longituds en situacions en què la mesura directa és difícil, ja que permet calcular distàncies basant-se en altres dimensions conegudes. De la mateixa manera, el teorema de Tales facilita l'estimació de distàncies en objectes no accessibles directament mitjançant proporcions visuals o ombres. Aquesta estratègia és aplicable també al càlcul de volums de prismes i cilindres.

L'estimació permet als alumnes fer conjectures raonades sobre les mesures i, validant-les amb mesuraments precisos, millorar-ne la percepció espacial i numèrica. Aquest enfocament fomenta el desenvolupament del sentit geomètric i numèric i afavoreix habilitats en tasques com el disseny, el càlcul de materials o la planificació d'espais.

L'estimació s'hauria de fer prèviament a la presa de mesures directes o indirectes. Així, moltes activitats de mesurament poden incorporar una estimació inicial de la mesura que cal determinar. Activitats com Tres llaunes és un litre?, Cilindres d'igual àrea lateral o La caixa perfecta són exemples recollits en els sabers d'aquest bloc i resulten adequats per a aquest enfocament.

TUB DE PILOTES DE TENNIS

De manera habitual, les pilotes de tennis es comercialitzen en tubs cilíndrics, com el que es veu a la fotografia següent:



Font: Elaboració pròpia

Autor: Jordi Font

La pregunta és: en aquest cilindre, què és més llarg, el perímetre de la base o l'altura del tub?

Abans de mesurar, podem observar que l'altura del tub correspon a tres diàmetres de pilota. Sabem que el perímetre del cilindre és gairebé igual al del cercle màxim d'una pilota de tennis. Així doncs, com que el perímetre és igual a π vegades el diàmetre i π és major que 3, podem concloure que el perímetre és més llarg que l'altura.

Coneixement i ús de l'error absolut i relatiu per convenir i adequar la precisió dels resultats en situacions de mesura. (ER.B)

En el sentit de la mesura de 2n d'ESO, els nombres irracionals apareixen de manera inevitable en contextos com el teorema de Pitàgores o en el càlcul de perímetres, àrees o volums associats a π . En aquestes situacions, desenvolupar el **saber #2.MES.ER.B** prendrà molt de sentit. Serà molt interessant debatre aquest aspecte a classe, posant en relleu la precisió de les dades de partida del problema. De la mateixa manera, si treballem amb mesures preses per l'alumnat, les respostes haurien d'adequar-se a la precisió d'aquestes mesures inicials.

Independentment de la situació de partida, és fonamental que l'alumnat prengui consciència que el resultat obtingut, en la majoria dels casos, porta associat un cert error, derivat tant de la presa de mesures com dels càlculs fets posteriorment. Per aquest motiu, introduir l'estudi de l'error absolut i relatiu en contextos propers ajudarà a desenvolupar una consciència de la validesa i fiabilitat dels resultats obtinguts.

MESUREM LA CAPACITAT D'UN GOT DE TUB

Proposem una situació aparentment senzilla: determinar la capacitat d'un got de tub. En aquest repte, és important parar atenció als següents aspectes:

1. Quin error absolut i relatiu s'associa a la mesura del got?
2. Amb quants decimals de π farem els càlculs?
3. Quina cota d'error podem establir per al resultat final?

Per acabar, comprovarem el resultat amb una balança de precisió que, malgrat el nom, també presenta un marge d'error que es pot destacar per als estudiants.

Formulació de conjectures sobre l'anàlisi de la incertesa associada a un fenomen aleatori, basant-nos en l'estimació i l'experimentació. (ER.C)

L'anàlisi de la incertesa en fenòmens aleatoris, tal com treballa el **saber #2.MES.ER.C**, sovint suposa un repte per als estudiants, ja que la nostra intuïció pot portar-nos a conclusions errònies. És per aquest motiu que l'assoliment dels continguts associats a la probabilitat és més complex. Per tal que l'alumnat adquireixi una comprensió sòlida, resulta essencial passar per la fase d'experimentació abans d'afrontar càlculs formals d'incertesa, cosa que afavoreix la formulació de conjectures raonades basades en l'estimació i l'observació empírica. Tot i que la llei dels grans nombres prendrà un paper protagonista en la generació de les conjectures dels estudiants, caldrà posar en relleu que les afirmacions que es facin tindran un cert grau d'incertesa.

JOC DE DAUS DE DOS COLORS

En Martí i l'Aina juguen amb dos daus de dos colors (vermell i blau). En Martí guanya si en tirar els dos daus surten dues cares del mateix color. Per altra banda, l'Aina guanya si, en tirar els dos daus, surten dues cares de diferent color. En Martí té un dau amb 5 cares blaves i només una de vermella. Com ha de pintar l'Aina les cares del seu dau perquè el joc sigui just?

Molt probablement, la resposta inicial serà que, per tal que ambdós jugadors tinguin la mateixa probabilitat de guanyar, la solució és pintar el dau de l'Aina amb 5 cares vermelles i només una de blava (amb la idea de contrarestar el desequilibri del dau d'en Martí). Experimentar amb daus pintats d'aquests colors i observar les freqüències relatives de victòries d'en Martí i l'Aina pot ser una primera aproximació per veure que la conjectura inicial no era certa.

Aquest magnífic joc apareix, entre d'altres, en la conferència de Joan Jareño en les jornades de matemàtiques organitzades per l'Associació de Professors de Matemàtiques de les Comarques Meridionals (APMCM): [Què passarà? Intuïció i probabilitat](#). En el decurs de la conferència que porta aquest títol, apareixen altres contextos en què l'atzar té un paper important i la intuïció no sempre és una bona aliada.

Blocs de competències: processos matemàtics i gestió socioemocional

El conjunt de sabers que constitueixen el sentit de la mesura, com tots els altres sentits, s'han de relacionar amb el conjunt de competències del currículum. Sense un coneixement dels sabers difícilment es poden desenvolupar els processos per avançar en l'assoliment de les competències i, d'altra banda, la manera com s'introdueixen, es construeixen i s'utilitzen els sabers és clau per fer un treball competencial.

Així doncs, tots els sabers poden contribuir a desenvolupar qualsevol competència si es treballen en activitats adequades. Igualment, un saber pot contribuir a desenvolupar diverses competències.

Es presenta la relació entre els sentits i les competències específiques a través dels processos: Resolució de problemes (competències específiques CE 1 i CE 2), Raonament i prova (competències específiques CE 3 i CE 4), Connexions, en què distingim les internes (competència específica CE 5) i les externes (competència específica CE 6), Comunicació i representació (competència específica CE 7) i Gestió socioemocional (competències específiques CE 8 i CE 9).

Aquesta relació, pel que fa al sentit de la mesura, es concreta, en el marc d'aquest exemple, de la manera que es descriu en els apartats següents, tot i que poden haver-hi altres anàlisis igualment vàlides.

Resolució de problemes (CE 1 i CE 2)

La resolució de problemes és el pilar central de l'aprenentatge matemàtic, ja que dona coherència als altres processos. Tal com afirma Lluís Antoni Santaló (Santaló, 1975): «Ensenyar matemàtiques ha de ser equivalent a ensenyar a resoldre problemes. Estudar matemàtiques no ha de ser res més que pensar en la solució de problemes.» Aquest enfocament pren especial rellevància a 2n d'ESO, on es treballen sabers fonamentals com el teorema de Tales i el de Pitàgores, la introducció a problemes que impliquin el càlcul d'àrees i volums de figures tridimensionals, com prismes i cilindres, o bé l'experimentació de fenòmens aleatoris compostos (previ al càlcul de la probabilitat a través de la regla de Laplace). En aquest context, l'elecció adequada d'unitats patró permet interpretar i calcular mesures directes o indirectes. Així mateix, valorar i argumentar la idoneïtat dels resultats obtinguts, coneixent l'error absolut i relatiu si s'escau, afavoreix la resolució de situacions pròpies de la vida quotidiana i dota de sentit pràctic i transversal el treball matemàtic.

Sabers

Alguns sabers d'aquest sentit fan referència directa al procés de resolució de problemes. Per exemple:

- El **saber #2.MES.MA.A** permet identificar i aplicar les unitats necessàries per resoldre situacions reals de càlcul geomètric.
- El **saber #2.MES.ME.B** contribueix al procés de la resolució de problemes mitjançant la recollida de dades directes de l'entorn.
- El **saber #2.MES.ME.H** facilita abordar problemes en contextos pràctics que impliquen càlcul geomètric.
- El **saber #2.MES.ME.J** afavoreix la resolució de problemes espacials transformant formes tridimensionals en representacions bidimensionals útils.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers fan referència directa al procés de resolució de problemes. Per exemple:

- El Teorema de Homer Simpson, comentat per treballar el **saber #2.MES.ME.E**, proposa investigar l'existència d'algun triangle rectangle que satisfaci la fórmula que es presenta en l'esquetx. Cercar l'existència del triangle en qüestió serà un bon repte per posar en joc diferents propietats associades a la mesura dels costats d'un triangle.
- L'activitat en tres actes de Dan Meyer que porta per títol Dandy Candies, ubicada com a proposta per assolir el **saber #2.MES.ME.I**, ens proposa una situació inicial en què l'alumnat podrà generar preguntes associades al vídeo inicial. Generalment, les preguntes que solen aparèixer a l'aula solen posar en joc aspectes associats a la diferenciació entre longitud, àrea i volum d'un objecte tridimensional.
- Des d'un punt de partida més manipulatiu, l'activitat Cilindres d'igual àrea lateral, recomanada en el **saber #2.MES.ME.I**, permet investigar sobre la desigualtat de volums (en aquest cas, es pot parlar de capacitat) de cilindres d'igual àrea lateral. Donat un rectangle amb una àrea lateral determinada, quin cilindre tindrà més capacitat?

Raonament i prova (CE 3 i CE 4)

El desenvolupament del raonament i la prova s'enfoca en l'anàlisi de relacions entre magnituds en figures bidimensionals i tridimensionals, així com en l'experimentació amb fenòmens aleatoris compostos. La deducció de relacions entre diferents magnituds i les seves expressions, mitjançant material manipulatiu o tecnològic, a partir del raonament i l'argumentació, proporcionarà nou coneixement matemàtic. Aquest enfocament permet aprofundir en l'estudi d'àrees i volums de figures tridimensionals, com prismes i cilindres, i avançar en el tractament del grau d'incertesa, aplicant la regla de Laplace a esdeveniments compostos. Específicament, a 2n d'ESO, la incorporació dels teoremes de Tales i Pitàgores ofereix eines essencials per explorar la transició entre mesures directes i indirectes, tot potenciant la formulació i validació de conjectures com a part fonamental del procés d'aprenentatge.

Sabers

Alguns sabers d'aquest sentit fan referència directa al procés de raonament i prova. Per exemple:

- El **saber #2.MES.ME.E** requereix raonament deductiu per establir la validesa del teorema a partir de relacions geomètriques.
- El **saber #2.MES.ME.F** implica aplicar les relacions descobertes en el saber anterior per deduir

mides exactes en polígons.

- El **saber #2.MES.ME.D** mostra com proporcions establertes són útils per justificar mètodes de mesura indirecta.
- El **saber #2.MES.ER.C** contribueix a la formulació de conjectures explorant esdeveniments aleatoris.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers fan referència directa al procés de raonament i prova. Per exemple:

- Conjecturar ha de ser un verb que ha d'aparèixer en les classes de matemàtiques. Partint de l'experiència de l'alumne, s'han de poder estimar diferents magnituds associades a la mesura d'un objecte. En el cas del recurs Tres llaunes és un litre?, esmentat per treballar el **saber #2.MES.ER.C**, ens proporcionarà un context ideal en què la conjectura i la sorpresa apareixen a parts iguals.
- La descoberta del teorema de Pitàgores és un dels sabers essencials associats al sentit de la mesura en aquest curs, tal com proposem en el **saber #2.MES.ME.E**. Activitats com la Balança Pitagòrica o El recíproc del teorema de Pitàgores seran dues activitats que permetran assimilar de forma progressiva i experimental les relacions que s'estableixen al voltant dels triangles rectangles.
- El càlcul de l'àrea d'un cercle és un dels sabers que es treballen al llarg de la secundària. Per poder demostrar la fórmula que permet calcular aquesta mesura, es requereix l'ús del càlcul integral. No obstant, a través de les activitats Acotació de l'àrea del cercle, L'àrea del cercle amb formatges o Desplegant el cercle ens permetran argumentar la relació entre la seva àrea i el seu perímetre.

Connexions amb altres parts de la matemàtica (CE 5)

Les connexions amb altres parts de les matemàtiques es fan especialment evidents en el desenvolupament del sentit de la mesura. L'ús de la proporcionalitat numèrica i geomètrica en situacions de mesura consolidaran els sabers comuns amb els sentits numèric i espacial. Les simulacions necessàries per mesurar la incertesa requeriran els processos associats al pensament computacional i, per tant, propis del sentit algebraic. Aquest enfocament permet establir relacions que van més enllà del sentit de la mesura, ja que integra conceptes de proporcionalitat en figures geomètriques, com en l'aplicació del teorema de Tales, i fomenta el raonament sobre la invariabilitat de magnituds, com el volum de prismes.

Aquest treball interdisciplinari també es manifesta en la interacció amb el sentit estocàstic, quan es plantegen activitats que analitzen probabilitats en esdeveniments compostos, connectant els processos de mesura amb l'experimentació i la modelització. Així, l'alumnat pot comprendre millor com les matemàtiques formen un conjunt coherent, en què cada sentit enriqueix la comprensió i aplicació dels altres. Aquesta perspectiva no només enforteix la comprensió conceptual, sinó que també facilita la transferència de coneixements en contextos reals i acadèmics diversos.

Sabers

Alguns sabers treballats en el sentit de la mesura estan molt presents en tota la matemàtica, esdevenen eixos de connexió interna i, per tant, són peces fonamentals en el desenvolupament de la competència CE 5:

- El **saber #2.MES.MA.B** enllaça coneixements numèrics amb geometria, facilitant comparacions entre mesures volumètriques.
- El **saber #2.MES.ME.G** connecta conceptes geomètrics i numèrics mitjançant activitats manipulatives per descobrir la relació entre el radi i la superfície d'una circumferència.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers aporten o utilitzen connexions internes. Per exemple:

- La construcció d'un «gruixòmetre», en el **saber #2.MES.ME.A**, ens permetrà posar en joc aspectes de proporcionalitat directa associades al teorema de Tales.
- Hi ha infinites caixes amb una forma de prisma de base quadrada. De totes les caixes, quina serà «La caixa perfecta» que contingui 1000 cm³?, recurs esmentat per al **saber #2.MES.ME.J**. Observar que hi ha infinits prismes que satisfan aquestes condicions inicials és el primer pas. Un possible camí és estudiar les relacions que han de tenir les longituds de les arestes per tal que el volum es mantingui invariant.
- Al llarg de tot el sentit de la mesura, els sabers que es van presentant tenen connexions amb la resta de sentits del currículum. Una connexió molt especial on caldrà posar atenció és la que s'estableix amb el sentit estocàstic. Un bon exemple d'aquest vincle el trobarem amb el «Joc de daus de dos colors» comentat per treballar el **saber #2.MES.ER.C**.

Connexions amb altres matèries i amb l'entorn (CE 6)

El sentit de la mesura es connecta de manera natural amb altres àrees de coneixement i amb l'entorn quotidià. L'estudi de diferents contextos no matemàtics on la mesura és essencial enfortirà les connexions de situacions matemàtiques amb el seu entorn. L'elecció d'instruments de mesura, amb l'evolució de la tecnologia i l'establiment del sistema internacional d'unitats, ens possibilitarà mesurar de manera consensuada el món que ens envolta. Aquest vincle amb l'entorn es veu reflectit en activitats pràctiques que permeten a l'alumnat explorar fenòmens reals, com l'estudi de capacitat i volum, que connecta amb la història de la metrologia, o el càlcul de dimensions relacionades amb tecnologia i enginyeria.

La programació d'activitats contextualitzades no només desenvolupen competències específiques de mesura, sinó que també amplien la comprensió interdisciplinària per establir vincles que fan de les matemàtiques una eina útil i aplicable a l'entorn i a la societat.

Sabers

A continuació s'indiquen, a tall d'exemple, alguns d'aquests sabers:

- El **saber #2.MES.MA.C** promou l'articulació entre sistemes numèrics i unitats, fonamental per a comparacions quantitatives. Aquest saber és especialment rellevant en les matèries de física, química o tecnologia.
- El **saber #2.MES.ME.K** vincula la probabilitat amb experiments associats a l'aleatorietat d'un esdeveniment. Aquest fet permet indagar situacions properes a les ciències naturals (física, química, biologia...) i socials (les relacions que estableix la societat en contextos d'incertesa).

Recursos

Molts dels recursos descrits per treballar diferents sabers del sentit de la mesura ofereixen oportunitats per fer connexions externes. Per exemple:

- Un dels grans valors que tenim a Catalunya associats al sentit de la mesura és la Secció Catalana de

Metrologia. Un dels objectius que té aquest col·lectiu és «Fer divulgació en l'ensenyament» secundari entorn les unitats de mesura i tot el que les envolten. Un bon exemple d'aquest fet el trobem en el text d'Eugeni Vilalta en l'article [Capacitat i volum](#), proposat per treballar el **saber #2.MES.MA.B.**

- Una de les connexions més fortes que trobem en el sentit de la mesura és la que s'estableix amb el camp de la tecnologia. La construcció i ús d'una cinta diamètrica, esmentada com a recurs per al **saber #2.MES.ME.A.**, semblant a la que fan servir els enginyers forestals, el càlcul de «La longitud d'una hèlix», en el **saber #2.MES.ME.F.**, que es pot vincular a l'estudi del pas de rosca d'un cargol, o l'estudi i determinació de «Les dimensions d'una pantalla o monitor», en el **saber #2.MES.ME.F.**, són una bona mostra d'aquesta relació entre aquests dos àmbits.
- La mesura està connectada amb molts àmbits quotidians del nostre alumnat. La proposta que podem trobar en l'activitat [El riu, el nombre \$\pi\$ i distàncies al planeta](#), explicada per treballar el **saber #2.MES.ME.H.**, ens proposa fer una descoberta del nombre π associada a les longituds dels rius. Aquest estudi apropa el camp de la geologia i les matemàtiques.

Totes aquestes activitats contribueixen al desenvolupament de la competència CE 6.

Comunicació i representació (CE 7)

La comunicació i la representació són fonamentals en el desenvolupament del sentit de la mesura, ja que permeten compartir i consolidar idees matemàtiques mitjançant llenguatges precisos i visuals. L'intercanvi d'idees en grup, les discussions i l'argumentació fomenten l'aprenentatge col·laboratiu, mentre que l'expressió gràfica i escrita contribueixen a l'organització i transmissió del coneixement matemàtic. La utilització escaient d'esbossos, escales, desplegaments..., amb l'ajut de programes informàtics o de geometria dinàmica, donarà significat i permanència a les idees matemàtiques del sentit de la mesura i facilitarà la resolució de problemes. La tria de bones unitats de mesura ajudarà a la comprensió de les situacions de mesura plantejades i dels resultats obtinguts.

A més, l'ús d'eines gràfiques permet representar amb precisió mesures i relacions espacials, aspecte essencial per interpretar dades i solucionar problemes complexos. Això és especialment rellevant per diferenciar conceptes geomètrics i comunicar amb claredat resultats que es poden aplicar en contextos com la construcció de mapes, plànols o models tridimensionals. Aquest procés no només millora la comprensió de les mesures, sinó que també redueix errades en la seva interpretació i fomenta la reflexió sobre la importància d'una representació acurada en les activitats matemàtiques.

Sabers

Alguns sabers del sentit de la mesura poden contribuir de manera especial al desenvolupament de la competència CE 7. Per exemple:

- El **saber #2.MES.ME.C** proporciona una representació gràfica precisa per comunicar mesures i relacions espacials.
- El **saber #2.MES.ME.I** ha de permetre expressar de manera clara i visual la diferència entre conceptes geomètrics bàsics.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers del sentit de la mesura fan referència al procés

de comunicació i representació. Per exemple:

- L'activitat [Tales assedegat](#), recomanada per treballar el **saber #2.MES.ME.D**, posa en joc les proporcions associades a la fotografia matemàtica. El pas del 3D al 2D serà clau per obtenir il·lusions òptiques creades pel mateix alumnat.
- Malauradament, en molts espais, físics o digitals, trobem imatges que han estat distorsionades i no mantenen la relació entre les seves dimensions. L'activitat Quina desproporció, relacionada amb el **saber #2.MES.ME.D**, posa l'accent en la relació entre el teorema de Pitàgores i les escales en imatges i fotografies.
- La rectificació de corbes, per exemple, de camins o perfils litorals, és un procés molt interessant des de diferents punts de vista associats al sentit de la mesura. En l'activitat [Mesura de longituds i d'àrees amb fil i paper vegetal quadriculat](#), esmentada per treballar el **saber #2.MES.ME.D**, trobarem un bon exemple en què es posa en joc la CE 7.

Gestió socioemocional (CE 8 i CE 9)

La relació de l'alumne amb les matemàtiques cal ser treballada des de dues vistes diferents: la individual i la col·lectiva. Des d'un punt de vista personal, cal planificar recursos per a l'aula on l'experimentació i la descoberta prenguin un paper protagonista. Paral·lelament, l'ambient de resolució de problemes enriquirà un entorn on serà propícia l'aparició de les possibles dificultats i errades. Això no obstant, caldrà vetllar per desenvolupar les destreses socials de cadascun dels alumnes dintre del grup classe. La recerca d'estratègies guanyadores en el joc Square it o l'estudi de la relació entre les freqüències relatives i les probabilitats d'esdeveniments compostos en experiments aleatoris a través de la regla de Laplace seran una bona oportunitat perquè l'alumne desenvolupi aquestes destreses. En ambdues visions, la gestió del docent serà essencial per al creixement de l'alumne.

La gestió socioemocional està vinculada a dues competències específiques:

- CE 8, relacionada amb el desenvolupament d'habilitats personals com les creences, les actituds i les emocions envers les matemàtiques.
- CE 9, centrada en el desenvolupament d'habilitats socials com el treball en equip i la presa de decisions.

A continuació s'indiquen alguns aspectes que, treballats des del sentit de la mesura, poden contribuir al desenvolupament de les competències CE 8 i CE 9.

Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 8:

- Les activitats que integren la resolució de problemes han de ser estimulants i significatives, per tal de promoure l'interès per investigar sense generar bloquejos. A través d'una gestió adequada, l'alumnat pot reconèixer els seus avenços i valorar les aportacions dels seus companys i companyes. Propostes com L'aranya i la mosca ofereixen un punt de partida accessible que encoratja la participació de tothom, però evolucionen cap a un treball més profund que afavoreix la descoberta gràcies a la representació plana de l'habitació.
- El joc pot ser una eina poderosa per fomentar el desenvolupament socioemocional de l'alumnat, ja que ofereix un entorn segur per explorar habilitats com la presa de decisions, la gestió de l'estrès i la col·laboració. Activitats lúdiques com Square It! de NRICH no només treballen competències

matemàtiques, sinó que també conviden els estudiants a gestionar les seves emocions davant de l'èxit o la frustració, alhora que aprenen a respectar el torn i les estratègies dels altres. Aquesta dinàmica afavoreix la construcció de la confiança en un mateix i el desenvolupament d'una actitud resilient davant els reptes, aspectes clau per al seu creixement personal i social. Paral·lelament, amb aquesta activitat, anem introduint els fonaments que ens permetran construir la descoberta del teorema de Pitàgores.

- La creació i el desenvolupament d'un joc poden esdevenir una experiència enriquidora per treballar el sentit socioemocional de l'alumnat. Per exemple, l'adaptació del joc de taula [Timeline](#) per explorar magnituds i unitats de mesura no només crea un context d'aprenentatge col·laboratiu, sinó que també ofereix una oportunitat per potenciar habilitats com l'escolta activa, la negociació i el respecte per les idees dels altres. Al llarg del procés de creació, l'alumnat s'enfronta a desafiaments que exigeixen paciència, creativitat i treball en equip. Aquest entorn fomenta la confiança en les pròpies capacitats, afavoreix la cohesió grupal i convida a reflexionar sobre la gestió d'errors i encerts, establint una base sòlida per al creixement socioemocional. A més, aquest recurs s'alinea amb el desenvolupament de la competència específica CE8 i també pot servir com un excel·lent exemple per abordar la CE9.

Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 9:

- L'activitat Construcció de la maqueta del centre és un exemple excel·lent per fomentar la competència CE 9. En aquesta proposta, els grups han de decidir conjuntament l'escala a utilitzar per construir les diferents parts de la maqueta, un procés que exigeix diàleg, escolta activa i capacitat per arribar a acords. Aquesta coordinació és essencial, ja que, sense una escala comuna, les parts de la maqueta no encaixaran i el projecte col·lectiu no podrà culminar amb èxit. A més de desenvolupar habilitats matemàtiques relacionades amb l'escala i la proporcionalitat, aquesta activitat promou la responsabilitat compartida i destaca la importància de treballar en equip per assolir un objectiu comú i reforçar la cohesió i el sentiment de pertinença al grup.
- L'activitat Construcció de la maqueta del centre exemplifica com el treball en grup pot esdevenir un motor per al desenvolupament de competències tant matemàtiques com socioemocionals. Inspirant-se en metodologies com les utilitzades en la reconstrucció de pobles ibèrics, els equips han de col·laborar per estudiar-ne les característiques. Aquesta coordinació requereix diàleg constant, capacitat de negociació i compromís col·lectiu.
- En l'activitat El joc de l'escala, el treball individual o en petits grups té un paper fonamental en la recollida de dades per a l'anàlisi probabilístic dins del gran grup classe. Cada estudiant, o cada parell de treball, recull dades de les seves pròpies partides jugades, fet que aporta una gran varietat d'experiments al conjunt. Aquest enfocament multiplica el nombre de proves i, per tant, augmenta la fiabilitat i la representativitat dels resultats obtinguts.