

# TOR 2n d'ESO: Sentit algebraic

|                                                                                 |           |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Consideracions generals.....</b>                                             | <b>1</b>  |
| <b>Blocs de sabers.....</b>                                                     | <b>2</b>  |
| Patrons.....                                                                    | 2         |
| Sabers.....                                                                     | 2         |
| Descripció i orientacions.....                                                  | 2         |
| Recursos i activitats.....                                                      | 3         |
| Model matemàtic.....                                                            | 11        |
| Sabers.....                                                                     | 11        |
| Descripció i orientacions.....                                                  | 11        |
| Recursos i activitats.....                                                      | 12        |
| Variable.....                                                                   | 14        |
| Sabers.....                                                                     | 14        |
| Descripció i orientacions.....                                                  | 14        |
| Recursos i activitats.....                                                      | 15        |
| Igualtat i desigualtat.....                                                     | 18        |
| Sabers.....                                                                     | 18        |
| Descripció i orientacions.....                                                  | 18        |
| Recursos i activitats.....                                                      | 22        |
| Relacions i funcions.....                                                       | 28        |
| Sabers.....                                                                     | 28        |
| Descripció i orientacions.....                                                  | 29        |
| Recursos i activitats.....                                                      | 31        |
| Pensament computacional.....                                                    | 38        |
| Sabers.....                                                                     | 38        |
| Descripció i orientacions.....                                                  | 38        |
| Recursos i activitats.....                                                      | 40        |
| <b>Blocs de competències: processos matemàtics i gestió socioemocional.....</b> | <b>41</b> |
| Resolució de problemes (CE 1 i CE 2).....                                       | 42        |
| Sabers.....                                                                     | 42        |
| Recursos.....                                                                   | 42        |
| Raonament i prova (CE 3 i CE 4).....                                            | 43        |
| Sabers.....                                                                     | 43        |
| Recursos.....                                                                   | 43        |
| Connexions amb altres parts de la matemàtica (CE 5).....                        | 44        |
| Sabers.....                                                                     | 44        |
| Recursos.....                                                                   | 44        |
| Connexions amb altres matèries i amb l'entorn (CE 6).....                       | 45        |
| Sabers.....                                                                     | 45        |
| Recursos.....                                                                   | 45        |
| Comunicació i representació (CE 7).....                                         | 46        |
| Sabers.....                                                                     | 46        |



|                                                                                     |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Recursos.....                                                                       | 47 |
| Gestió socioemocional (CE 8 i CE 9).....                                            | 47 |
| Aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 8.....        | 48 |
| Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 9..... | 48 |

## Consideracions generals

El sentit algebraic aglutina un conjunt de blocs de sabers especialment important dins de les matemàtiques de l'educació secundària, ja que inclou l'aprenentatge d'un llenguatge nou (l'àlgebra), amb tot el que això implica, el desenvolupament del qual és rellevant per aprofundir en els processos i, per tant, en les competències presents en el currículum de matemàtiques.

Per tal de desenvolupar el conjunt de sabers que constitueixen el sentit algebraic en els diferents cursos, es proposa introduir el llenguatge algebraic partint dels coneixements aritmètics i geomètrics dels alumnes, tenint molt en compte les dificultats que suposa el treball amb un nou llenguatge. També és rellevant ajudar l'alumnat a donar significat al conjunt de símbols que apareixen en les expressions algebraiques i que representen incògnites, variables, paràmetres, operacions, així com identitats, equacions, inequacions i funcions. D'altra banda, cal mostrar que l'àlgebra és un llenguatge útil en situacions diferents, en particular per expressar generalitzacions de propietats, caracteritzar patrons i resoldre problemes. Pel que fa a l'aprenentatge de la resolució d'equacions, inequacions i sistemes i les seves aplicacions, creiem que cal emmarcar-lo en un ambient de resolució de problemes, que s'allunyi de l'aplicació mecànica de receptes i de la pràctica reproductiva de procediments opacs. També forma part d'aquest sentit el pensament computacional, que té característiques pròpies, diferents de les dels altres blocs de sabers, però que permet un ampli ventall de connexions internes que poden representar bones oportunitats didàctiques. Al final d'aquest apartat hi dediquem una atenció especial.

Com en qualsevol altre sentit, és molt important tenir en compte l'horitzó matemàtic, tant d'allò que ja s'ha treballat com del treball per desenvolupar en el futur en altres etapes educatives. En relació amb els sabers de primària, cal tenir en compte el coneixement de les operacions elementals i la seva relació, així com el coneixement de la prioritat de les operacions i l'ús de parèntesis. També el significat dels símbols aritmètics i de les operacions en els diferents conjunts numèrics (en particular, en els enters). Pel que fa a l'horitzó futur, el coneixement de l'àlgebra resulta indispensable per a l'alumnat que farà matemàtiques al batxillerat, però també si accedeix a mòduls professionals i al món laboral, com a eina per resoldre problemes, per caracteritzar els fenòmens de canvi, per argumentar i per expressar generalitzacions.

L'especificació i seqüenciació dels sabers del bloc Pensament computacional s'ha fet atenent diversos criteris. Primerament, s'han contextualitzat al màxim dins de les matemàtiques, establint connexions significatives amb altres blocs del sentit algebraic, amb altres sentits i amb processos com la resolució de problemes, i facilitant així la integració del pensament computacional en el treball matemàtic. Els sabers que s'hi han inclòs es classifiquen en quatre categories: les habilitats generals de pensament computacional (descomposició, patrons, abstracció i algorismes), la construcció d'algorismes executables per persones o ordinadors, l'ús d'eines computacionals en matemàtiques, i la gestió socioemocional. S'han intentat acollir tres opcions de treball diferents però compatibles: el treball sense eines digitals (pensament computacional «desendollat»), la creació de programes en diversos llenguatges de programació i l'ús d'aplicacions de robòtica i dispositius mòbils.

Voldríem acabar aquesta introducció amb una cita d'Alan H. Schoenfeld i Abraham Arcavi extreta de l'article «On the Meaning of Variable» (Schoenfeld & Arcavi, 1988), sobre la rellevància de l'àlgebra com a llenguatge i alhora la dificultat del seu aprenentatge:

*La notació matemàtica és meravellosa i poderosa. També és subtil i difícil d'aprendre. Quan ja la dominem, sovint oblidem com va ser de difícil i el que va implicar per al desenvolupament de la nostra comprensió.*

## Blocs de sabers

### Patrons

#### Sabers

- A. Observació i determinació de la regla de formació d'un patró numèric o geomètric. Càlcul del terme general. **[ESS]**
- B. Observació de regularitats en diferents contextos matemàtics que permetin extreure conclusions o descobrir propietats.

### Descripció i orientacions

#### Reflexions inicials

A 2n d'ESO es proposa la introducció del llenguatge funcional i de les tipologies de funcions més senzilles, tal com es pot consultar al bloc de **sabers #ALG.RF**. Si tenim aquest fet en l'horitzó, el treball previ de recerca de patrons és fonamental per ajudar l'alumnat a entendre més fàcilment el concepte de funció, ja que es comença treballant amb un domini discret.

Per altra banda, identificar patrons ajuda a desenvolupar la capacitat de raonament lògic i permet a l'alumnat descobrir i comprendre seqüències i regularitats en àmbits diversos, fet essencial en la resolució de problemes.

A 1r d'ESO, i potser a primària, s'haurà treballat la recerca de patrons senzills, tant numèrics com geomètrics. A 2n d'ESO s'espera que l'alumnat assoleixi una certa habilitat i pugui anar més enllà, motiu pel qual les propostes poden ser una mica més complexes. A més, també és possible que s'introdueixi en aquest curs el llenguatge algebraic (si no s'ha introduït ja a 1r), amb la qual cosa es pot acabar buscant una expressió algebraica que permeti generalitzar el patró treballat. Tanmateix, cal remarcar que no cal que sigui sempre l'objectiu final de la recerca de patrons: es podrien tenir dificultats per trobar l'expressió algebraica, o fins i tot ser impossible, però, en canvi, ser capaç d'identificar clarament el patró i explicar-lo de moltes maneres (bé mitjançant representacions o bé amb el llenguatge oral o escrit propi). No hem d'oblidar que el llenguatge algebraic tot just acaba d'entrar en el seu bagatge i és una eina molt potent, però també complexa, i per això alguns alumnes poden tenir dificultats en aquest aspecte i caldrà oferir-los més guiatge i més oportunitats d'aprenentatge. De totes maneres, aquest tipus d'activitats ens proporcionen un bon context per afavorir l'ús d'aquest llenguatge.

Tal com s'esmenta a altres cursos, cal remarcar la diferència entre una seqüència o successió —que és un conjunt ordenat d'elements— i un patró —que és la regularitat, si hi és, que marca l'estructura d'una successió. També cal recordar que un model adequat per treballar seqüències és, en primer lloc, buscar el següent terme, després buscar un terme proper, a continuació un terme llunyà i, finalment, si es considera oportú, el terme general. Per tal de determinar aquest terme general es fa molt necessari un treball ordenat. L'ús de taules per recollir les dades serà, en molts casos, determinant a l'hora de buscar el patró que segueix la seqüència i, per fer-ho, caldrà fixar-se no només en el resultat de cada terme sinó en el procés que s'ha seguit per obtenir-lo.

#### Comentaris sobre les connexions

No s'han indicat específicament connexions amb sabers d'altres sentits perquè hi són de manera molt àmplia, és a dir, podem incloure els patrons per treballar bona part dels sabers de 2n d'ESO. Així, podem treballar patrons numèrics quan treballem el sentit numèric o patrons geomètrics quan treballem el sentit espacial o el de la mesura, per exemple per veure com varia el perímetre o l'àrea de diferents figures en fer-les créixer. En el cas del sentit estocàstic, podem plantejar situacions de canvi quan estudiem estadística; per exemple, sabent les mesures de centralització d'un conjunt de dades, què passarà si sumem una constant a cadascuna de les dades? I si les multipliquem per una constant, quins canvis hi haurà?

## Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

Com també es troba reflectit al document de 1r d'ESO, identificar patrons ajuda l'alumnat a desenvolupar la capacitat de raonament lògic. L'estudi de patrons implica observar regularitats, fer conjectures o generalitzar, accions totes elles que permeten treballar el conjunt dels processos matemàtics, des del raonament i prova, la comunicació i representació, les connexions (tant intramatemàtiques com extramatemàtiques) fins a la resolució de problemes, present sempre a tots els blocs dels sabers del currículum. D'aquí el caràcter essencial del **saber #2.ALG.PA.A**.

A primer es demanava expressar matemàticament els patrons, fos verbalment o per mitjà dels símbols. Ara, a 2n d'ESO, s'inclou la cerca del terme general. El treball dels altres blocs del sentit algebraic donarà les eines perquè l'alumnat pugui començar a expressar les regles de formació dels patrons mitjançant el llenguatge algebraic. Quan treballem el **saber #2.ALG.PA.A**, el professorat ha de tenir cura que l'alumnat expressi els patrons, si es fa verbalment, amb llenguatge precís i, si es fa amb llenguatge algebraic, aprenent a fer servir els símbols i notació de manera apropiada.

## Recursos i activitats

### Recursos i activitats generals per al bloc de sabers

L'ús de material pot ajudar a entendre el problema, a resoldre i descobrir el patró. A la campanya [Laboratori de matemàtiques](#) del CREAMAT podem trobar propostes per treballar patrons amb diferents materials: [pattern blocks](#) i [cubets encaixables](#), entre d'altres.

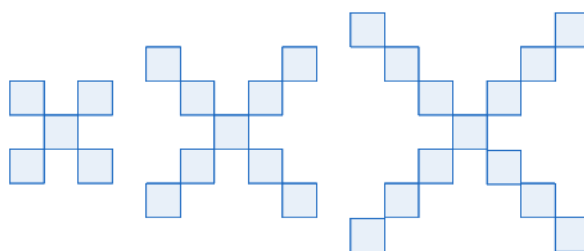
Una miniaplicació interessant per treballar tot el bloc de sabers és, per exemple, el [Mathstick Patterns](#) del web Transum.

També volem fer esment del [recull Fem Matemàtiques](#), un repositori excel·lent per trobar investigacions on la cerca de patrons hi és molt present.

### Recursos i activitats per treballar sabers concrets

#### **Saber #2.ALG.PA.A**

Una proposta per treballar el **saber #2.ALG.PA.A**, més concretament els patrons visuals de creixement, la trobem al web [Visual patterns](#), on es poden trobar 500 propostes de patrons visuals de diferents nivells de dificultat. A partir dels tres o quatre primers elements del patró i amb el nombre d'objectes enumerats sota cada patró per al pas 43 de la seqüència, l'alumnat ha de trobar la pauta de formació i expressar-la matemàticament. Podem trobar propostes més senzilles en les quals el creixement és constant i d'altres de més complexes (de les quals se'n parlarà al document de 3r curs) on no ho és. Un exemple del primer tipus és el següent:



Font: elaboració pròpia

Un cop hàgim presentat el patró a l'alumnat es pot demanar com seguirà la seqüència, és a dir, que dibuixin el següent pas o els dos passos següents. D'aquesta manera ens assegurem que han entès la regla de formació. Tot seguit, convé posar en una taula les observacions, d'aquesta manera serà més fàcil trobar regularitats:

| Pas | Nombre de quadrats |
|-----|--------------------|
|-----|--------------------|

|     |     |
|-----|-----|
| 1   | 5   |
| 2   | 9   |
| 3   | 13  |
| ... | ... |

Amb la taula, l'alumnat podrà veure que el nombre de quadrats augmenta de quatre en quatre, és a dir, que a cada pas hi ha 4 quadrats més que a l'anterior. Els demanem que ho posin per escrit i també que expliquin com augmenta; per exemple podrien dir: «posant un quadrat a cadascuna de les 4 puntes de la figura» o «posant 4 quadrats als extrems més allunyats del quadrat central». Poden trobar moltes formes diferents d'expressar-ho.

Ara bé, la taula ens servirà no només mirant-la verticalment (pensament recursiu). La informació més rellevant la podem obtenir observant-la horitzontalment (pensament funcional). Podem plantejar: a partir del número de pas, com trobem el nombre de quadrats? En un primer moment ho poden expressar verbalment: multiplico el pas per 4 i sumo 1. També poden anar fent passos en l'ús de símbols:  $\text{pas} \times 4 + 1$ . I finalment, poden donar l'expressió algebraica:  $4n + 1$ .

És interessant remarcar que a 2n d'ESO fem la proposta d'introduir la funció lineal i afí i, activitats com la que acabem de presentar, estableixen connexions interessants. Podríem acabar fent un gràfic que relacioni el número de pas amb el nombre de quadrats, introduint les relacions funcionals a través del treball de patrons.

### Saber #2.ALG.PA.A

Una altra proposta per treballar el **saber #2.ALG.PA.A** és [Cub pintat](#) del web NRICH. Aquesta proposta tant es pot treballar a 2n d'ESO com a 3r, en funció del treball previ sobre llenguatge algebraic que s'hagi fet a classe.

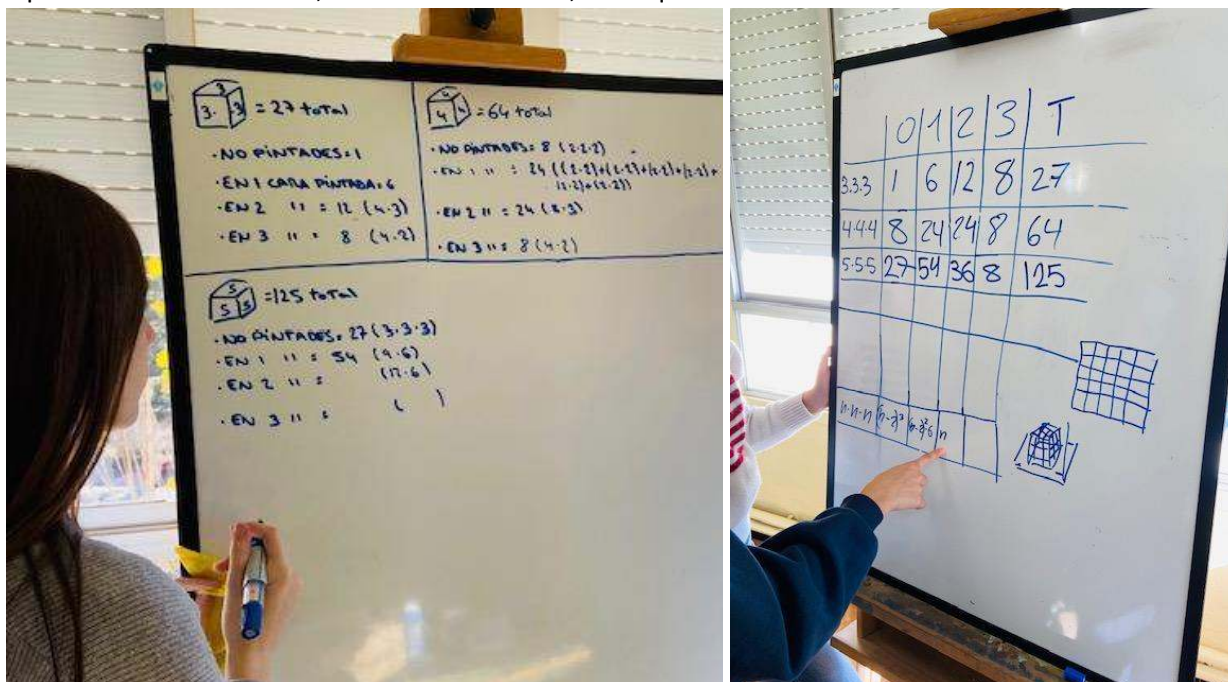
Es proposa a l'alumnat que imagini un cub gran format per 27 cubets petits de color vermell. Si submergim aquest cub  $3 \times 3 \times 3$  en un pot de pintura groga i el traiem, haurà quedat pintada de groc tota la superfície exterior. Ara desmuntem aquest cub gran i observem els 27 cubets petits. Podem fer moltes preguntes interessants per cercar pautes: Quants cubets tindran una cara pintada de groc? Quants en tindran dues? Quants no en tindran cap? Quin és el màxim nombre de cares que poden ser grogues? I si en lloc d'un cub  $3 \times 3 \times 3$ , en tenim un  $4 \times 4 \times 4$ , com variarà la resposta a les preguntes anteriors? I si en tenim un  $5 \times 5 \times 5$ ? I un  $10 \times 10 \times 10$ ? Podeu trobar-hi la pauta general?



Font: [Cub pintat](#), de NRICH

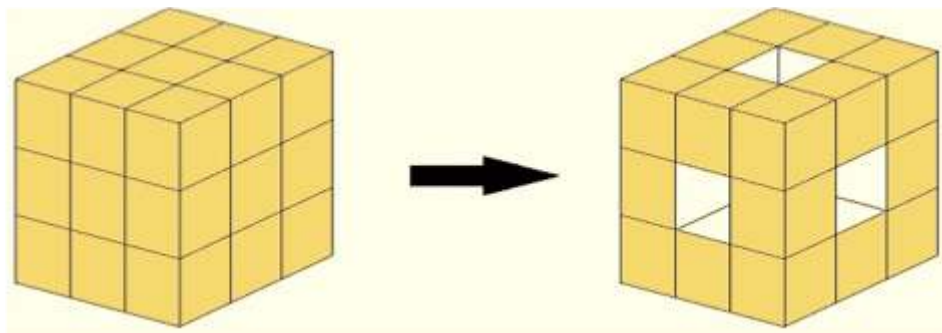
Aquest problema, que es pot trobar analitzat amb més profunditat al bloc Variable, en referència amb el **saber ALG.ID.E**, és interessant perquè es pot abordar numèricament i algebraicament i per la importància de com anar recollint i organitzant la informació per tal de descobrir els patrons. Tot seguit es poden veure dos exemples de com dos grups d'alumnes van anar treballant el problema. En el primer cas, va costar una mica més descobrir-ne la pauta; en el segon, el fet d'organitzar les troballes en una taula va facilitar molt

l'obtenció de la pauta. Quan ens trobem amb situacions com aquesta a classe, val la pena comentar totes les possibilitats de resolució que hagin sortit per tal que l'alumnat pugui conèixer múltiples formes de representar la informació i, donada una situació, hi cerqui la més eficient.



Font: Núria Serra

Al Fem Matemàtiques del 2015 hi va sortir una versió d'aquest problema, el [Cub foradat](#). La idea és la mateixa, però traient el cub central de cada cara:



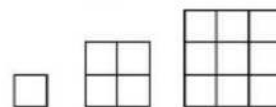
Font: [Cub foradat](#), del Fem Matemàtiques

En el banc de recursos del web de l'ABEAM trobem l'entrada [Cubs foradats](#). A més de l'enunciat complet del problema també hi ha una fitxa on s'explica per què és interessant el problema i es comenten molt detalladament estratègies de resolució.

### Saber #2.ALG.PA.A

També per treballar el **saber #2.ALG.PA.A**, es vol fer esment d'altres concursos que poden esdevenir una gran font d'idees, no només per a 2n d'ESO, també per als altres cursos, i on podem trobar molta varietat de propostes. Començarem parlant de la [Prova Cangur](#), activitat que cada any mobilitza milers d'infants i joves. Alguns exemples de les activitats proposades relacionades amb patrons són les següents:

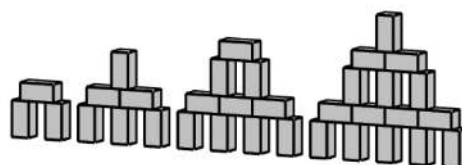
16. Amb quadradets tots iguals formem una sèrie de quadrats cada vegada més grans. Comencem amb un sol quadradet i després, per a passar d'un quadrat al següent anem afegint una filera més de quadradets en dos costats consecutius del quadrat. Podeu veure els tres primers quadrats de la sèrie. Quants quadradets hem d'afegir per passar del quadrat 2021è al quadrat 2022è?



- A) 4041      B) 4042      C) 4043      D) 4044      E) 4045

Font: Prova Cangur de 2n d'ESO de 2022

17. Amb blocs que mesuren  $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$ , la Joana ha fet les quatre construccions que es mostren a la imatge. Quina altura tindrà la construcció feta d'aquesta manera amb 28 blocs?



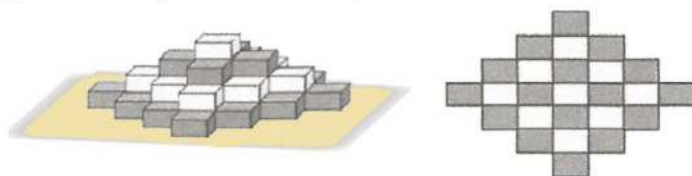
- A) 14 cm      B) 17 cm      C) 9 cm  
D) 11 cm      E) 12 cm

Font: Prova Cangur de 2n d'ESO de 2019

I el concurs [Problemes a l'esprint](#) és una altra de les activitats que engresquen l'alumnat a resoldre reptes matemàtics, ara, però, col·laborativament, treballant en equip. S'hi poden trobar propostes com les següents:

### Problema 2

La imatge mostra una vista en perspectiva i una vista superior d'una construcció feta amb maons blancs i maons grisos. Tots els maons es recolzen al terra o estan situats a sobre d'un altre maó de manera que a sobre d'un maó gris només hi pot anar un maó gris i a sobre d'un maó blanc només hi pot anar un maó blanc.



Quina és la diferència entre el nombre de maons grisos i el nombre de maons blancs?

(Nota: si creieu que hi ha més maons grisos el resultat el donareu com a positiu; si creieu que hi ha més maons blancs el resultat el donareu com a negatiu)

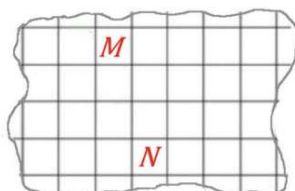
Font: Esprint de 1r i 2n d'ESO de 2020

### 7.- Ve un nombre $M$ del problema 1

En una graella quadrada, que per tant té tantes files com columnes, hi hem escrit successivament els nombres enters positius, 1, 2, 3, ... , un nombre en cada casella, de la manera següent:

- Posem l'1 en la primera casella de dalt a l'esquerra
- Escrivim els nombres d'esquerra a dreta i quan una fila està plena continuem en la fila que hi ha immediatament a sota de l'anterior, sempre d'esquerra a dreta.

En la figura es veu un tros de la graella, on hi hem indicat les posicions relatives dels nombres  $M$  i  $N$ , en què  $M$  és el nombre que ve del problema 1 i  $N$  és el resultat de la multiplicació  $3 \times M = N$ .



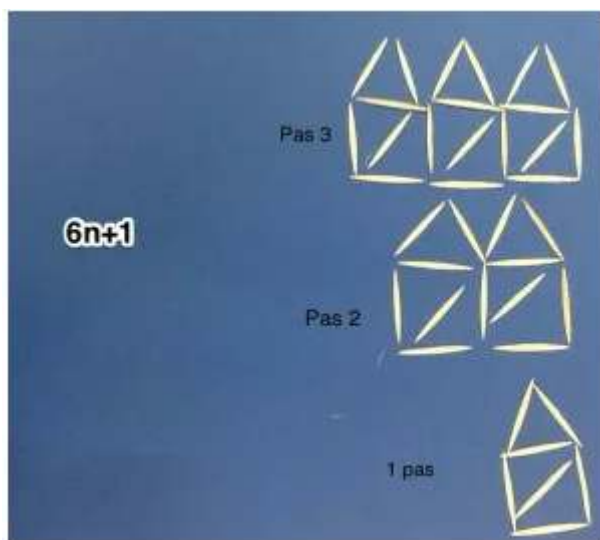
Quin és el nombre de files que té la graella? .

Font: Esprint de 1r i 2n d'ESO de 2024

Cal recordar que el **saber #2.ALG.PA.A** és essencial, però que els recursos que s'acaben de descriure són només una proposta.

#### Saber #2.ALG.PA.A

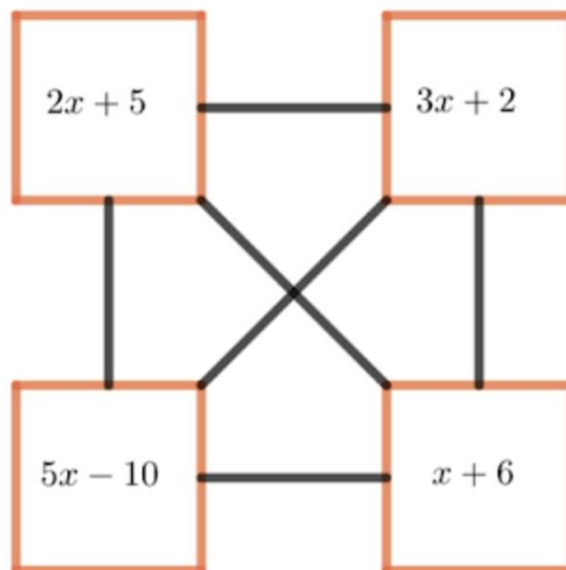
Un tipus d'activitats interessants són els [problemes inversos](#), en els quals donada l'expressió de la generalització s'han de construir patrons generadors. Al bloc de l'escola Sadako podem veure com es poden portar a l'aula. És interessant veure com una mateixa expressió algebraica pot venir de diferents situacions geomètriques.



Font: [Escola Sadako](#)

#### Saber #2.ALG.PA.B

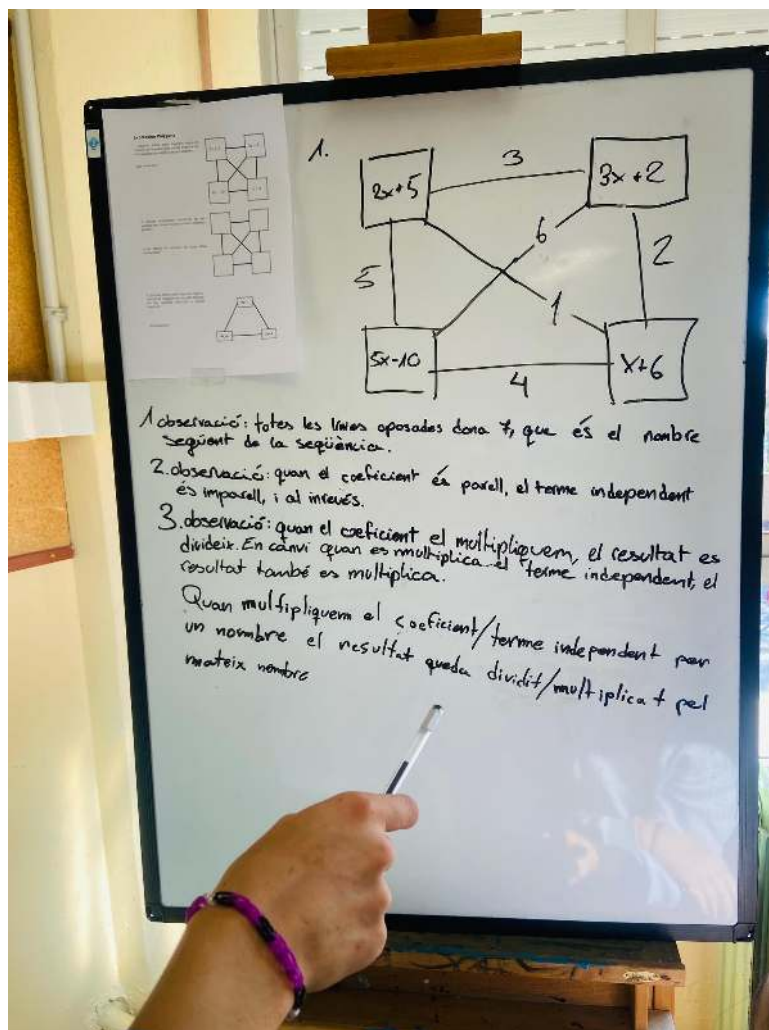
Per treballar el **saber #2.ALG.PA.B** proposem com a exemple l'activitat [Pràctica productiva: equacions de 1r grau](#) esmentada també al bloc Igualtat i desigualtat d'aquest mateix curs (**#2.ALG.ID**) i que es pot trobar al web del PuntMat.



Font: [PuntMat](#)

L'alumnat aprèn a resoldre equacions i, a continuació, cal que practiquin. Aquestes activitats proposen posar el focus en la cerca de patrons i regularitats i l'establiment de conjetures, a més de posar en pràctica les destreses apreses per resoldre les equacions.

Els dos primers exemples que se'ns mostren al web del PuntMat s'inspiren en la proposta de @colinfoster77 a [Expression Polygons](#) i, el tercer exemple, en la proposta d'@openmiddle [Solving Equations with Variables on Both Sides](#).



Font: Núria Serra

Pot resultar interessant veure el [vídeo](#) de la primera sessió de la formació [Activitats riques i competències matemàtiques a l'aula de secundària](#) organitzada pel CREAMAT –i que es va portar a terme el mes de juny de l'any 2020. Al vídeo es pot veure com les professores Cecília Calvo i Laura Morera fan una anàlisi d'aquesta activitat, donen idees per portar a l'aula, proposen preguntes interessants i fan aportacions de com estirar-la.

### Saber #2.ALG.PA.B

La característica d'Euler relaciona el nombre de vèrtexs, cares i arestes dels poliedres. Es proposa descobrir aquesta relació a partir de la investigació amb diferents poliedres i així connectar el treball de cerca de patrons i regularitats amb el treball del sentit espacial. Es pot trobar una referència a aquesta activitat al bloc Figures geomètriques d'aquest mateix curs ([#2.ESP.FG](#)), dins de les propostes del Sentit espacial. A la campanya Laboratori de matemàtiques del CREAMAT s'explica una proposta per treballar la característica d'Euler a l'aula, titulada [Comptem cares, arestes i vèrtexs](#).

Es pot començar demanant a l'alumnat que construeixi diferents poliedres d'un mateix tipus, amb l'ajuda de material, com ara polígons encaixables; per exemple, prismes. Els poden construir amb base triangular, quadrada i pentagonal. Se'ls demana que en comptin les cares. Abans de construir-ne un altre amb base hexagonal, se'ls pregunta si poden saber quantes cares tindrà i després comprovar-ho (si es disposa de peces hexagonals o d'algun model de prisma hexagonal amb un altre material). A continuació es fa una taula per tal que, a partir de l'observació, puguin predir la quantitat de cares de qualsevol prisma i demanar una descripció de com ho calculen i per què ho calculen així.

| Costats de la base del prisma | Cares |
|-------------------------------|-------|
| 3                             | 5     |
| 4                             | 6     |
| 5                             | 7     |
| 6                             | 8     |
| 7                             | 9     |
| ...                           | ...   |
| $n$                           | $n+2$ |

Font: CREAMAT

Després, es demana un recompte semblant amb les arestes. L'objectiu també és buscar una pauta.

| Costats de la base del prisma | Arestes |
|-------------------------------|---------|
| 3                             | 9       |
| 4                             | 12      |
| 5                             | 15      |
| 6                             | 18      |
| 7                             | 21      |
| ...                           | ...     |
| $n$                           | $3n$    |

Font: CREAMAT

Finalment, es compten els vèrtexs. Sempre és important que expliquin l'argumentació de la manera de comptar ràpidament que apliquin, tot animant-los a no comptar els vèrtexs (o les cares, o les arestes) d'un en un.

| Costats de la base del prisma | Vèrtexs |
|-------------------------------|---------|
| 3                             | 6       |
| 4                             | 8       |
| 5                             | 10      |
| 6                             | 12      |
| 7                             | 14      |
| ...                           | ...     |
| $n$                           | $2n$    |

Font: CREAMAT

A continuació, es pot fer una feina semblant amb antiprismes. S'ha de guiar l'alumnat a observar que de cada costat de cada base en surt un triangle.

| Costats de la base de l'antiprisma | Cares  | Arestes | Vèrtexs |
|------------------------------------|--------|---------|---------|
| 4                                  | 10     | 16      | 8       |
| 5                                  | 12     | 20      | 10      |
| 6                                  | 14     | 24      | 12      |
| 7                                  | 16     | 28      | 14      |
| 8                                  | 18     | 32      | 16      |
| ...                                | ...    | ...     | ...     |
| $n$                                | $2n+2$ | $4n$    | $2n$    |

Font: CREAMAT

De manera anàloga es pot treballar amb els poliedres que calgui: amb piràmides, bipiràmides, poliedres regulars, prismes amb una piràmide a sobre, etc. Només cal mirar que siguin convexos. Si es van recollint dades, es poden fer taules molt completes que recullin, ara sí, només les quantitats de cares, arestes i vèrtexs.

A partir de l'observació i la comparació es busquen regularitats. Podem fer preguntes que portin l'alumnat cap allà on volem. Per exemple: Hi ha sempre més arestes que cares? Més arestes que vèrtexs? Més vèrtexs que cares? S'observa que les arestes «sempre guanyen». Que de vegades hi ha més cares que vèrtexs (prismes), de vegades més vèrtexs que cares (antiprismes) i de vegades la mateixa quantitat (piràmides).

Però, què està passant? Tal com es proposa des del PuntMat (Cecilia Calvo i David Barba) i des d'on el CREAMAT va agafar tot aquest itinerari, si les cares i vèrtexs «fan un equip», es veu que sempre guanyen... i que sempre guanyen per la mateixa diferència: dos. I aquí haurem trobat la característica d'Euler:

$$\text{Cares} + \text{Vèrtexs} = \text{Arestes} + 2$$

A partir d'aquí es pot investigar si aquesta propietat es compleix en qualsevol classe de poliedre.

## Model matemàtic

### Sabers

- Ús de les equacions de primer grau com a models matemàtics de situacions contextualitzades. [#ALG.ID](#)
- Ús de la proporcionalitat geomètrica com a model matemàtic de situacions contextualitzades relacionades amb el teorema de Tales. [\[ESS\]](#) [#ESP.FG](#)
- Ús de les funcions com a models matemàtics. [#ALG.RF](#), [#ALG.PC](#)
- Ús de recursos digitals o interactius per buscar la funció que modelitza millor un context.
- Anàlisi de les solucions d'un problema, presa de decisions en conseqüència i formulació de prediccions, si s'escau. [\[ESS\]](#)

### Descripció i orientacions

#### Reflexions inicials

El treball del llenguatge algebraic i la introducció de les funcions a 2n d'ESO obre un ampli camp d'estudi dins d'aquest bloc de sabers. L'alumnat, per mitjà dels patrons i les funcions, pot modelitzar i analitzar fenòmens propis de les matemàtiques o del món real, adquirint experiència en la modelització de situacions i relacions lineals. A 1r d'ESO ja s'ha treballat l'ús de la proporcionalitat numèrica com a model de situacions contextualitzades; ara a 2n, l'alumnat també podrà resoldre problemes i crear models fent ús de la proporcionalitat geomètrica. Tant en el cas de les funcions com en el cas de la proporcionalitat, els programes de geometria dinàmica poden esdevenir eines molt valuoses per crear els models o validar-los. El professorat hem de procurar fer propostes per treballar la modelització que portin l'alumnat a fer servir representacions diferents, com ara taules, gràfiques o equacions, fet que ens pot permetre connectar no només les matemàtiques amb altres disciplines o el món real, sinó també idees diferents dins de les matemàtiques mateixes.

#### Comentaris sobre les connexions

La creació de models a 2n d'ESO va lligada als sabers dels diferents sentits que es treballen al llarg d'aquest curs, faciliten el procés de modelització i afavoreixen un bon escenari per treballar situacions contextualitzades. Així, dins del sentit algebraic s'estableixen connexions amb equacions (**#2.ALG.ID**) i funcions (**#2.ALG.RF**, **#2.ALG.PC**) i, amb la proporcionalitat geomètrica com a model, es connecta amb el sentit espacial (**#2.ESP.FG**).

#### Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

Com a 1r d'ESO, s'ha destacat el **saber #2.ALG.MM.E** com a essencial, ja que es considera fonamental en el procés de resolució de problemes. Quan l'alumnat fa tasques de modelització, un cop obtinguda la solució, aquesta s'ha d'interpretar i validar i, en cas que no solucioni el problema de la realitat, prendre les decisions oportunes.

També s'ha destacat com a essencial el **saber #2.ALG.MM.B**, ja que la comprensió i aplicació del teorema de Tales en diferents contextos, com per exemple l'ampliació i la reducció de figures planes, és un dels sabers essencials del sentit espacial a 2n i pot resultar un bon context en què treballar els models matemàtics en aquest curs.

#### Observacions sobre alguns sabers específics

L'alumnat té a l'abast molts recursos per treballar el **saber #2.ALG.MM.D**. El full de càlcul ens permet trobar funcions d'ajust de manera senzilla i amb els programes de geometria dinàmica també se'ns obre un món ple de possibilitats. Aquests programes ofereixen fer representacions gràfiques i càlculs complexos, però a més potencien la part creativa del procés de modelització. En aquest sentit, el [repositori de materials del programa GeoGebra](#) proporciona multitud de propostes ja preparades per fer a l'aula.

### **Recursos i activitats**

#### Recursos i activitats generals per al bloc de sabers

Tal com s'esmenta també al document de 1r d'ESO, un tipus de tasques en les quals el treball de modelització matemàtica pot encaixar òptimament són els projectes. Al CREAMAT s'hi pot trobar una campanya anomenada [Matemàtiques i projectes](#) on es poden trobar molts exemples detallats amb tots els materials necessaris per portar-los a l'aula.

#### Recursos i activitats per treballar sabers concrets

El **saber #2.ALG.MM.A** va lligat amb el **saber #2.ALG.ID.C**, resolució de problemes d'equacions de primer grau contextualitzats. Al bloc Igualtat i desigualtat s'exposa un possible camí a seguir partint de l'enunciat del problema fins a arribar a la solució, i poder-la validar d'acord amb el context del problema.

A 2n d'ESO podem trobar contextos en què les equacions són necessàries per donar resposta a reptes diversos i que ens poden permetre establir connexions de diferents tipus. Alguns exemples en són la llei

d'Ohm, que s'estudia a la matèria de tecnologia i estableix la relació que hi ha entre la resistència, la tensió i la intensitat d'un circuit; i les màquines simples amb la llei de la palanca o el treball amb densitats o forces, a física i química. En els tres exemples, les equacions de 1r grau permeten resoldre varietat de problemes i contextualitzar-ne el treball.

Per treballar el **saber #2.ALG.MM.B**, ús de la proporcionalitat geomètrica com a model matemàtic de situacions contextualitzades relacionades amb el teorema de Tales, trobem moltes situacions: calcular l'alçada d'un edifici, fer dibuixos de plànols o mapes a escala, dissenyar o construir maquetes, etc. Als materials del sentit espacial (de 2n curs) es poden trobar exemples detallats dins del bloc Formes geomètriques de dues i tres dimensions quan es fa referència al saber Comprensió i aplicació del teorema de Tales en contextos diferents. També per treballar el **saber #2.ALG.MM.B**, trobem el material elaborat pels professors Maite Gorris i Santi Vilches, [Trucs de cinema](#), en el qual l'alumnat analitza com aplicar la proporcionalitat geomètrica per fer trucs de cinema i descobreix el teorema de Tales.

Cal recordar que el **saber #2.ALG.MM.B** és essencial, però que els recursos que s'acaben de descriure són només una proposta.

Una eina imprescindible per modelitzar la realitat són les funcions. En aquest curs es proposa una primera aproximació al concepte i a les funcions més senzilles i una activitat molt interessant per treballar el **saber #2.ALG.MM.C** és [Gràfics de funcions emplenant ampolles](#), d'Anton Aubanell, que podem trobar a l'ARC. En aquesta activitat es proposa fer una petita investigació que consisteix a omplir una ampolla cilíndrica a petits intervals, amb una unitat de mesura de, per exemple, 50 cl i anar mesurant l'alçada del líquid a cada pas. Amb les dades recollides es crearà un núvol de punts i s'intentarà aproximar gràficament la funció que modelitza la situació. En aquest punt es dona peu a parlar de la corba que ajusta al màxim (aproximació enfront d'interpolació) i dels errors de mesura i, fins i tot, es pot pensar en una manera de mesurar aquests errors. Un cop s'ha treballat manipulativament amb l'ampolla proporcionada, es pot fer un treball de relacionar altres ampolles amb diferents perfils amb les gràfiques que proporcionarien. Es pot complementar l'activitat amb aquest aplicatiu molt visual, [Experiencing maths](#). Aquesta activitat està també descrita al llibre [El lenguaje de funciones y gráficas](#) (Shell Center for Mathematical Education, 1990).

En situacions com la descrita anteriorment en què els models matemàtics són funcions lineals o afins, l'ús de la geometria dinàmica pot ser de molta ajuda. Es pot treballar el **saber #2.ALG.MM.D** amb el programa [GeoGebra](#), més concretament amb l'eina recta de regressió. Seria desitjable fer prèviament una aproximació manual a la situació com la de l'activitat anterior per, posteriorment, demanar que el programa ens doni la recta que millor aproxima. Així com l'activitat d'emplenament d'ampolles es pot dur a terme sense que els estudiants coneguin què són les funcions (de fet, és una bona activitat d'introducció), aquesta proposta ha de ser necessàriament posterior, un cop els estudiants ja coneixen i s'han familiaritzat amb l'expressió algebraica de les funcions. És important també que aquesta recerca de l'expressió algebraica amb el programa tingui un objectiu, com ara el de determinar la imatge o l'antiimatge d'un valor que no ens és possible d'obtenir per mitjà de la mesura.

En qualsevol de les activitats i situacions proposades a l'alumnat serà important parar atenció al **saber #2.ALG.MM.E**, sobretot quan les activitats comportin una investigació, manipulació i descoberta. Aturar-se a comprovar si s'està anant per bon camí, valorar críticament les solucions d'un problema, veure si són coherents i adequades i prendre decisions en conseqüència és essencial en el bon fer matemàtic. Cal donar espais a l'aula perquè això passi i animar els estudiants a reflexionar contínuament sobre la feina que estan fent i sense donar veredictes, ajudant que siguin ells mateixos qui facin l'anàlisi amb l'ajuda de les nostres preguntes, que els aniran guiant, si cal. Si l'activitat és d'una durada llarga (diverses sessions), es pot fer una aturada de tota la classe en un punt intermedi per posar en comú els resultats obtinguts fins al moment i fer aportacions de millora entre tots.

Cal recordar que el **saber #2.ALG.MM.E** és essencial, però que els recursos que s'acaben de descriure són només una proposta.

## Variable

### Sabers

- A. Variables en l'expressió de relacions funcionals. **[ESS]** **#ALG.RF**
- B. Distinció entre incògnites en equacions i variables en funcions. **#ALG.ID**, **#ALG.RF**
- C. Variables en el context estadístic. **#EST.DI**, **#EST.IN**

### Descripció i orientacions

#### Reflexions inicials

A 2n cal destacar la introducció de les relacions funcionals en les seves diverses expressions (verbal, tabular, gràfica i algebraica) que representa un pas important en l'aprenentatge matemàtic i ofereix possibilitats d'aplicació a diferents àmbits molt riques. Això comporta la introducció de la idea de variable en el camp de les funcions, **saber #2.ALG.VA.A**.

A primer curs ja es va introduir el concepte de variable com a quantitat desconeguda o que pot adquirir diferents valors. Es tracta d'una definició àmplia que permet entendre la incògnita com un tipus de variable, però cal assenyalar que hi ha autors que prefereixen separar les dues idees. En la descripció i orientacions d'aquest mateix bloc corresponents a 1r, aquest aspecte es tracta amb una mica més de detall. Es consideri aquesta inclusió o no, des del punt de vista didàctic serà important distingir entre variable d'una funció i incògnita d'una equació. Per això resulta clau el **saber #2.ALG.VA.B**.

#### Comentaris sobre les connexions

Els sabers del bloc Variable tenen un caràcter molt conceptual i adquireixen tot el seu significat quan es posen en pràctica en el treball amb funcions (**#2.ALG.RF**), en les equacions (**#2.ALG.ID**) i en els estudis estadístics (**#2.EST.DI**). Aquests coneixements són especialment valuosos quan s'apliquen a situacions contextualitzades.

#### Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

La introducció de la idea de funció fa aconsellable que el **saber #2.ALG.VA.A**, variables en l'expressió de relacions funcionals, es consideri com a essencial en aquest bloc.

#### Observacions sobre alguns sabers específics

Una funció relaciona dues variables de manera que, a cada valor d'una d'elles (anomenada variable independent) que pertanyi al seu domini, li fa correspondre un únic valor de l'altra (variable dependent). Per això la comprensió d'una relació funcional ha de partir de la identificació clara de les variables que es relacionen. En el cas de funcions en context, serà important donar significat a les variables tenint clares les magnituds que es representen, les unitats que s'empren per mesurar-les i els intervals de valors que poden adquirir. Per això el **saber #2.ALG.VA.A**, variables en l'expressió de relacions funcionals, haurà de ser tractat amb una cura especial. En aquesta mateixa línia, el **saber #2.ALG.VA.B** convida a posar atenció en la diferència entre les incògnites d'equacions i les variables de funcions que ja ha estat esmentada. Entendre bé aquesta diferència permetrà distingir millor entre equacions i funcions.

El **saber #2.ALG.VA.C** fa referència a les variables estadístiques qualitatives i quantitatives discretes (les quantitatives contínues es tractaran a 3r) i l'ús en situacions contextualitzades.

## Recursos i activitats

### Recursos i activitats per treballar sabers concrets

La introducció a l'estudi de les funcions és un pas fonamental i convé assegurar una bona comprensió dels conceptes que es posen en joc en les diverses expressions de les relacions funcionals: textual, tabular, gràfica i algebraica. Representa la introducció d'un bagatge de nous conceptes que s'anirà desplegant al llarg de tota l'educació secundària i que podrà ser aplicat en contextos molt diversos. Per treballar les relacions funcionals, a tota l'ESO, pot ser molt útil el llibre [\*El lenguaje de funciones y gráficas\*](#) (Shell Centre for Mathematical Education, 1990), es tracta d'un clàssic absolutament actual ple de bones idees per a l'aula.

En qualsevol situació que pugui ser estudiada per mitjà de relacions funcionals serà important identificar clarament les variables que es relacionen (la variable independent i la variable dependent) i les unitats en què es mesuren aquestes variables. Precisament el **saber #2.ALG.VA.A** se centra en aquest aspecte que ha de ser treballat, de manera integrada, dins d'activitats del bloc Relacions i funcions **#2.ALG.RF**. Tanmateix, a continuació, se suggereixen algunes idees (amb diferents punts de partida) molt focalitzades en el concepte de variable en situacions contextualitzades que es poden modelitzar per mitjà de relacions funcionals.

#### **A partir d'una descripció textual:**

En una versió bàsica: La Isabel ha anat a fer una passejada amb bicicleta i ha mantingut una velocitat constant de 10 km/h fins que ha tornat a casa 36 minuts després de sortir. Quants quilòmetres ha fet en total? Quina distància havia recorregut al cap de 6 minuts de sortir? Al cap de 12 minuts de sortir? Al cap de 18 minuts de sortir? Al cap de 24 minuts de sortir? I al cap de 30 minuts? Podríeu fer una taula i un gràfic que reculli les respostes anteriors i descriu el recorregut que ha fet la Isabel? Quines variables s'hauran de relacionar? En quines unitats es mesuren?

En una versió una mica més avançada: La Clara és aficionada a practicar bicicleta de muntanya. Avui ha sortit a fer un trajecte. Durant els 12 primers minuts ha mantingut una velocitat de 10 km/h. Després ha vingut un bon tram de lleugera baixada en què ha mantingut una velocitat constant de 15 km/h durant 16 minuts fins a arribar a casa seva. Mentre està netejant i guardant la bicicleta, el seu germà Artur li fa diverses preguntes: Quant de temps ha durat el trajecte? Quants quilòmetres ha fet en total? Quants quilòmetres havia fet al cap de 6 minuts de trajecte? Al cap de 12 minuts? Al cap de 16 minuts? Al cap de 20 minuts? Al cap de 24 minuts? I al cap de 28 minuts? Davant d'aquesta allau de preguntes, la Clara decideix fer una taula que les respongui i fins i tot un gràfic, per tal que l'Artur ho entengui millor. Quines variables haurà de relacionar? En quines unitats les mesurarà? Podríeu ajudar-la a fer la taula i el gràfic?

#### **A partir d'una taula:**

En ascendir en globus, la distància a l'horitzó cada vegada és més gran. La taula següent relaciona l'altura de la cistella d'un globus (en metres —m—) i la seva distància a l'horitzó (en quilòmetres —km—):



| Altura (m) | Distància a l'horitzó (km) |
|------------|----------------------------|
| 10         | 11                         |
| 20         | 16                         |
| 30         | 20                         |
| 40         | 23                         |
| 100        | 36                         |
| 200        | 51                         |
| 300        | 62                         |
| 400        | 71                         |
| 1000       | 113                        |
| 2000       | 160                        |
| 3000       | 196                        |
| 4000       | 226                        |

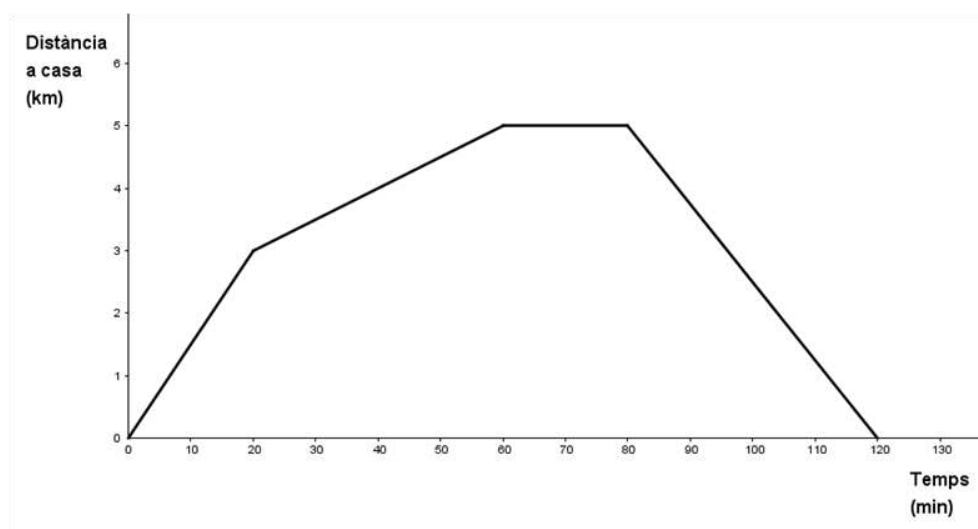
Quines variables es relacionen? Podríeu fer una representació gràfica aproximada? Quina interpretació es pot fer d'aquestes dades? Podríeu explicar-ho emprant, si cal, un dibuix?

**A partir d'una consulta de dades:**

Es vol posar de manifest el canvi en les hores de sol diàries que es produeix al llarg de l'any. Quines variables cal relacionar? Quina seria la variable independent i quina seria la variable dependent? Amb quines unitats les mesuràrieu? Podríeu cercar les dades (per exemple en mitjans de premsa, almanacs, etc.)? Podríeu elaborar una representació gràfica aproximada? Podríeu escriure'n un comentari explicatiu?

**A partir d'un gràfic:**

La Sofia ha fet una mica d'exercici físic, caminant/corrent des de casa seva, tal com es descriu en el gràfic següent:



Font: elaboració pròpia

Quines variables relaciona el gràfic? Amb quines unitats es mesuren? Quant de temps la Sofia ha estat fora de casa? Quina ha estat la distància màxima a què ha arribat de casa seva? Podríeu descriure, a grans trets, el camí?

**A partir d'una fórmula donada per una expressió algebraica:**

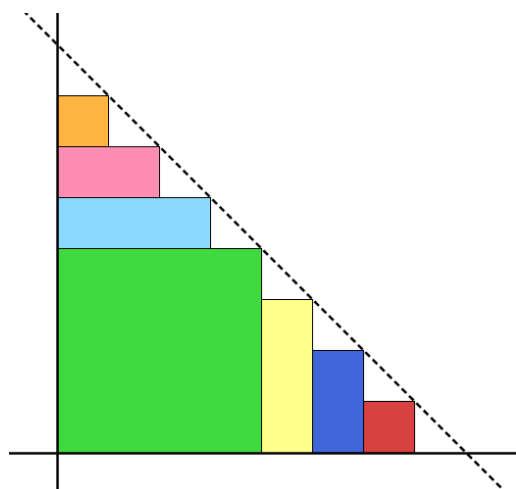
Hi ha diverses escales per mesurar la temperatura. Habitualment, a Europa s'utilitzen els graus Celsius (°C), però hi ha països, com els Estats Units, en què s'utilitzen els graus Fahrenheit (°F). Una

mateixa temperatura s'expressarà com a  $c$  graus Celsius i com a  $f$  graus Fahrenheit. La relació entre  $c$  i  $f$  es descriu per l'expressió algebraica següent:  $f = 1,8c + 32$ .

Quines variables relaciona aquesta igualtat? Mesurades en quines unitats? A quants graus Fahrenheit correspon una temperatura de 0 graus Celsius? Podríeu fer una taula que indiqués el valor en graus Fahrenheit d'algunes temperatures expressades en graus Celsius? Podríeu fer un gràfic aproximat?

#### A partir d'una experiència:

L'activitat s'inicia convidant l'alumnat que dibuixi i retalli un rectangle que tingui un perímetre de 60 cm. Un cop cada alumne/a hagi retallat el seu rectangle en cartolina (si pot ser de colors variats) demanarem que superposin tots els rectangles sobre el primer quadrant d'uns eixos cartesianes tal com indica la figura següent:



Font: elaboració pròpia

Observarem que els seus vèrtexs lliures són punts del gràfic d'una funció. Quina és la seva variable independent? I la seva variable dependent? Podríem determinar l'expressió algebraica d'aquesta funció?

Al bloc Relacions i funcions d'aquest mateix curs (**2.ALG.RF.C**) hi ha una descripció detallada d'aquesta activitat, [Rectangles d'igual perímetre i funcions afins](#), que també es troba a l'ARC.

El **saber #2.ALG.VA.B** es consolidarà aprofitant oportunitats per assenyalar les diferències quan es resolguin equacions o es treballi amb funcions. Serà important tenir cura del llenguatge perquè l'alumnat faci servir adequadament els termes «equació», «incògnita», «funció» i «variable». La taula comparativa següent pot ajudar a distingir entre aquests termes:

|           | Incògnites en equacions                                                                                                                  | Variables en funcions                                                                                    |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Definició | Valor desconegut per trobar.                                                                                                             | Valor que pot variar.                                                                                    |
| Objectiu  | Trobar, per mitjà de transformacions que assegurin l'equivalència de les expressions algebraiques, el valor de la incògnita que compleix | Explorar relacions tot analitzant el canvi en la variable dependent quan canvia la variable independent. |

|                   |                                                                 |                                                                                             |
|-------------------|-----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
|                   | l'equació.                                                      |                                                                                             |
| Exemple de format | $2x + 3 = 11$<br>Només es compleix la igualtat si la $x$ val 4. | $f(x) = 2x + 3$ $y = 2x + 3$<br>Per cada valor de $x$ obtenim un valor de $f(x)$ o de $y$ . |

El **saber #2.ALG.VA.C** es pot treballar portant a terme estudis estadístics propers als interessos de l'alumnat, duts a terme en equip i basats en observacions, enquestes, experiments o simulacions. Una de les primeres fases d'aquests estudis consisteix a determinar les variables estadístiques que s'analitzaran. És important identificar els tipus de variable presents en cada cas, ja que aquestes condicionen l'estudi estadístic i els diagrames utilitzats per presentar els resultats: qualitatives nominals (colors preferits, tipus d'avaries ateses en un garatge, etc.), qualitatives ordinals (nivells de satisfacció, qualificacions, etc.), quantitatives discretes (nombre de germans, nombre d'esports practicats, etc.) i quantitatives contínues (alçada, pes, etc.). Aquestes últimes es treballaran el pròxim curs.

## Igualtat i desigualtat

### Sabers

- Transformació d'expressions algebraiques per generar-ne d'equivalents. **#NUM.SO**
- Resolució d'equacions senzilles aplicant, amb sentit, les operacions inverses en els dos membres de la igualtat. **[ESS]#NUM.SO**
- Resolució de problemes d'equacions de primer grau contextualitzats. **[ESS]#ALG.MM**
- Expressió amb paraules de condicions de desigualtat i traducció a llenguatge matemàtic. Introducció a la idea d'inequació. **[AMP]**
- Igualtats per expressar funcions constants, lineals i afins en situacions contextualitzades. Distinció entre funcions i equacions **#ALG.MM, #ALG.VA, #ALG.RF**

### Descripció i orientacions

#### Reflexions inicials

Tal com dèiem a 1r, la potència del llenguatge simbòlic i dels mètodes algebraics en la matematització de situacions i en la resolució de problemes ens convida a tractar amb una cura especial el treball de l'àlgebra a l'educació secundària per tal d'evitar la simple reducció a procediments mecànics i posant molta atenció a les idees de fons, al sentit dels símbols, de les expressions i de les regles de transformació. No hauríem de perdre oportunitats per treballar a fons entorn de les idees i procediments algebraics, abans de mecanitzar-los. En el text «Orientacions per a la millora de la geometria» ([Quaderns d'Avaluació núm. 31, pàgina 104](#)) (7) s'indica el següent:

*L'enorme potència dels mètodes algebraics ofereix una eina valuósíssima per a la resolució de problemes, però en el camp de l'educació matemàtica cal reconèixer que sovint pot tapar aspectes significatius de la situació que es tracta i no deixar prou espai per posar en joc altres tipus de raonament matemàtic, potser menys formals però més intuïtius. És important capacitar l'alumne en el maneig simbòlic, ja que les tècniques algebraiques li ofereixen moltes possibilitats de treball matemàtic, tant a l'ESO com en els possibles estudis postobligatoris i, fins i tot, en determinades situacions quotidianes. Tanmateix, s'hauria de procurar que, en la mesura del possible, l'alumne no perdés el sentit dels símbols i de les expressions algebraiques, una idea molt suggeridora del professor Abraham Arcavi.*

En l'ensenyament de l'àlgebra cal posar molta atenció a evitar substituir el pensament matemàtic per l'aplicació simple de regles que acaben perdent el sentit i projectant la falsa idea que fer matemàtiques consisteix senzillament a aplicar unes receptes memoritzades. Aquesta percepció a vegades provoca que, en la resolució de problemes que vagin més enllà dels exercicis, alguns/es estudiants deixin d'emprar les

habilitats de pensament lògic tot cercant l'ús de procediments mecànics que o bé no existeixen o bé compliquen el procediment. Vegeu l'apartat «Learning without Thought» del capítol 2 del llibre de Jo Boaler *What's Math got to do with it?* (6).

Finalment, voldríem fer una consideració sobre aquest bloc de sabers, Igualtats i desigualtats (#ALG.ID), en el sentit que, tot i la importància de la resolució d'equacions i inequacions, aprendre-ho és més un mitjà que un fi en si mateix. En el capítol 4 «Àlgebra» del llibre *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria* de Calvo, Deulofeu, Jareño i Morera (Síntesis, 2016) es fa una justificació àmplia del que acabem d'afirmar. En la introducció al capítol podem llegir:

*Si miramos cómo se introduce el álgebra en la mayoría de libros de texto veremos que, después de hablar de monomios y binomios, se pasa rápidamente a algunos ejercicios de frases con relaciones numéricas para ser traducidos a expresiones algebraicas y, a la inversa, convertir éstas en frases. Sin prácticamente transición se pasa al valor numérico de una expresión, se exponen las primeras reglas de la manipulación algebraica y se ejercitan para llegar, lo más rápidamente que se pueda a lo que “realmente interesa”: la resolución de ecuaciones. Y así, hasta el final de sus estudios matemáticos en la educación obligatoria, se conduce a los alumnos a un mundo algebraico progresivamente complejo: paréntesis, denominadores, ecuaciones, sistemas, ecuaciones de segundo grado, manipulación de polinomios, Ruffini...*

*Siguiendo este itinerario, ya clásico en la educación, no sólo se está dando una imagen sesgada de las matemáticas y de la propia álgebra, sino que se dejan de trabajar aquellos aspectos en los que ésta proporciona un lenguaje y unas herramientas más útiles: la expresión e investigación de relaciones numéricas, de leyes de generalización. La resolución de ecuaciones debería ser un medio más que un objetivo. Y más si tenemos en cuenta que muchos de los problemas escolares que calificamos “de ecuaciones” son resolubles por otros métodos (aritméticos, geométricos, por tanteo organizado...).*

*Hay que añadir otra apreciación inicial en contra de esta orientación típica del trabajo algebraico. Uno de los objetivos principales de la educación obligatoria es la formación de ciudadanos. En esta formación hemos de tener en cuenta, entre otros, aspectos culturales, muchos de ellos relacionados con el “conocimiento”, es decir, con el saber y el saber hacer, y aspectos relacionados con el “pensamiento”. Es dudoso que sea más útil e importante para un futuro ciudadano, teniendo en cuenta estos objetivos, ser un hábil resolutor de problemas estándar mediante ecuaciones que saber observar, descubrir y describir pautas y relaciones, ponerlas en duda y justificarlas.*

#### Comentaris sobre les connexions

Com a criteri general és important aprofitar tota oportunitat per connectar sabers, ja que l'establiment de connexions internes facilita presentar les matemàtiques com un tot coherent i alhora ajuda a construir els sabers de manera que es relacionin els uns amb els altres. Per tant, benvingudes totes les connexions que cada docent pugui establir. Encara que la majoria dels sabers d'Igualtats i desigualtats admeten connexions, volem destacar específicament les del **saber #2.ALG.ID.E** amb els blocs Variable, Model matemàtic i Relacions i funcions, necessàries per entendre el paper de l'àlgebra en l'expressió de funcions i la distinció entre equacions i funcions. També són importants les connexions tant del **saber #2.ALG.ID.A** com del **saber #2.ALG.ID.B** amb el sentit numèric, i del **saber #2.ALG.ID.C** de resolució de problemes amb equacions amb el bloc Model matemàtic **#ALG.MM**

#### Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

Tot i la rellevància de tots els sabers d'aquest bloc, els seleccionats com a essencials **[ESS]** són la resolució d'equacions lineals senzilles, fent èmfasi en la relació entre operacions inverses per transformar equacions en altres d'equivalents més senzilles, i la resolució de problemes contextualitzats per mitjà d'equacions senzilles. Cal recordar que les equacions sorgeixen per resoldre problemes, tant matemàtics com de context

no matemàtic. Per tant, entenem que emprar equacions per resoldre problemes és un saber fonamental d'aquest bloc.

D'altra banda, un únic saber d'aquest bloc es considera d'ampliació. Es tracta de la introducció a la idea d'inequació [AMP]. Tot i la importància de les inequacions, treballar-les es pot reduir en conjunt si es considera necessari, i en concret, pel que fa a 2n d'ESO, deixar-ne la introducció per a cursos superiors. Tanmateix, una manera interessant d'introduir les inequacions és fer-ho a partir de sabers d'altres sentits, com la desigualtat triangular, la generalització del teorema de Pitàgores o la desigualtat que relaciona la mitjana aritmètica i la geomètrica, per citar alguns exemples dels molts possibles.

#### Observacions sobre alguns sabers específics

En relació amb els sabers concrets d'aquest bloc, cal tenir en compte que a 2n d'ESO ens centrem en la resolució d'equacions senzilles; per tant, pel que fa al **saber #2.ALG.ID.A**, cal posar l'èmfasi en l'equivalència d'expressions i la justificació d'aquesta equivalència. Tal com ja dèiem a 1r d'ESO, cal tenir molta cura en els primers passos de l'aprenentatge de l'àlgebra per evitar bloquejos i facilitar aprenentatges posteriors, com per exemple, la traducció d'enunciats de problemes que correspon al **saber #2.ALG.ID.C**.

De manera semblant, en resoldre equacions senzilles per mitjà de transformacions en altres equacions equivalents, **saber #2.ALG.ID.B**, ens fixarem en el significat de cadascun dels passos i la relació amb les operacions aritmètiques, evitant donar receptes sense sentit, la validesa de les quals és difícilment verificable. La pràctica en la resolució d'equacions a aquest nivell és necessària però enfront d'una pràctica reproductiva sense cap altre sentit que el de la mateixa pràctica. Proposem la realització d'activitats que anomenem de «pràctica productiva», en què aquesta pràctica serveix per a alguna cosa, és a dir, on l'objectiu de l'activitat va més enllà que el de trobar la solució d'una equació (veure recursos proposats). Com ja dèiem a 1r, la comprovació de la validesa de les solucions trobades a l'hora de resoldre una equació continua essent fonamental per entendre la idea d'incògnita i cal continuar fent aquesta feina sempre que es resolguin equacions sigui quina en sigui la dificultat.

El **saber #2.ALG.ID.C** pretén mostrar la potència de les equacions per resoldre problemes. En aquest sentit, si bé els primers problemes poden ser senzills per tal que siguin resolubles per altres mètodes (tempteig, assaig i error), si tal com ho proposem ja s'ha fet a 1r, ara caldrà proposar alguns problemes en què els mètodes alternatius no siguin prou útils, altrament l'alumnat no entendreà per què els fem plantejar i resoldre equacions. Per aconseguir això no cal proposar problemes molt enrevessats, sinó que sovint s'aconsegueix fent que les dades involucrades en el problema tinguin valors no enters (fraccions, decimals o situacions amb nombres molt grans/molt petits). És en aquests casos on es veu que els mètodes alternatius són insuficients i que les equacions són una eina molt potent per resoldre problemes de contextos molt diversos. Com ja dèiem a 1r d'ESO, ens permetem repetir el que es diu en el text «Orientacions per a la millora de la geometria» ([Quaderns d'Avaluació núm. 31, pàgina 104](#)) (7) on s'indica el següent:

*A vegades, davant d'un problema, es construeix molt ràpidament el model algebraic, es manipula (com qui manipula una calculadora) seguint tècniques algebraiques independents del context i, finalment, quan s'obté el resultat, s'interpreta en funció de la situació que el problema planteja. De la mateixa manera com és important que en els processos de càlcul no es perdi el sentit del que representen les expressions aritmètiques, també sembla important que en el treball sobre models algebraics no es perdi el sentit del que representen els símbols i les expressions que es manipulen. Cal anar educant algunes capacitats en aquest camp, entre les quals es poden assenyalar les següents: valoració, en cada cas, de la conveniència d'emprar models algebraics; disseny d'expressions simbòliques adequades i càlcul algebraic eficient; manteniment al llarg del procés del sentit contextual dels símbols i, fins al punt que es pugui, de les expressions algebraiques; etc. En aquest propòsit de donar tan sentit intuïtiu com sigui possible al treball algebraic ens pot ajudar molt la visualització que ofereix la geometria.*

El **saber #2.ALG.ID.D**, que, com s'ha comentat, es proposa d'ampliació, fa referència a la introducció de les desigualtats. Passar de condicions que expressen desigualtats amb paraules a llenguatge matemàtic és l'objectiu fonamental relacionat amb aquest saber, al qual cal afegir el fet que habitualment les solucions d'una inequació no corresponen a un sol nombre, com passa amb les equacions senzilles, sinó que s'expressen per mitjà d'interval·ls o també amb representacions de segments i semirectes sobre una recta. Aquesta idea clau relacionada amb el nombre de solucions és especialment rellevant, tant pel que fa al treball posterior amb equacions i inequacions, com per a la resolució de problemes.

Finalment, el **saber #2.ALG.ID.E** és una primera aproximació a l'àlgebra com a llenguatge per expressar funcions (de moment elementals, com les constants, les lineals i les afins). Ara la idea de variable se separa clarament de la d'incògnita, de manera que les igualtats expressen una relació entre dues variables. La connexió d'aquest saber amb el bloc Variable **#ALG.VA**, Relacions i funcions **#ALG.RF**, i Model matemàtic **#ALG.MM** és total. Entendre que la igualtat algebraica que expressa una funció és diferent que una equació, en el sentit que ara no es tracta de trobar cap valor desconegut, sinó d'establir una relació entre variables és un punt clau. També ho és adonar-se que no totes les funcions poden ser representades per mitjà d'igualtats algebraiques. En expressar les igualtats en situacions contextualitzades caldrà insistir en quines són les variables concretes relacionades en aquella situació i emprar lletres diferents de les habituals  $x$  i  $y$ . També en relació amb el **saber #2.ALG.ID.E**, com ja dèiem a 1r d'ESO, cal tenir en compte el tema dels contextos. Puig Adam, en el seu decàleg (1960) diu: «*No oblidar l'origen concret de les matemàtiques i els processos històrics de la seva evolució*». Uns anys abans Lobachevski (1792-1856) havia afirmat: «*No hi ha cap branca de les matemàtiques, per abstracta que sigui, que no es pugui aplicar algun dia a l'estudi dels fenòmens del món real*». Totes dues cites, des de punts de vista ben diferents, apelen a la relació entre les matemàtiques i els diferents contextos.

En l'ensenyament de les matemàtiques, les característiques de les activitats d'aprenentatge són un punt clau. Si aquestes activitats tenen com a objectiu la construcció de sabers matemàtics de naturalesa abstracta, cal partir de concrecions d'aquests sabers. D'altra banda, si el que es vol és mostrar les diferents utilitats de les matemàtiques i aplicar-les per resoldre problemes diversos, també cal concretar aquells contextos en què és possible i té sentit aplicar les matemàtiques del currículum. És precisament en l'aplicació de sabers a contextos diferents on es manifesta una part important de la competència matemàtica.

Per tant, en el procés d'aprenentatge matemàtic hi ha com a mínim dos moments en què els contextos són rellevants:

- a) En l'inici del procés, d'una banda, per interessar a l'alumnat, creant reptes que vulgui intentar resoldre i, de l'altra, per proporcionar-li un suport concret i significatiu per construir nou coneixement.
- b) En la part final del procés, per mostrar que les matemàtiques són útils per analitzar i resoldre situacions d'àmbits molt diversos i, al mateix temps, per consolidar i aplicar els aprenentatges realitzats.

Per tal d'aportar orientacions sobre quins contextos poden ser els més adequats per introduir a les classes de matemàtiques, pensem que cal anar més enllà de les classificacions generals com els anomenats contextos quotidians o contextos reals, expressions que sembla que incloguin tot allò que no és directament matemàtic, ja que, si no precisem una mica, podria semblar que tot context no matemàtic pot ser adequat. Presentem, sense ànim d'exhaustivitat una tipologia de contextos:

**Context proper a l'alumne.** Interessos, vivències i necessitats dels alumnes. Són aquelles situacions que interessen a l'alumnat perquè els afecten directament. S'inclouen aquí les situacions en les quals es reclama a l'alumne una participació directa i vivencial (teatralitzacions, jocs de rol, etc.) i també les experimentacions a partir de materials manipulatius. Aquest context se situa, majoritàriament, en la part introductòria del procés d'aprenentatge.

**Context quotidià.** Entorn social, local, laboral i cultural proper a l'alumnat. Són situacions que es poden comprendre per la proximitat i, per aquest motiu, és important analitzar-les i conèixer-les emprant les matemàtiques. Són especialment adequades aquelles que, a més de socialment rellevants, s'han produït en un moment pròxim al del treball a classe (eleccions, fenòmens apareguts en mitjans de comunicació, actes culturals, esportius, etc.).

**Context històric.** Molts dels sabers del currículum de l'ESO van ser creats fa molts segles per resoldre problemes que tenen sentit quan s'emmarquen en l'època en què es van desenvolupar. Utilitzar aquests problemes i les solucions originals pot servir per donar sentit als sabers involucrats, veure'n l'origen i també conèixer altres maneres de fer matemàtiques d'acord amb els coneixements del seu temps.

**Context lúdic.** Les recreacions matemàtiques, els reptes i els jocs són un context molt extens que es pot relacionar amb la majoria dels sabers matemàtics. Tot i que podria entrar dins del context quotidià (jugar és una activitat humana rellevant i adequada a l'adolescència), és molt ampli i permet dissenyar activitats de durada molt diversa. La idea de repte i l'interès intrínsec de moltes recreacions i jocs és un dels punts clau de la rellevància d'aquest context.

**Context científic i tecnològic.** Les relacions entre les diferents ciències experimentals, ciències de la salut i la tecnologia amb les matemàtiques són moltes i, per tant, els contextos científics poden ser apropiats tant per construir conceptes matemàtics i comparar-los amb els seus equivalents en altres ciències, com també per aplicar sabers matemàtics ja construïts. Cal tenir en compte que tant aquest context com els dos següents tenen relació amb altres matèries del currículum, motiu pel qual, és adequat introduir-los d'acord amb el treball realitzat en les matèries relacionades.

**Context social.** Moltes problemàtiques de les ciències socials (geografia, història, economia, etc.) i del món d'avui dia (desigualtats, guerres, pandèmies, canvi climàtic, etc.) necessiten les matemàtiques per ser analitzades i, al mateix temps, ajuden a donar sentit a molts sabers, especialment el sentit estocàstic.

**Context humanístic.** L'art, la fotografia, la música, la literatura i la resta de disciplines dites humanístiques comparteixen totes elles relacions amb les matemàtiques, en els dos sentits esmentats: ajudar a construir conceptes matemàtics a través de plasmacions artístiques i proporcionar activitats d'aplicació de les matemàtiques en l'anàlisi de problemàtiques d'aquestes disciplines.

**Context matemàtic.** Fer matemàtiques és, moltes vegades, treballar en el context pròpiament matemàtic i en les connexions internes que hi ha entre els diferents sabers; mantenir la idea de repte, que porta a voler fer allò que es proposa, i basar-se en aquells sabers que ja poden considerar-se concrecions, per tal de construir-ne d'altres.

Entenem que una tipologia de contextos com aquesta pot ajudar a trobar exemples de situacions per ser treballades a l'aula, procurar que els contextos abastin l'ampli ventall proporcionat i també ser compartides amb el treball en altres matèries, sempre tenint en compte les característiques i els interessos de l'alumnat.

## **Recursos i activitats**

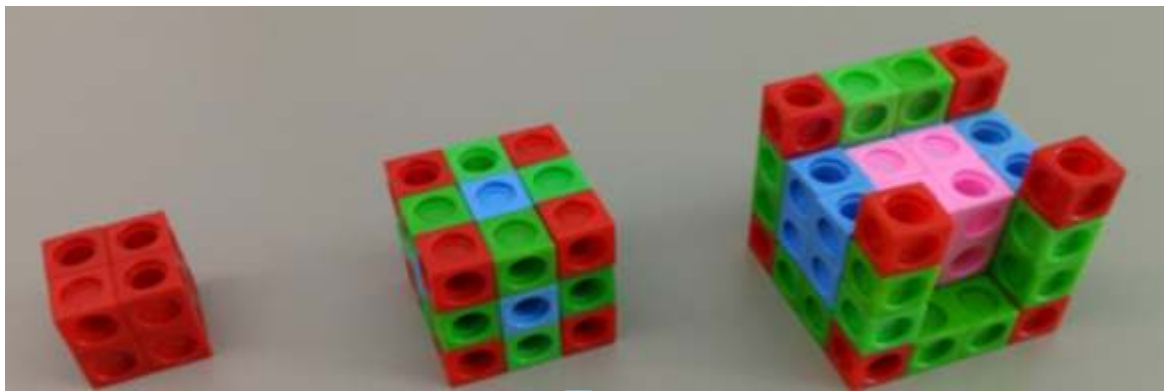
### Recursos i activitats generals per al bloc de sabers

La següent activitat, «Pintant cubs», és l'activitat 5.29 del capítol 5: «Funciones», del llibre *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria obligatoria*. Està directament relacionada amb el saber **#2. ALG.ID.E**, però ens sembla una bona activitat de síntesi del bloc, ja que inclou qüestions relacionades amb la majoria dels sabers del bloc i també d'altres blocs del sentit algebraic.

«Pintant cubs». Disposem d'una col·lecció de cubs petits tots iguals d'1 cm d'aresta i amb ells construïm cubs més grans (d'aresta 2 cm, 3 cm, 4 cm i, en general, d'aresta  $n$  cm). Quan hem format aquests cubs

grans, en pintem la superfície exterior. Si ara desfem cada cub gran, veurem que alguns cubs petits tenen 3 cares pintades, d'altres 2, d'altres 1 i d'altres cap.

- Si tens un cub d'aresta 3 cm, quants cubs petits necessitaràs?, quants tindran 3 cares pintades?, quants en tindran 2?, quants en tindran 1?, i quants no en tindran cap?
- Què passa en un cub de 2 cm d'aresta? I en un de 4 cm?
- Si fas un cub gran de 10 cm d'aresta, com calcularies el nombre de cubs petits de cada tipus?
- Sabries trobar expressions algebraïques que representin el nombre de cubs petits de cada tipus per un cub gran d'aresta  $n$  cm?



Font: *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria* (Calvo et al., 2016)

El treball al voltant d'aquesta activitat, que pot ser molt ampli, ja que permet introduir moltes altres qüestions, ens podria portar a construir una taula com la següent:

|                             | Aresta<br>2 cm | Aresta<br>3 cm | Aresta<br>4 cm | Aresta<br>10 cm | Aresta<br>$n$ cm |     |
|-----------------------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|------------------|-----|
| <b>3 cares<br/>pintades</b> | 8              | 8              | 8              | 8               | 8                | (1) |
| <b>2 cares<br/>pintades</b> | 0              | 12             | 24             | $12(10 - 2)$    | $12(n - 2)$      | (2) |
| <b>1 cara<br/>pintada</b>   | 0              | 6              | 24             | $6(10 - 2)^2$   | $6(n - 2)^2$     | (3) |
| <b>0 cares<br/>pintades</b> | 0              | 1              | 8              | $(10 - 2)^3$    | $(n - 2)^3$      | (4) |
| <b>Total</b>                | 8              | 27             | 64             | $10^3$          | $n^3$            | (5) |

Un cop construïda la taula, una manera de validar-la és verificar que la suma de les quatre expressions algebraïques de la penúltima columna (nombre de cubets amb cap, una, dues o tres cares pintades) és igual a la cinquena (nombre total de cubets).

A banda de tractar-se d'una activitat que relaciona sabers diferents i, per tant, permet establir nombroses connexions internes, és un exemple en el qual apareixen diferents funcions polinòmiques: constant, afí, quadràtica i cúbica connectades pel significat geomètric.

[Recursos i activitats per treballar sabers concrets](#)

En relació amb el **saber #2.ALG.ID.A**, transformació d'expressions algebraiques, el professor Sergi del Moral, després d'un primer contacte amb l'ús de símbols per representar quantitats i de traduir expressions literals a llenguatge simbòlic i viceversa, proposa l'activitat «Omplim la taula»:

Veieu aquesta taula?

|                          |          |           |           |           |           |           |           |          |           |
|--------------------------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|-----------|
| <b>n</b>                 | <b>3</b> | <b>20</b> |           | <b>12</b> |           |           |           |          |           |
| <b>n<sup>2</sup> - 1</b> |          |           |           |           | <b>48</b> | <b>24</b> | <b>63</b> |          |           |
| <b>(n+1)(n-1)</b>        |          |           |           |           |           |           |           |          | <b>99</b> |
| <b>2n - 1</b>            |          |           | <b>17</b> |           |           |           |           |          |           |
| <b>n + 1</b>             |          |           |           |           |           |           |           | <b>4</b> |           |

Podeu fer dues coses, (1) sortir i col·locar un número nou o (2) si creieu que hi ha algun que estigui malament, sortir i corregir-lo. Us asseguro que els que hi són tots correctes.

Hi ha una regla d'or: silenci sepulcral. Fins i tot quan detecteu un error, l'única manera de corregir-lo és demanar torn i sortir a la pissarra.

Qui sàpiga col·locar un número que aixequi el braç. Algú vol començar?

Font: *Descobrir l'àlgebra* (Sergi del Moral, 2015)

Trobareu més informació sobre l'activitat a:

<https://www.sergidelmoral.net/2015/02/05/act-descobrir-el-llenguatge-algebraic-24/>

Resolució d'equacions senzilles (**#2.ALG.ID.B**)

Si a 1r d'ESO no s'ha fet res d'equacions senzilles, es pot començar resolent algun problema d'interès històric com el següent amb una certa anàlisi del procediment que empraven: «Una quantitat més la seva setena part sumen 19. Quina és aquesta quantitat?» (Antic Egipte, papir de Rhind, 1650 aC). Els antics egipcis no utilitzaven les tècniques generals de resolució d'equacions i, per això, recorrien a tècniques concretes vàlides només per a determinades equacions. Un exemple és la resolució proposada per l'escriba

Ahmes, autor del papir de Rhind, de l'equació que nosaltres escriuríem com  $x + \frac{x}{7} = 19$ . És l'anomenat mètode de la falsa posició (*regula falsi*). Suposem que la solució és  $x = 7$  ( $7 + 1 = 8$ , i no 19). Llavors n'hi ha prou amb pensar per quin nombre cal multiplicar 8 per obtenir 19 ( $19/8$ , aquest raonament aparentment

senzill no ho és gens) i multiplicar la falsa solució (7) per aquest nombre  $7 \cdot \frac{19}{8} = \frac{133}{8} = 16 + \frac{5}{8} = 16,625$ . En realitat, els egipcis no feien així aquestes operacions, ja que ells treballaven amb fraccions unitàries (de

numerador 1, actualment dites egípcies) i, per tant, arribaven a la solució:  $16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ . Analitzada aquesta antiga i curiosa manera de resoldre equacions (cal que es faci notar que el mètode només serveix per a determinades equacions), podem passar a la resolució estàndard, i trobar-hi l'equació equivalent

$7x + x = 19 \cdot 7$ , d'aquí a l'equació  $8x = 19 \cdot 7$  i, per tant, la que ens porta a la solució  $x = \frac{19 \cdot 7}{8}$ , tot observant la relació amb el mètode de la *regula falsi*.

Una altra possibilitat per introduir equacions elementals i, en particular, la importància de les operacions

inverses és treballar endevinalles i petits problemes del tipus «pensa't un número...». Per exemple:

- Pensa un nombre d'una xifra ( $> 0$ ). Multiplica'l per 5 i afegeix un 0 (per la dreta). Resta deu vegades el nombre pensat inicialment i després resta tres vegades el mateix nombre inicial. Finalment, multiplica el resultat per 3. Si em dius el nombre obtingut, et diré, fàcilment, el nombre que havies pensat. Per què s'obté això? Passa sempre?
- Podries canviar totes les operacions (excepte l'última) per una sola multiplicació, per obtenir el mateix resultat?
- Construeix una endevinalla com l'anterior, de manera que, partint d'un nombre d'una xifra i realitzant diverses operacions, s'obtingui un nombre format per la xifra pensada inicialment repetida sis vegades.

Al capítol 4 «Álgebra» del llibre *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria* citat anteriorment, hi ha una activitat similar per iniciar-se en la resolució d'equacions. En concret és l'activitat 4.46, l'enunciat de la qual és el següent:

*Analitza algebraicament aquesta endevinalla i explica què cal fer per descobrir el nombre pensat:*

- *Pensa un nombre*
- *Multiplica'l per 2*
- *Suma 3 al resultat*
- *Torna a multiplicar per 2*
- *Resta 3 al resultat*
- *Digues-me el nombre que tens ara i t'endevinaré el nombre pensat a l'inici.*

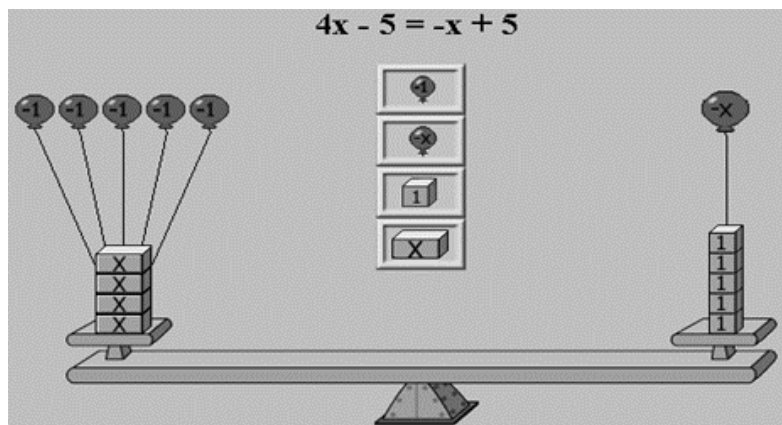
L'exemple plantejat és prou senzill per ser resolt invertint una a una totes les operacions:

Resultat, sumem 3, dividim per 2, restem 3 i dividim per dos i obtenim el nombre pensat.

D'altra banda, un dels models que serveix per iniciar el desenvolupament de la resolució d'equacions i, concretament, per trobar equacions equivalents, punt clau en tot el treball amb equacions, és l'anomenat «model de la balança». Inicialment, serveix només per valors positius, però també és possible ampliar-lo als negatius. La relació entre l'equació i la balança s'estableix d'acord amb les dues condicions següents:

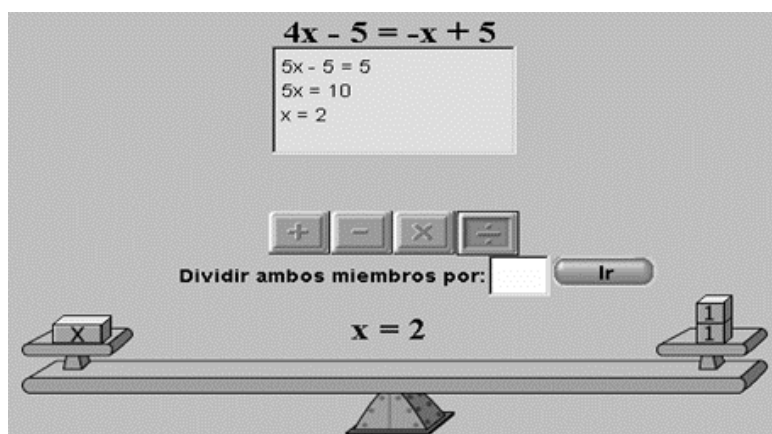
- Una equació equival a una balança de dos plats en equilibri on cada costat de la igualtat representa un dels dos plats de la balança
- La manipulació que es faci en un dels plats s'ha de fer de manera idèntica en l'altre plat per mantenir l'equilibri, és a dir, la igualtat, i obtenir una equació equivalent.

Es poden trobar miniaplicacions que permeten fer servir aquest model per equacions de la forma  $ax + b = cx + d$ , com la biblioteca de manipuladors virtual de la Universitat de Utah, que inclou l'ús de negatius. Aquí teniu un exemple tal com apareix al capítol 4 del llibre *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria obligatoria* (pàg. 143):



Font: *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria* (Calvo et al., 2016)

Després de fer els passos necessaris a cada costat de l'equació (sumar x, sumar 5 i dividir per 5) n'obtenim el resultat:

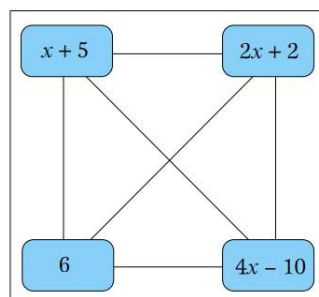


Font: *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria* (Calvo et al., 2016)

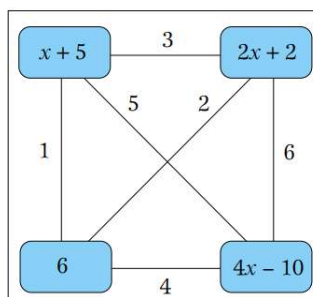
Una vegada utilitzats els models, cal passar a la pràctica per poder-los interioritzar i finalment automatitzar. Pel que fa a les equacions, ens permetem repetir allò que hem dit anteriorment: resoldre equacions, a aquest nivell, és totalment necessari, però, enfront d'una pràctica reproductiva que només té sentit per ella mateixa, proposem fer activitats anomenades «de pràctica productiva» en què l'objectiu va més de trobar la solució d'una equació, tot i que aquesta és imprescindible.

Els recursos sobre pràctica productiva d'equacions (i d'àlgebra en general) són nombrosos. Aquí destaquem el que podeu trobar a PuntMat sobre equacions de primer grau i que reproduïx el següent article: [Expression Polygons](#) (Foster, Colin, 2015).

Un dels exemples desenvolupats en l'article parteix de les imatges següents:



**Fig. 1** Four expressions can be used to create six equations.



**Fig. 2** The completed expression polygon shows solutions to the six equations.

Font: Expression Polygons (Foster, Colin, 2015)

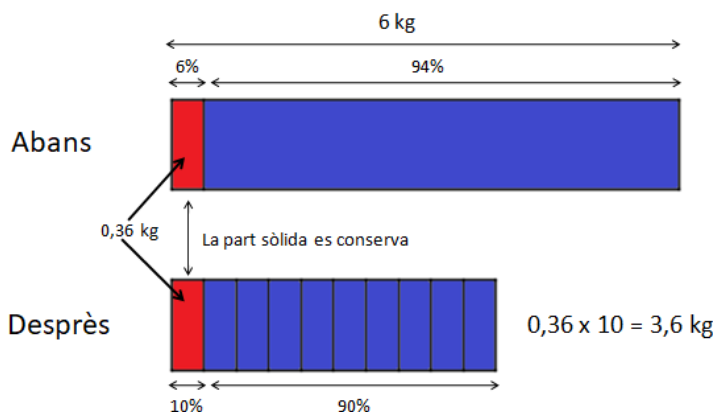
A partir de quatre expressions, podem construir sis equacions igualant les possibles parelles d'expressions, com es veu a la figura 1. Es tracta de resoldre aquestes equacions i observar quina relació hi ha entre les diferents solucions obtingudes. Partint d'aquesta idea, l'activitat es pot diversificar en diverses direccions, de manera que s'assoleix la pràctica resolent equacions senzilles, al mateix temps que es descobreixen relacions entre expressions algebraiques tot raonant els resultats obtinguts i demanant a l'alumnat que en creï de nous. Això ens permet relacionar pràctica i creativitat, dues idees aparentment allunyades que s'haurien d'alimentar mútuament.

Cal recordar que el **saber #2.ALG.ID.B** és essencial, però que els recursos que s'acaben de descriure són només una proposta.

Pel que fa al **saber #2.ALG.ID.C**, resolució de problemes d'equacions de primer grau contextualitzats, entenem que un possible camí a seguir a partir de l'enunciat del problema és el següent: decidir que plantejar una equació pot ser un bon model per resoldre el problema, traduir l'enunciat al llenguatge matemàtic (en aquest cas una equació), resoldre l'equació, comprovar la correcció de les solucions i, finalment, validar/argumentar la plausibilitat de les solucions d'acord amb el context del problema.

Un recurs relacionat amb aquest saber és el model de barres per resoldre problemes d'equacions lineals del mètode Singapur. Un exemple d'ús del mètode el teniu a continuació a propòsit d'un bonic problema de percentatges, el «Problema de la síndria», d'una certa complexitat. Convidem el lector a resoldre el problema abans d'analitzar la proposta de resolució.

Una síndria pesa 6 kg i un 94% és aigua. La posem al sol i se n'evapora una certa quantitat d'aigua, de manera que l'aigua passa a ser el 90% de la síndria. Quin és el pes de la síndria?



Font: elaboració pròpia

Si s'aborda el problema de manera directa (algebraica) és molt freqüent cometre un error pel fet de no tenir en compte que el 94% inicial i el 90% final no són comparables perquè es refereixen a percentatges sobre quantitats diferents. El que és rellevant és adonar-se de què és el que es manté abans i després.

Entenem que una bona manera d'iniciar el **saber #2.ALG.ID.D**, introducció a les desigualtats i que, com s'ha comentat, es proposa d'ampliació, és tenir en compte alguna desigualtat que hagi aparegut en algun altre sentit.

Per exemple, considerem el problema de «Les distàncies a l'escola» (que pertany a un dels problemes alliberats de PISA):

«Les distàncies a l'escola». La Maria viu a 500 metres de l'escola i en Joan a 300 metres de la mateixa escola. Què podem dir de la distància entre les cases d'en Joan i de la Maria?

Certament, el treball al voltant d'aquest problema és molt ampli i va molt més enllà de la descoberta d'una desigualtat. Podem dir que es tracta d'una activitat excel·lent per portar a l'aula i aprofundir en les competències sobre resolució de problemes. Comença amb la discussió sobre les solucions del problema, que condueix a fixar les dues extremes (màxima i mínima) i a partir d'aquí establir l'interval de solucions. Aviat apareixen idees geomètriques (com la definició de circumferència) i l'anàlisi de les solucions ens porta a la desigualtat triangular que es pot expressar de dues maneres: la suma dels dos costats més petits d'un triangle és major que el tercer costat, o bé, la diferència dels dos costats més grans és menor que el tercer costat.

Finalment, en relació amb el **saber #2.ALG.ID.E**, igualtats per expressar funcions constants, lineals i afins en situacions contextualitzades i distinció entre funcions i equacions, cal tenir en compte que no es pot tractar aïllat d'altres blocs de sabers, com són: **#2.ALG.VA**, **#2.ALG.RF**, **#2.ALG.MM**, **#2.ESP.FG**.

Un recurs per aquest saber és l'activitat que hem posat a l'inici, «Pintant cubs», dins del bloc d'activitats generals vàlides per a tots els sabers.

## Relacions i funcions

### Sabers

- Identificació d'una funció com a relació entre dues variables i estudi de la relació de dependència entre elles. **#ALG.VA**
- Relació entre les diferents maneres de representar una funció (verbal, taula, gràfic i expressió algebraica). **#ESP.LS**

- C. Estudi i aplicació en contextos de les funcions constant, lineal o de proporcionalitat directa i afí. Representació i estudi de les seves característiques: pendent i ordenada a l'origen. [ESS] #NUM.RP, #ESP.FG, #ESP.VM, #ALG.MM
- D. Ús de recursos digitals i interactius per a la representació de taules i gràfics.
- E. Extracció d'informació d'una funció donada gràficament, mitjançant una taula, una expressió algebraica i verbalment. [ESS] #ALG.ID

## Descripció i orientacions

### Reflexions inicials

Un dels conceptes matemàtics fonamentals que s'estudien al llarg de l'etapa de secundària és el de funció. Les funcions ens permeten estudiar fenòmens de canvi i relacions entre variables, per la qual cosa són una part fonamental en la modelització de situacions contextualitzades (#2.ALG.MM) i permeten establir connexions amb altres camps de les ciències o les ciències socials.

Aquest fet ens proporciona una bona oportunitat per fer una introducció a les funcions a partir de situacions properes a l'alumnat que els puguin resultar significatives. Hem de pensar que el concepte de funció requereix una capacitat d'abstracció que l'alumnat tot just està començant a entrenar, ja que és a 2n d'ESO quan adquireix una rellevància especial amb la introducció de l'àlgebra. Al llibre *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria obligatoria* (Calvo et al., 2016, p. 157), els autors diuen, parlant del concepte de funció:

*Podemos considerar este último concepto, junto con el de lenguaje algebraico, ambos ausentes en la enseñanza de las matemáticas en los primeros niveles, como el que mejor caracteriza las diferencias, a nivel de contenidos, entre la enseñanza de las matemáticas en primaria y en secundaria.*

Per això cal un treball molt fi per fer aquest pas a l'abstracció d'una manera amable, però sòlida per a l'alumnat, facilitant tota mena de connexions que els permetin donar sentit a un llenguatge i unes eines que són noves per a elles i ells.

Per tot el que s'ha exposat anteriorment, es proposa començar a treballar les funcions a 2n d'ESO i després d'haver introduït el llenguatge algebraic.

Serà important, al llarg de tot aquest bloc de Relacions i funcions, tenir en compte el bloc Variable, #2.ALG.VA, que caldrà anar treballant conjuntament, ja que tenen una relació estreta.

### Comentaris sobre les connexions

Previ o simultani a la presentació de les funcions, caldrà treballar els sistemes de representació mitjançant coordenades descrits en el bloc #2.ESP.LS. El model cartesià ens permet relacionar els llenguatges gràfic i algebraic.

Durant tot el treball dels sabers d'aquest bloc, caldrà parar esment al concepte de variable (**saber** #2.ALG.VA.A) i anar treballant conjuntament els dos blocs, que van totalment lligats. Paral·lelament, serà important fer palesa en tot moment la diferència entre les incògnites de les equacions i les variables funcionals (**saber** #2.ALG.VA.B). Cal fer-los veure que en aquest context no té sentit trobar un valor concret, sinó que parlem de parelles de valors relacionats entre ells.

Com s'ha comentat a l'apartat de Reflexions generals, és important partir de situacions properes a l'alumnat per tal de donar sentit al nou concepte de funció. Això inclou tant contextos externs (aquí parlem de modelització matemàtica, tractada en els blocs #2.ALG.MM i #2.ESP.VM), siguin quotidians o bé d'altres àmbits de coneixement, com connexions internes dins de les matemàtiques. En aquest sentit, el treball de

situacions i problemes que requereixen sabers aritmètics, geomètrics o de mesura que l'alumnat ja coneix, ajudarà a donar sentit a l'ús de les funcions alhora que permetrà consolidar sabers ja treballats. Per exemple, quan parlem de tipus concrets de funcions senzilles com les funcions lineals, establim connexions amb la proporcionalitat directa que s'ha treballat anteriorment al bloc **#2.NUM.RP** i també a l'àmbit geomètric a **#2.ESP.FG**.

#### Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

Tot i que el **saber #2.ALG.RF.E** es continuarà tractant als següents cursos d'educació secundària, treballar-lo des del primer moment es considera essencial per establir unes bones bases que permetin un estudi posterior més profund.

També es considera essencial assolir un bon coneixement de les funcions constant, lineal i afí (**#2.ALG.RF.C**), que tenen aplicacions pràctiques en altres camps del coneixement com ara la física o la tecnologia. En cursos posteriors s'estudiaran altres tipus de funcions més complexes, com ara la quadràtica, la de proporcionalitat inversa o l'exponencial.

#### Observacions sobre alguns sabers específics

El concepte de funció (**#2.ALG.RF.A**) és complex i és difícil d'assolir a partir d'una definició i exemples dels diferents tipus que hi ha. Tal com expliquen els autors al llibre *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria obligatoria* (Calvo et al., 2016, p. 162), allò que permetrà a l'alumnat anar construint el concepte és iniciar el treball a partir de situacions i problemes que requereixin l'ús de diverses representacions, principalment les taules i les gràfiques, així com el pas d'una a l'altra. A més, el treball a partir de gràfiques permet conèixer diferents tipus de funcions, ja que no cal limitar-se a funcions que tinguin una expressió algebraica senzilla.

A l'hora d'identificar la funció com a relació entre dues variables és important parar atenció a la diferència entre variable i incògnita. Vegeu l'apartat de connexions d'aquest mateix bloc i el bloc **#2.ALG.VA**.

Pel que fa a les diferents representacions d'una funció (**#2.ALG.RF.B**) és desitjable utilitzar-les totes equilibradament i no donar més pes a una o altra. A l'hora d'introduir l'expressió algebraica és important parar atenció a la notació. Parlem de variable independent ( $x$ ) i variable dependent ( $y$  o  $f(x)$ ), i per tant l'expressió algebraica de la funció contindrà aquests dos termes, per exemple  $f(x) = 4x^2$ . A l'hora de treballar amb la notació de la variable dependent, cal ser conscient de la complexitat que significa per a l'alumnat l'ús de diferents notacions en un moment en què tot just s'està construint el concepte.

A l'hora d'estudiar un determinat tipus de funcions (**#2.ALG.RF.C**), les primeres a treballar són les més senzilles i alhora les que connecten millor amb els coneixements previs de l'alumnat. Per exemple, la funció lineal es pot introduir a partir de situacions de proporcionalitat directa, que ja s'han treballat prèviament. Un cop s'ha entès el concepte i s'han vist diferents situacions que tenen el mateix model matemàtic passarem a estudiar-ne les característiques. Els conceptes de pendent i ordenada a l'origen seran clau en aprenentatges posteriors (trigonometria o taxes de variació mitjana, per exemple) i caldrà tant identificar-les clarament a partir del gràfic com poder-les trobar numèricament.

Un cop l'alumnat ha construït el concepte de funció, les eines digitals i interactives són un recurs molt útil que permet representar i manipular funcions de manera àgil, la qual cosa permet fer investigacions per trobar propietats de funcions conegudes o, a la inversa, trobar la funció que modelitza una situació contextualitzada a partir d'un conjunt de punts obtinguts numèricament o bé de manera experimental.

Per acabar, pretenem que l'alumnat sigui capaç d'extreure informació d'una funció (**#2.ALG.RF.E**), donada per mitjà de qualsevol de les possibles representacions. A l'hora de fer-ho a partir de gràfics és interessant treballar també amb situacions no quantificades per centrar el focus en els diferents tipus de variació d'una funció, i no només en els valors concrets que pren.

## Recursos i activitats

### Recursos i activitats generals per al bloc de sabers

A l'ARC podem trobar l'itinerari [Relacions i canvi](#) del professor Miquel Ferrer Puigdemívol que consta de deu recursos que permeten fer un recorregut pels diferents sabers d'aquest bloc.

Un llibre de referència en l'estudi de funcions és [El lenguaje de funciones y gráficas](#) (Shell Centre for Mathematical Education, 1990). En aquest llibre per al professorat es parla de la representació i interpretació de gràfics presentats tant textualment com a partir de dibuixos, sense que sigui necessari un coneixement algebraic. Un segon bloc afronta el treball d'identificació de relacions funcionals i la seva expressió en les diferents representacions possibles. Al llarg de tot el llibre es proporcionen exemples concrets d'activitats, totes molt interessants.

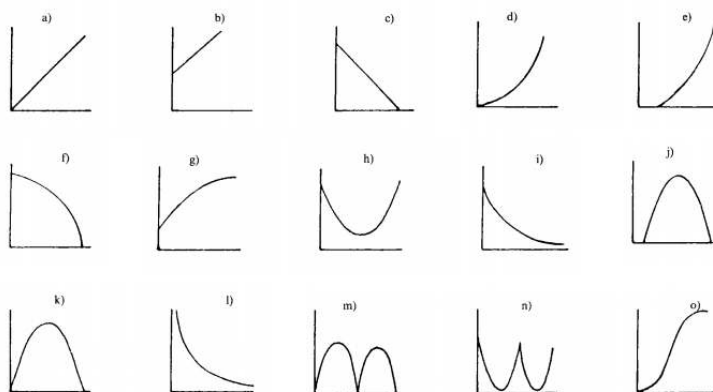
### Recursos i activitats per treballar sabers concrets

#### **Saber #2.ALG.RF.A**

Una activitat que pot servir per introduir el concepte de funció és demanar als alumnes que escriguin tres frases en què aparegui la paraula «funció» i que aquesta tingui un significat diferent a cada una. Al cap d'un parell de minuts com a màxim, abans que hagin acabat, se'ls pot demanar que comparteixin les frases que han obtingut. Probablement, la primera frase que diran serà una en la qual la paraula funció es pugui substituir per «objectiu» o «utilitat». Un exemple podria ser: «la funció del porter és evitar que la pilota entri a la porteria» o «la funció del tap és que l'aigua no vessi». Quan ja hagin sortit un parell de frases, es prohibeix aquest significat de la paraula funció. A la següent frase proposada pels alumnes, la paraula funció serà sinònim d'espectacle: «Que comenci la funció!». Es prohibeix aquest segon significat de la paraula funció i se'ls demana que continuïn rumiant una frase en què la paraula funció no tingui cap d'aquests dos significats. Quan hi ha sort, a la tercera, troben una frase en la qual la paraula funció expressa una situació de dependència. Si no hi ha sort, se'ls pot ajudar dient que busquin una frase amb la locució «en funció de». A partir d'aquí tots començaran a trobar frases en què la paraula funció relaciona dues variables i una depèn de l'altra. Aprofitar les frases dels alumnes pot ser un bon punt de partida per començar a treballar funcions des del concepte i amb un context no matemàtic.

#### **Saber #2.ALG.RF.A**

Una activitat que permet treballar la relació entre dues variables, el **saber #2.ALG.RF.A**, i que es pot connectar amb la competència lingüística és la creació de [microrelats funcionals](#). És una proposta dels professors Sergi del Moral i Andrea Richter en la qual l'alumnat ha de crear un relat a partir de la representació gràfica d'una funció. Com que no s'indiquen ni les magnituds ni les unitats de mesura, es dona via lliure a la creativitat, i es fomenta així la recerca de contextos que siguin modelitzables per aquella situació.



Font: [El lenguaje de funciones y gráficas, Shell Centre](#)

L'activitat de creació és interessant en si mateixa, però es pot estendre demanant a l'alumnat que llegeixi el seu relat en veu alta i, a la resta de companys que identifiquin o dibuixin la funció a què fa referència.

### Saber #2.ALG.RF.B

A l'apartat #2.ALG.VA.A podem trobar exemples sobre el treball de les variables a partir de les diferents representacions funcionals (textual, tabular, gràfica, expressió algebraica).

### Saber #2.ALG.RF.B

Una pràctica habitual per treballar les diferents maneres de representar una funció és partir d'un text i demanar a l'alumnat que l'expressi de maneres diferents. Per exemple:

*Pel seu aniversari, els amics d'en Carles li volen fer una festa i li han comprat un regal que els ha costat 90 €. Han decidit que el pagaran entre tots a parts iguals. Quant ha de pagar cada un dels amics? Com varia la quantitat segons el nombre d'amics?*

Volem fer notar que s'ha omès expressament el nombre d'amics que participen en el regal. D'aquesta manera forcem la necessitat de valorar les diferents possibilitats, que es reforça en la segona pregunta. Observem que apareix una funció de proporcionalitat inversa amb la qual, tot i que no és objecte d'estudi en aquest curs, l'alumnat pot treballar perfectament, justament per afavorir una idea més global de funció que no es restringeixi a les lineals, afins o constants.

Per altra banda, no és necessari (i de fet, és desitjable no fer-ho) partir sempre del text. Es pot plantejar la funció inicial a partir d'una taula com a l'activitat següent, que és una simplificació de la proposada a *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria obligatoria* (Calvo et al., 2016), en què l'alumnat podrà triar quina és la forma de representació que li resulta més útil per respondre la pregunta, prou oberta per admetre nombroses aproximacions:

Fixeu-vos en aquestes dues taules:

|   |   |    |    |    |    |    |
|---|---|----|----|----|----|----|
| x | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
| y | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 |

|   |   |   |   |    |    |    |
|---|---|---|---|----|----|----|
| x | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  |
| y | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 |

Quines semblances i diferències trobeu entre els creixements i decreixements de la variable dependent? Quina creix més ràpidament i quina, menys?

Les maneres d'abordar l'activitat poden passar per un enfocament numèric (per exemple, veure les diferències entre dos termes consecutius i comprovar que a la primera es mantenen constants, mentre que a la segona, no), passar a la representació gràfica de la funció per veure les diferents variacions, buscar la generalització, i per tant l'expressió algebraica, per poder-les comparar, etc. El més interessant serà la posada en comú a l'aula de les diferents aproximacions, que permetrà establir moltes connexions.

### Saber #2.ALG.RF.B

Una bona manera de començar una sessió a l'aula són les activitats anomenades «[Dues veritats i una mentida](#)» de Mashup Math, ja que són curtes i tenen un format més lúdic acostuma a motivar i activar mentalment l'alumnat. Les podem trobar classificades per nivells educatius i relacionades amb diferents sentits: numèric, espacial, algebraic...

**TWO TRUTHS, ONE LIE**

Which of the three statements below is a lie?  
Explain how you made your choice.

| Number of days<br>(x)        | 1 | 3  | 11 | 20  |
|------------------------------|---|----|----|-----|
| Number of miles hiked<br>(y) | 7 | 21 | 77 | 140 |

(1) The total number of miles hiked is a function of the number of days that pass.

(2) The following linear equation describes the total number of days passed, y, in terms of days, x, that have passed:

$$y = 7x$$

(3) Based on the table, it will take the hiker approximately 36 days to reach 200 miles.

Font: [Mashup Math](#)

Es tracta, com el nom indica, d'identificar quina de les tres afirmacions és incorrecta. En aquest cas, aquesta activitat relaciona tres tipus de representacions funcionals d'una mateixa situació: a partir d'una taula de valors, d'un text i de l'expressió algebraica. A més, ja que en llegir les dues primeres no s'ha detectat la mentida, cal aplicar la funció a un nou valor per comprovar si la tercera afirmació és certa. Es pot aprofitar per reflexionar amb l'alumnat quina de les maneres els ha estat més còmoda per fer aquesta comprovació i fer-los veure que, en cada situació, una de les diferents representacions resultarà més útil que les altres.

#### Saber #2.ALG.RF.C

Per treballar el **saber #2.ALG.RF.C** i veure l'aplicació de les funcions en diferents contextos pot ser útil treballar amb etiquetes de productes que, en realitat, són taules de valors de la funció de proporcionalitat directa. Tot seguit se'n mostra un exemple:



Font: elaboració pròpia

#### Saber #2.ALG.RF.C

També per treballar el **saber #2.ALG.RF.C** però posant el focus en l'estudi de les característiques de la funció afí i lineal, podem trobar les activitats «Què tenen d'igual i què tenen de diferent?». Es tracta de mostrar dues imatges que s'hauran de comparar. L'alumnat haurà de verbalitzar què hi ha en comú a les dues imatges i quines diferències hi troben. La comparació els ajuda a organitzar i estructurar els coneixements. Amb aquest tipus d'activitats es treballa el raonament així com la comunicació i l'argumentació. Veiem

l'exemple següent:



Font: elaboració pròpia

Com a diferències l'alumnat acostuma a trobar que la funció de color blau decreix i la verda creix. També ho expressen dient que una té pendent negatiu i l'altra, positiu. També poden veure que tenen ordenades a l'origen diferents, i en el cas de la blava és positiva i en el cas de la verda negativa. Com a característiques iguals verbalitzen que totes dues són rectes i que totes dues són afins o no passen pel (0,0). El professorat pot anar més enllà i fer notar que tenen el mateix pendent, en valor absolut.

Al [CREAMAT](#) trobem una entrada on es parla d'aquest tipus d'activitats i se'ns proporciona exemples per a tots els nivells. Un altre lloc on trobar molts exemples i de gairebé tots els sentits del currículum n'és el bloc [Same or different](#).

### Saber #2.ALG.RF.C

Un problema per treballar també el **saber #2.ALG.RF.C**, més concretament el significat del pendent, el trobem a l'activitat de NRICH [How steep is the slope?](#). L'activitat permet introduir el concepte de pendent d'una recta d'una manera senzilla per després treballar els gràfics de les funcions afins i lineals. Es treballen les gràfiques de les rectes, els pendents de rectes perpendiculars i també permet explorar el teorema de Pitàgores, ja que estableix connexions amb altres sentits del currículum.

S'inicia l'activitat mostrant-los la imatge següent:



Font: [How steep is the slope?](#), de NRICH

Tot seguit es plantegen preguntes del tipus:

- Imagineu una recta amb pendent 2 que passa per H, per quin altre punt passa?
- Busqueu una altra recta de pendent 2. Quantes en podeu trobar?
- Trobeu la recta amb un pendent més/menys gran. N'hi ha més?
- Pots trobar alguna recta que tingui pendent entre 1 i 2?
- Quin és el pendent de la recta que passa per G i O?
- Observa la recta que passa per R i M. Què passa amb el seu pendent?

Un cop es treballen preguntes d'aquests tipus i es comparteixen els raonaments amb gran grup és el moment de respondre a la pregunta principal del problema: Quants pendents diferents hi ha? L'alumnat els haurà de trobar tots i ordenar-los, enumerant els punts per on passa cada recta. És important que trobin una manera sistemàtica per fer la feina i no deixar-se cap cas.

### **Saber #2.ALG.RF.C**

Per treballar també el **saber #2.ALG.FR.C**, en concret per introduir les funcions afins, hi ha l'activitat de l'ARC [Rectangles i funcions afins](#) elaborada pel professorat del CREAMAT (2013), que també s'esmenta al bloc Variable d'aquest curs. Es treballa amb un cordill o fil lligat amb el qual podem formar diferents rectangles. Sabem que tots ells tindran el mateix perímetre però diferents costats. Però si en fixem un, l'altre també quedarà determinat. Per exemple, si el cordill fa 60 cm i un dels costats en fa 20; l'altre, forçosament, en farà 10. L'objectiu d'aquest element de l'ARC és introduir la funció afí a partir d'aquestes exploracions. Per dur a terme l'activitat, es fan servir els materials següents: fil lligat amb una llargada total de 60 cm, fulls de paper DIN A3 de diferents colors, regle per mesurar, escaire, tisores, xinxetes, retoladors, regle llarg de pissarra, taulell de suro i paper d'embalar.

El professorat porta preparat un taulell de suro amb un full gran de paper d'embalar clavat a sobre amb xinxetes. Sobre el paper es dibuixen amb retolador dos eixos de coordenades paral·lels a les vores del suro amb l'origen a la part inferior esquerra, de manera que quedi especialment visible el primer quadrant. Als eixos es marquen les unitats amb separacions d'un centímetre, tot i que tan sols s'indica el nombre cada 5 cm per evitar que quedi molt atapeït. S'arriba fins a 30 cm tant a l'eix d'abscisses com al d'ordenades. En una part del taulell, marca una taula de dues columnes i un bon nombre de files. A la part superior de la primera columna hi escriu «Base, x» i a la part superior de la segona columna hi escriurà «Altura, y». Per iniciar l'activitat el professorat mostra a la classe un fil de 60 cm que té els extrems lligats i, amb l'ajut d'un/a alumne/a, fa diferents rectangles amb el fil, al mateix temps que pregunta si els rectangles que es formen tenen alguna cosa en comú. **(moment 1)**

Hi pot haver un intercanvi d'opinions que contribueix a configurar diverses idees: **(moment 2)**

- Que tots aquests rectangles tenen el mateix perímetre.
- Que hi ha infinits rectangles possibles construïts així.
- Que cada vegada que establim la longitud de la base ens queda fixada l'altura.

A continuació l'alumnat treballa per parelles. Es lliura un full de paper a cada parella i se'ls convida a dibuixar (amb l'ajuda del regle i l'escaire) un rectangle de 60 cm de perímetre. Es demana que, a la part interna del rectangle, indiquin les dimensions que han escollit.

Tot seguit, cada parella retalla el seu rectangle i després el professorat mostra el taulell de suro amb els eixos de coordenades i convida cada parella a fer el següent:

- Agafar el rectangle i decidir què pren com a base i què pren com a altura. És important observar que no cal agafar el més llarg com a base.
- Agafar unes xinxetes i clavar el rectangle sobre el suro, de tal manera que la base descansi sobre l'eix d'abscisses i el vèrtex esquerre coincideixi amb l'origen. Cal no posar massa xinxetes perquè se n'hi han de clavar molts, de rectangles.
- Escriure la llargada i l'amplada del seu rectangle a la taula.

Un cop totes les parelles ho hagin fet, es demanarà a l'alumnat si observen alguna regularitat en la distribució dels vèrtexs de la part superior dreta dels rectangles que hi ha als eixos de coordenades i si observen alguna relació entre la quantitat que indica la base i la que indica l'altura a la taula. Seria bo que es produís una conversa en la qual sorgissin idees com: **(moment 3)**

- El fet que les coordenades (x,y) de cada vèrtex superior dret coincideixen amb els valors que hem escrit a la taula quan hem indicat la base i l'altura.
- El fet que els punts indicats formen una recta. A propòsit d'això serà bo fer observar que a aquesta recta li falten punts i preguntar si hi hauria possibles rectangles que «els emplenessin».
- El fet que la suma de les dues columnes sempre dona 30 o que el valor de la segona columna sempre és 30 menys el valor de la primera. Serà bo preguntar: Per què 30?
- Arribar a deduir que, en termes de coordenades, els punts (x,y) de la recta sempre compleixen que

$$y = 30 - x.$$

Després, per tal de donar una mica més de generalitat a l'activitat, tornant a treballar en parelles, es poden plantejar preguntes com: **(moment 4)**

- Què passaria si haguéssim fet el mateix amb rectangles de 40 cm de perímetre o de 10 cm de perímetre?
- Podríem deduir l'expressió algebraica que relaciona  $x$  i  $y$  en el cas de rectangles que tinguin un perímetre  $P$ ?
- Podríem representar, en uns eixos cartesianes, les rectes corresponents a rectangles de 10 cm de perímetre? De 20 cm de perímetre? De 30 cm de perímetre? Què tenen en comú aquestes rectes?

Per respondre a aquestes preguntes també es pot emprar algun programa que faci representacions gràfiques.

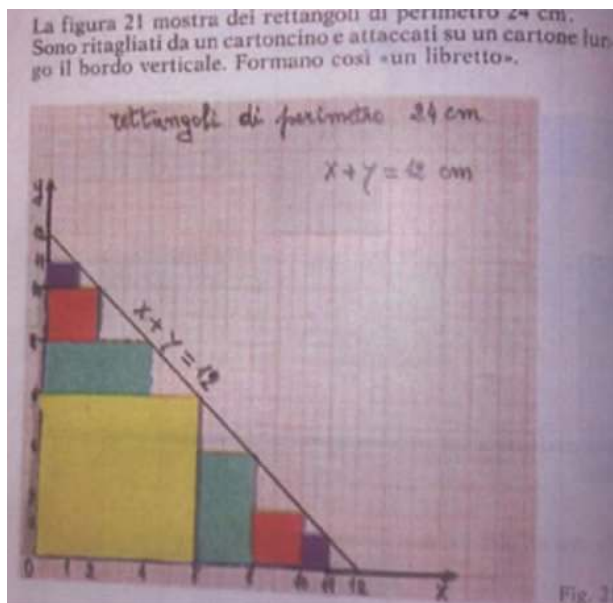
S'acaba l'activitat i s'indica que aquestes funcions formen part d'una família més general de funcions anomenades «funcions afins», que tenen en comú:

- Que la seva expressió algebraica és del tipus  $y = a \cdot x + b$ , on  $a$  i  $b$  són nombres qualssevol.
- Que la representació gràfica sempre és una recta.

Si hi ha oportunitat estaria bé poder representar, per parelles, algunes funcions afins amb GeoGebra, per exemple, i obrir el camí perquè descobrissin el sentit gràfic dels valors  $a$  i  $b$  de l'expressió algebraica.

Finalment, es pot demanar a l'alumnat que elabori un petit informe (per incloure en la llibreta o al dossier de classe) i hi descriguin la feina feta i el que han après.

Una activitat molt semblant va ser plantejada per Emma Castelnuovo al llibre *Numeri e figure*, editat per La Nuova Italia (1989). En aquest llibre hi ha el dibuix següent, que es refereix a rectangles de 24 cm de perímetre:

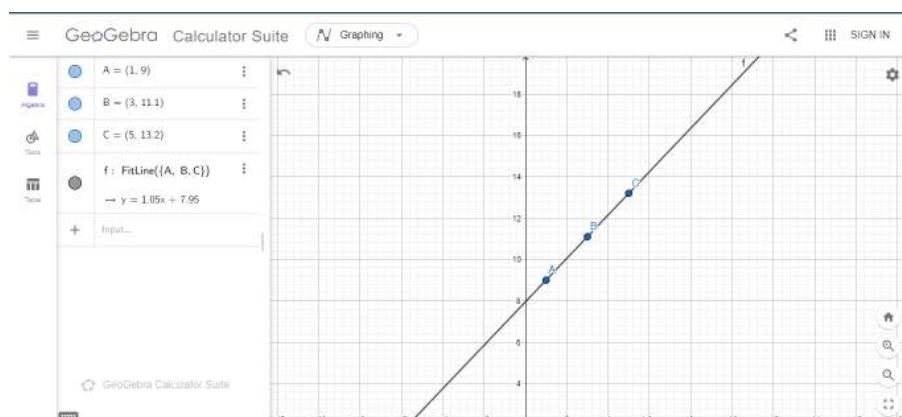


Font: "[Rectangles i funcions afins](#)", del CREAMAT

Cal recordar que el **saber #2.ALG.RF.C** és essencial, però que els recursos que s'acaben de descriure són només una proposta.

Per treballar el **saber #2.ALG.RF.D**, trobem l'activitat de l'NCTM «What's the function». En aquesta activitat, l'alumnat ha de fer un experiment, prendre dades, representar-les en una taula i en uns eixos de coordenades i, finalment, amb l'ajuda de programes de geometria dinàmica trobar-ne la funció que millor ajusta les dades. És a dir, troba el model matemàtic de la situació experimentada. La proposta original consta de 5 activitats que implicarien el treball amb molts tipus de funcions, la majoria encara desconegudes per a l'alumnat de 2n. Però de les 5 propostes, sí que podem treballar l'experiment «Stacking Cups», que tracta d'anar apilant gots d'un sol ús i mesurar l'altura de la pila de gots. Hi ha una adaptació de l'activitat traduïda al català al següent enllaç: [Quina és la funció. Apilant gots](#). També podem trobar un

tutorial de com trobar la funció d'ajust amb el GeoGebra a l'enllaç [Tutorial GeoGebra: Quina és la funció.](#)



Font: elaboració pròpia

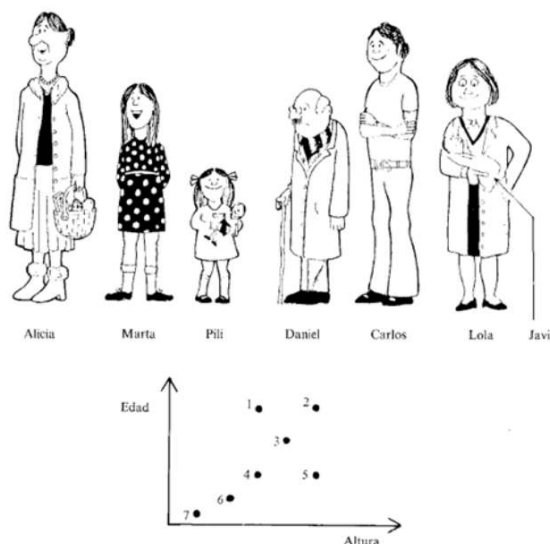
Per treballar el **saber #2.ALG.RF.D**, i també el **saber #2.ALG.RF.C**, trobem l'activitat a l'ARC, [El pendent i l'ordenada a l'origen de les funcions afins](#), del professor Pep Bujosa. Amb aquesta activitat, l'alumnat podrà representar una funció afí sense fer cap taula i també podrà deduir l'expressió algebraica de la funció a partir de la representació, fent servir unes aplicacions fetes amb GeoGebra.

### Saber #2.ALG.RF.E

A l'hora d'extreure informació d'una funció, podem partir d'enunciats que la plantegin en qualsevol dels tipus de representació possible. El més habitual és donar-la en forma de taula o de gràfic a partir dels quals es demana respondre algunes preguntes, que poden contenir informació directa o bé requereixen fer inferències per ser respostes. Ens referim a preguntes del tipus: «Observant el gràfic, indica en quin moment del dia es va gastar més aigua?» (directa) o bé «Aquest gràfic indica el consum d'aigua d'una escola en un dia. Quan creus que es fa la pausa per esmorzar?» (inferencial).

Aquest segon tipus és especialment interessant, i aquesta capacitat d'inferència es pot treballar molt bé a partir de gràfics de situacions contextualitzades però no quantificades (Shell Centre for Mathematical Education, 1990). Aquestes activitats resulten més complexes i es poden utilitzar per inferir informació sobre el contingut, però també per estudiar els diferents tipus de variació d'una funció. El treball quantitatiu i el qualitatiu no haurien de ser excloents, sinó que es poden relacionar i alternar. Un exemple el podem trobar en aquest mateix bloc, a l'activitat «Microrelats funcionals» descrita en relació amb el **saber #2.ALG.RF.A**.

Un altre exemple d'interpretació, tot i que no de funcions sinó de punts, és el següent, extret també del Shell Centre. Es tracta de relacionar els punts de la gràfica amb les persones a les quals representen.



Font: [El lenguaje de funciones y gráficas. Shell Centre](#)

Cal recordar que el **saber #2.ALG.RF.E** és essencial, però que els recursos que s'acaben de descriure són només una proposta.

## Pensament computacional

### Sabers

- Selecció dels aspectes essencials per descriure i analitzar una situació matemàtica, progressant cap a l'abstracció i l'establiment d'un model matemàtic. **[ESS]** **#ALG.MM**
- Utilització de diagrames en arbre per analitzar i descriure situacions matemàtiques. **#NUM.CO**, **#EST.PI**
- Comprensió i creació d'algorismes per resoldre problemes a través de seqüències ordenades d'instruccions que puguin ser executades per una persona o per un ordinador. En particular que continguin instruccions condicionals i blocs iteratius. **#EST.PI**, **#MES.ME**
- Operadors de comparació ( $=$ ,  $\neq$ ,  $<$ ,  $>$ ,  $\geq$ ,  $\leq$ ) com a generadors d'expressions lògiques i operadors lògics (i, o, no). Aplicació en instruccions condicionals. **[AMP]** **#NUM.RE**
- Ús adequat del full de càlcul en contextos matemàtics, per exemple, financers i estadístics. **#NUM.EF**, **#EST.DI**
- Reconeixement d'una fórmula en un full de càlcul com a patró de computació en aplicar-la a diferents caselles. **[AMP]** **#EST.DI**
- Ús adequat de programes de geometria dinàmica per treballar construccions en el pla. **#ESP.FG**
- Autoconfiança, persistència, adaptabilitat, flexibilitat, creativitat, col·laboració i gestió constructiva de l'error. **#SOE**

### Descripció i orientacions

#### Reflexions inicials

L'especificació d'aquest bloc permet establir connexions rellevants entre el pensament computacional i altres blocs dins del sentit algebraic i el procés de resolució de problemes. Aquestes connexions no només enriqueixen l'ensenyament de les matemàtiques, sinó que també faciliten la integració natural de conceptes de pensament computacional en l'aprenentatge matemàtic.

El disseny dels sabers s'ha elaborat pensant a assegurar que es treballin les quatre categories clau del pensament computacional: descomposició, patrons, abstracció i algorismes. Es flexibilitzen per permetre diverses opcions didàctiques, des del pensament computacional «desendollat» fins a la programació en entorns visuals i textuais o, fins i tot, l'ús de la robòtica i dispositius mòbils. I es pensa en un enfocament inclusiu per adaptar-se a les diferents necessitats i recursos, tant dels alumnes com dels centres educatius, així com en la diversitat metodològica, per fomentar la creativitat i la motivació en l'alumnat.

Finalment, la integració de la gestió socioemocional com a component transversal en tots els cursos de l'ESO subratlla la importància de l'educació integral, que no només busca desenvolupar competències tècniques, sinó també habilitats emocionals i socials necessàries per al creixement personal i professional en un món cada cop més digitalitzat.

#### Comentaris sobre les connexions

La connexió amb els altres saber és significativa, ja que aquest bloc comparteix moltes de les habilitats fonamentals que són crucials en l'estudi de les matemàtiques, com la resolució de problemes, el raonament lògic i la descomposició de tasques complexes en passos més simples.

#### Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

Tot i que el currículum és flexible, hom pot entendre que hi ha molta càrrega de sabers en la matèria de matemàtiques, si a més, ens demanen que apliquem aquest «nou» saber, podria ser que no encaixés tot amb les hores de dedicació que hi tenim. Aquest és un dels motius pels quals s'ha marcat el **saber #2.ALG.PC.D** i el **saber #2.ALG.PC.F** com ampliació.

#### Observacions sobre alguns sabers específics

En el **saber #2.ALG.PC.A**, que és un saber essencial, entenem per situació matemàtica una situació concreta i propera als estudiants. Un cop presentada, han d'identificar quins elements dels que conté són rellevants per analitzar-la. Un cop trobats, s'intenta descriure amb eines matemàtiques bàsiques per passar a l'abstracció com a pas previ al model matemàtic final, provant i validant-lo amb la situació original o altres de similars.

La creació d'un diagrama d'arbre, la base del **saber #2.ALG.PC.B**, requereix identificar la informació rellevant de cada opció del problema i validar les branques segons les condicions establertes.

El **saber #2.ALG.PC.C** se centra en la possibilitat de resoldre alguns problemes d'una manera sistemàtica. És recomanable donar exemples del que és un algorisme, com ara les receptes de cuina o els passos per solucionar un cub de Rubik; així com què vol dir una instrucció condicional, instrucció que es duu a terme només si es compleix una certa condició (de moment simple), i una de blocs iteratius, instruccions que es repeteixen diverses vegades fins que es compleix una condició, per exemple, deixar tapada l'olla fins que l'aigua bulli (és a dir, repeteix diverses «observacions a la cuina» fins que l'aigua bulli).

Un operador lògic és una eina representada per un símbol que manipula dos valors per donar un resultat segons unes regles específiques. En el context del **saber #2.ALG.PC.D**, es tracta d'operadors de comparació ( $=$ ,  $\neq$ ,  $<$ ,  $>$ ,  $\geq$ ,  $\leq$ ), que retornen un valor lògic (cert o fals), i d'operadors lògics (conjunció, disjunció i negació: i (AND), o (OR), no (NOT)), que combinen i modifiquen expressions lògiques, les quals poden ser utilitzades per prendre decisions en funció de si una condició és certa o no. No intentarem fer taules de la veritat ni de lògica proposicionals d'una manera explícita per no estendre els continguts.

El full de càlcul, la base del **saber #2.ALG.PC.E**, és una eina fonamental per gestionar i manipular dades numèriques. Que sigui nou (per part de l'alumnat) i potent fan que s'hagi de ser molt curós a l'hora d'implementar-lo a l'aula. És aquest el motiu pel qual el **saber #2.ALG.PC.F** és d'ampliació.

Com en el cas de 1r, el **saber #2.ALG.PC.G** se centra en el programa de geometria dinàmica [GeoGebra](#). Al professorat novell li pot ser d'ajuda aquest taller [Matemàtiques amb GeoGebra. Nivell 0](#) o aquest altre, "[C²EM. Taller iniciació geometria dinàmica](#)". Amb aquests recursos no pretenem que el professorat creï activitats dirigides o de mostra, sinó que se senti més segur i còmode en el moment de portar-lo a l'aula. Creiem que aquest coneixement es forma quan l'alumnat interactua, gestiona i crea els recursos proposats al seu propi ritme.

Dins del **saber #2.ALG.PC.H**, l'autoconfiança és important per afrontar reptes amb seguretat, mentre que la persistència impulsa a mantenir la fermesa davant les dificultats. L'adaptabilitat i la flexibilitat permeten ajustar-se als canvis i reconsiderar estratègies quan cal, mentre que la creativitat ajuda a generar idees i solucions noves. La gestió constructiva de l'errada permet veure els errors com oportunitats d'aprenentatge i de foment del creixement personal. Totes aquestes actituds enllacen amb el sentit socioemocional, **#SOE**.

## Recursos i activitats

### Recursos i activitats per treballar sabers concrets

Per treballar el **saber #2.ALG.PC.A**, que és un saber essencial, convidem a utilitzar les tasques [Bebras](#). Hi ha col·leccions de problemes, entre altres llocs, a l'[Uruguai](#), l'[Argentina](#) o [Austràlia](#) o a [helloBebras](#). Com en el cas de [1r](#), aquests problemes es poden resoldre individualment o en petit grup, però és important posar en comú les estratègies de solució i reflexionar sobre les habilitats de pensament computacional emprades. Exemples dels reptes Bebras que involucren el **saber #2.ALG.PC.A** són [Missió 5: En la biblioteca](#) o [Mesas de castores \(pàg.20\)](#).

Hi ha molts [problemes](#) del [concurs Fem Matemàtiques](#) que impliquen aquest saber. Un d'ells és [Convenció de mags](#), el qual ens permet posar en pràctica un joc de rol matemàtic. Tot i que estigui categoritzat a 6è, són les preguntes i el desenvolupament que en podem fer el que en marcarà el nivell, com és el cas [d'aquesta fitxa adaptada](#) per a 2n. Al [Banc de recursos del Fem Matemàtiques](#) hi ha la solució desenvolupada. El problema original surt del problema de Flavi Josep ([Viquipèdia](#)).

Pel **saber #2.ALG.PC.C**, un cop els alumnes han practicat la creació d'algorismes en pseudocodi i diagrames de flux, poden començar a implementar-los en un llenguatge de programació per blocs, com Snap!, Scratch o, fins i tot, Python. Aquí veuran com els algorismes es poden traduir a codi que pot ser executat per un ordinador. Dos exemples senzills en poden ser:

- Amb condicionals: Implementar un programa que determini si un número és positiu, negatiu o zero.
- Amb blocs iteratius: Escriure un programa que imprimeixi els números de l'1 al 10 en ordre.

Continuant amb aquest saber, la constant de Kaprekar ([X:MMACA\\_cat](#) o [proyectoDescartes](#)) és una bona oportunitat per trobar una curiositat matemàtica a través d'uns passos seqüencials, iterant-los i amb una condició clara, si es [programa amb un resultat visual](#), fins i tot es poden ressaltar patrons. Una altra bona font de curiositats són els nombres capicues ([ampliació](#)), una de les quals és un algorisme per crear-ne des d'un nombre qualsevol ([capicua.es](#)).

Per aplicar el **saber #2.ALG.PC.D**, pot servir d'exemple el següent:

La botiga de roba Moda Jove té una promoció especial per als clients. La promoció estableix que, si un client compra dues peces de roba a un preu superior a 20 € cadascuna i la seva edat és major o igual a 12 anys, llavors rebrà un 10% de descompte en la seva compra.

Si identifiquem les variables i les marquem com:

- P: el preu de la primera peça de roba,
- Q: el preu de la segona peça de roba,
- E: l'edat del client;

l'expressió lògica que representa la promoció és:  $(P > 20) \wedge (Q > 20) \wedge (E \geq 12)$ .

Amb això, la instrucció condicional queda així: Si l'expressió lògica és certa, el client rebrà un 10% de

descompte en la seva compra.

En fem un cas particular per reforçar-ne la comprensió i suposem que un client compra dues camises, una a 25 € i l'altra a 30 €, i té 14 anys. En aquest cas, les variables prenen els següents valors:

- $P = 25$
- $Q = 30$
- $E = 14$

L'expressió lògica és  $(25 > 20) \wedge (30 > 20) \wedge (14 > 11)$ . La qual és certa, ja que totes les condicions són certes. Per tant, el client rebrà un 10% de descompte en la compra.

Algunes preguntes d'ampliació poden ser:

- Què passa si el client només compra una peça de roba a un preu superior a 20 €?
- Què passa si el client té menys de 12 anys?
- Com canviaria l'expressió lògica si la promoció només fos vàlida per a clients majors de 18 anys?

Un altre exemple per treballar els operadors lògics poden ser frases com: «Si tens més de 10 anys i saps nedar, pots entrar a la piscina». «Si tens menys de 10 anys o no saps nedar, no pots entrar a la piscina».

Per acabar, també podem proposar: En quins casos serà certa la frase per als nombres: 2, 4, 3 i 9 si afirmem que un nombre és parell i és primer? Si afirmem que un nombre és divisible per 2 o és divisible per 3, en quins casos serà veritat quan ho concretem per als nombres 12, 4, 8 i 7?

Si el professorat pensa en els operadors lògics com a unió, diferència i intersecció de figures, té un bon exemple d'activitat en aquest vídeo a partir del minut 61 [Operacions lògiques binàries sobre cossos geomètrics](#), dissenyat per la Lucia Rotger i en Juan Miguel Ribera dins del cicle «Perspectives matemàtiques» del CREAMAT.

Per treballar el **saber #2.ALG.PC.G:**

Algunes propostes per tal que l'alumnat treballi construccions en el pla amb el programa de geometria dinàmica GeoGebra al mateix temps que aprèn conceptes matemàtics poden ser:

- Construir i descobrir el teorema de Tales.
- Sabent la relació entre l'angle inscrit i central d'una circumferència, construir un triangle rectangle amb hipotenusa com a diàmetre de la circumferència i el vèrtex oposat inscrit a ella.
- Construir amb «regle i compàs», és a dir, amb rectes i cercles, una mediatriu, una altura o bisectriu a l'estil del joc "[Euclid: the Game](#)".
- Mostració que la suma dels angles interns d'un triangle és  $180^\circ$  creant un triangle amb l'eina polígon, marcant els tres angles amb l'eina homònima i bé fer la suma manualment o amb l'ajuda de l'eina text i escriure les lletres de cada angle. Nota: aquí no es pretén demostrar una propietat sinó mostrar, fer visible o comprensible una idea.

## Blocs de competències: processos matemàtics i gestió socioemocional

El conjunt de sabers que constitueixen el sentit algebraic, com tots els altres sentits, s'han de relacionar amb el conjunt de competències del currículum. Sense un coneixement dels sabers, difícilment es poden desenvolupar els processos per avançar en l'assoliment de les competències i, d'altra banda, la manera com s'introdueixen, es construeixen i s'utilitzen els sabers és clau per poder fer un treball competencial.

Així doncs, tots els sabers poden contribuir a desenvolupar qualsevol competència si es treballen en activitats adequades. Així mateix, un saber pot contribuir a desenvolupar diverses competències.

Es presenta la relació entre els sentits i les competències específiques a través dels processos: Resolució de problemes (competències específiques CE 1 i CE 2), Raonament i prova (competències específiques CE 3 i CE 4), Connexions, en què distingim les internes (competència específica CE 5) i les externes (competència específica CE 6), Comunicació i representació (competència específica CE 7), i Gestió socioemocional (competències específiques CE 8 i CE 9).

Aquesta relació, pel que fa al sentit algebraic, es concreta, en el marc d'aquest exemple, de la manera que es descriu en els apartats següents, tot i que hi poden haver altres anàlisis igualment vàlides.

## **Resolució de problemes (CE 1 i CE 2)**

El treball amb el llenguatge algebraic, introduït ja a 1r d'ESO, però que a 2n es desenvolupa més extensament, ofereix a l'alumnat l'oportunitat d'abordar problemes matemàtics amb la potència de les eines algebraiques. En la resolució de molts problemes, el primer pas és comprendre bé l'enunciat, el segon consisteix a traduir aquest enunciat a una representació simbòlica que conté una quantitat desconeguda, una equació. Mitjançant tècniques algebraiques, es podrà resoldre aquesta equació i interpretar-ne el resultat dins del context del problema. El sentit algebraic proporciona, doncs, moltes possibilitats per treballar la resolució de problemes, especialment en la comprensió dels enunciats i la traducció al llenguatge matemàtic, en aquest cas, algebraic (CE 1). També pel que fa a la interpretació dels resultats, la validesa dels quals pot estar condicionada pel context del problema (CE 2). La majoria dels blocs de sabers incideixen en el treball sobre resolució de problemes, però, pel que fa al treball, en aquest sentit a 2n d'ESO tenen especial incidència els blocs Model matemàtic, Igualtats i desigualtats i Pensament Computacional.

### **Sabers**

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar la resolució de problemes són, entre d'altres:

- El **saber #2.ALG.MM.E**, anàlisi de les solucions d'un problema, presa de decisions en conseqüència i formulació de prediccions, que és essencial, contribueix clarament al desenvolupament de la CE 2.
- El **saber #2.ALG.ID.C**, resolució de problemes d'equacions de primer grau contextualitzats, que és essencial, incideix directament en el procés de Resolució de problemes i en les competències C1 i C2.
- El **saber #2.ALG.RF.C**, estudi i aplicació en contextos de les funcions constant, lineal o de proporcionalitat directa i afí, que és essencial, també es relaciona amb la resolució de problemes, ja que sovint les situacions contextualitzades plantegen preguntes que es relacionen amb les competències CE 1 i CE 2.
- El **saber #2.ALG.PC.C** desenvolupa habilitats de raonament estructurat i analític, alhora que facilita la modelització de processos repetitius i la descomposició de problemes complexos en parts més senzilles i seqüencials, i possibilita l'observació de patrons o l'optimització de solucions.

### **Recursos**

Alguns dels recursos esmentats per treballar diferents sabers del sentit algebraic fan referència directa al procés de resolució de problemes. Molts d'ells ja són anomenats «problema» quan han estat mostrats en l'apartat corresponent de recursos, associats a un saber determinat. Per exemple:

- Hi ha molts concursos que poden ser fonts d'idees per treballar la resolució de problemes, n'és un exemple la Prova Cangur, proposada per treballar el **saber #2.ALG.PA.A**.
- L'activitat «Pintant un cub», **saber #2.ALG.ID**, presentada com a recurs per treballar la majoria dels sabers del bloc Igualtats i desigualtats és un exemple que, més enllà dels sabers concrets, permet

aprofundir en el procés de resolució de problemes i anar cap a la generalització de la situació.

- «El problema de la síndria», recurs per treballar el **saber #2.ALG.ID.C**, està especialment indicat per mostrar la vàlua de les resolucions gràfiques.
- El problema de «Les distàncies a l'escola», recurs per treballar el **saber #2.ALG.ID.D**, que és un saber d'ampliació, és també una molt bona oportunitat per treballar les competències relacionades amb la resolució de problemes, en concret pel que fa al nombre de solucions d'un problema.
- En diversos moments de l'activitat «Rectangles i funcions afins» (moments 1, 3, 4), **saber #2.ALG.RF.C**, es plantegen preguntes que suposen reptes i que impliquen la resolució de petits problemes que impliquin descobertes progressives per anar avançant des de les idees geomètriques associades als rectangles isoperimètrics fins al concepte de funció afí.

## **Raonament i prova (CE 3 i CE 4)**

En tot l'aprenentatge de l'àlgebra, la comprensió del significat dels símbols és un punt clau que cal tenir en compte per poder fer raonaments de tota mena. A l'hora d'emprar les eines algebraïques en situacions contextualitzades, hem de procurar que l'aplicació mecànica de regles no substitueixi els processos de raonament ni amagui els significats dels símbols i expressions derivats del context (CE 3). Tot el bloc Pensament computacional està profundament lligat al raonament i associat a la competència CE 4.

La manipulació de símbols algebraics, i també dibuixos i gràfics, ens permet descobrir noves relacions, buscar equivalències entre expressions aparentment diferents i trobar justificacions generals.

### **Sabers**

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar el raonament són, entre d'altres:

- El **saber #2.ALG.PA.A**, observació i determinació de la regla de formació d'un patró numèric o visual de creixement, i càlcul del terme general, que és essencial, permet desenvolupar la capacitat de raonament lògic i d'argumentació (CE 3), així com utilitzar el llenguatge simbòlic amb significat.
- Al bloc **#2.ALG.ID** i, en particular, al **saber #2.ALG.ID.B**, resolució d'equacions senzilles aplicant, amb sentit, les operacions inverses als dos membres de la igualtat, el treball sobre el raonament, en el sentit de la CE 3, ha de ser constant per dotar de significat els símbols i les operacions indicades.
- La competència CE 4 està molt vinculada al bloc Pensament computacional **#2.ALG.PC**. Tot aquest bloc també està fortament relacionat amb el raonament lògic i la competència CE 3.

### **Recursos**

Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers fan referència directa al procés de raonament i prova. Per exemple:

- Tots els recursos del **saber #2.ALG.PA.A** són adequats per treballar el raonament matemàtic. D'entre ells, però, triem els recursos del web [Visual patterns](#), pel fet que els descobriments, les generalitzacions i les argumentacions que es proposen es fan a partir de models visuals.
- La majoria de les activitats de pràctica productiva, com la presentada com a recurs del **saber #2.ALG.ID.B**, «Expression Polygons», tenen relació amb el raonament matemàtic, ja que pretenen que per mitjà de la pràctica es descobreixin patrons o regles i al mateix temps se'n pugui argumentar la validesa, la qual cosa connecta tant amb la CE 3 com amb la CE 4.
- La CE 3 és present al llarg de tota l'activitat «Rectangles i funcions afins», exposada en relació amb

el **saber #2.ALG.RF.C**, ja que es demana resposta a preguntes riques i argumentacions que es produeixen en el marc de bones converses. S'observa de manera especialment clara en els moments 2, 3, 4 i s'associa a les converses que impliquen argumentació.

- Les tasques Bebras, relacionades amb el **saber #2.ALG.PC.A**, en ser un material creat per desenvolupar habilitats de pensament computacional, que fomenten la creativitat i la resolució de problemes, s'ajusten perfectament al procés de raonament i a les competències corresponents (CE 3 o CE 4).

## Connexions amb altres parts de la matemàtica (CE 5)

L'àlgebra es relaciona amb la majoria dels sentits, però segurament és amb el sentit numèric i l'espacial, juntament amb el de la mesura, on trobem més connexions. Aquestes connexions són fonamentals per construir el llenguatge algebraic i donar sentit a les seves representacions que, sense elles, esdevindrien totalment abstractes. El bloc Pensament computacional també presenta connexions riques amb sabers d'altres blocs i sentits.

### Sabers

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar les connexions internes són, entre d'altres:

- Els sabers del bloc Patrons (**#2.ALG.PA**)
- Els sabers del bloc Model matemàtic (**#2.ALG.MM**)
- Els sabers del bloc Variable (**#2.ALG.VA**)
- Els sabers del bloc Pensament computacional (**#2.ALG.PC**)
- El llenguatge simbòlic, en el qual l'alumnat comença a iniciar-se, és un element especialment característic de tot el cos matemàtic (bloc Igualtat i desigualtat (**#2.ALG.ID**)).

### Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers aporten o utilitzen connexions internes. Per exemple:

- El recurs de la web [Visual patterns](#), proposat per treballar el **saber #2.ALG.PA.A** i, en concret, els patrons visuals de creixement, és un exemple de connexió entre el sentit espacial i l'algebraic.
- El recurs [Rectangles d'igual perímetre i funcions afins](#), citat per treballar el **saber #2.ALG.VA.A**, és un exemple de connexions intramatemàtiques, ja que es relacionen llenguatges numèrics (taules de nombres) i geomètrics (dibuixos de figures i gràfics) amb els algebraics (expressions simbòliques).
- L'activitat «Pintant cubs», exposada com a recurs aplicable a la majoria dels sabers del bloc Igualtats i desigualtats, i concretament lligada al **saber #2.ALG.ID.E**, és un exemple clar de connexió interna entre els sentits numèric, espacial i algebraic.
- L'activitat que es proposa per treballar el **saber #2.ALG.RF.B**, relacionada amb la construcció i el treball al voltant de taules de valors, extreta del capítol 5 del llibre *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria* (Calvo et al., 2016), promou l'establiment de connexions entre nombres i funcions.
- L'activitat «Rectangles i funcions afins», **saber #2.ALG.RF.C**, és especialment rica perquè connecta diversos sentits del currículum de matemàtiques: hi ha elements de numeració, hi ha operacions de mesura, es tracten aspectes del sentit espacial i s'arriba a la idea de funció dins del sentit algebraic.

## Connexions amb altres matèries i amb l'entorn (CE 6)

L'àlgebra com a eina per resoldre problemes, tant de la matemàtica mateixa com en altres contextos, es connecta amb moltes disciplines, especialment les científiques. I dins del sentit algebraic, els blocs Model matemàtic i Relacions i funcions són especialment rics per les connexions amb les lleis científiques. També el pensament computacional, en particular el desenvolupament de programes informàtics, permet establir connexions amb camps molt diversos de fora de les matemàtiques.

### Sabers

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar les connexions externes són, entre d'altres:

- **#2.ALG.PA.A**, patrons visuals en situacions contextualitzades
- **#2.ALG.MM.A**, ús de les equacions de primer grau com a models matemàtics de situacions contextualitzades
- **#2.ALG.MM.E**, anàlisi de les solucions d'un problema, presa de decisions en conseqüència i formulació de prediccions, si escau
- **#2.ALG.ID.C**, problemes contextualitzats que es resolen per mitjà d'equacions senzilles
- **#2.ALG.ID.E**, igualtats per expressar funcions constants, lineals i afins en situacions contextualitzades
- **#2.ALG.RF.C**, estudi i aplicació en contextos de les funcions constant, lineal o de proporcionalitat directa i afí

Tots els sabers esmentats tenen una característica comuna: el fet de treballar a partir de situacions contextualitzades.

### Recursos

Molts dels recursos descrits per treballar diferents sabers del sentit algebraic ofereixen oportunitats per fer connexions externes. Més concretament, tots els recursos corresponents als sabers esmentats anteriorment en els quals s'involucra un context no matemàtic són interessants per dur a terme connexions entre les matemàtiques i la resta de sabers d'altres àrees de coneixement.

Tal com s'esmenta en els sabers corresponents a la modelització matemàtica, i també en el document de 1r d'ESO, un tipus de tasques en què les connexions entre les matemàtiques i altres contextos són nombroses i evidents són els projectes. Al CREAMAT s'hi pot trobar una campanya anomenada [Matemàtiques i projectes](#), en la qual hi ha exemples detallats per portar a l'aula.

Un recurs per establir connexions entre les matemàtiques i diversos contextos no matemàtics el trobem al llibre *El lenguaje de funciones y gráficas* (Shell Centre for Mathematical Education, 1990). També podem trobar exemples de situacions contextualitzades relacionades amb l'àlgebra i les funcions al llibre *Funciones y gráficas* (Azcarate & Deulofeu, 1989).

Altres exemples concrets són:

- Com s'ha exposat en els recursos lligats al **saber #2.ALG.MM.A**, que va acompanyat del **saber #2.ALG.ID.C**, un possible camí a seguir és partir de l'enunciat del problema fins a arribar a la solució, validant-la d'acord amb el context del problema. També en parlar d'aquests sabers a 2n d'ESO, podem trobar contextos en què les equacions són necessàries per donar resposta a reptes diversos i

que ens poden permetre establir connexions externes de diferents tipus, com la llei d'Ohm, que estableix la relació entre la resistència, la tensió i la intensitat d'un circuit, les màquines simples amb la llei de la palanca o el treball amb densitats o forces, a física i química. En els tres exemples, les equacions de 1r grau permeten resoldre varietat de problemes i contextualitzar-ne el treball.

- Un dels recursos del **saber #2.ALG.ID.E** és l'activitat «Pintant cubs», que ja hem esmentat en parlar de les connexions intramatemàtiques. En tant que l'activitat parteix d'un material concret (cubs encaixables) i que té relació amb la idea de creixement, que és aplicable a moltes situacions de context real, per exemple la comparació entre el creixement de la longitud, la superfície i el volum d'un ésser viu, ens permet analitzar la grandària de certs animals i concloure, entre molts altres casos, que els insectes gegants no poden existir.
- En el treball del **saber #2.ALG.RF.C** es proposa treballar amb etiquetes de productes, que, en realitat, són taules de valors de la funció de proporcionalitat directa de situacions contextualitzades, en aquest cas, etiquetes de productes quotidians.

## **Comunicació i representació (CE 7)**

L'àlgebra aporta un llenguatge per expressar de manera general i interpretar de manera sintètica propietats i relacions numèriques o relacions entre variables per mitjà de fórmules de diferents tipus. Des d'una perspectiva més àmplia, és interessant projectar la idea que el llenguatge i les tècniques algebraiques són emprades en tots els àmbits científics i tecnològics.

Si ens centrem en la competència comunicativa (CE 7) és clar que el fet que l'àlgebra esdevingui en si mateix un llenguatge, fa que el seu desenvolupament estigui estretament vinculat a aquesta competència. Saber llegir i interpretar expressions algebraiques, models expressats per mitjà de fórmules, igualtats i desigualtats, i funcions elementals, i saber-los utilitzar per expressar situacions i per resoldre problemes lligats a aquestes situacions forma una part essencial de la competència comunicativa entesa com una competència específica de les matemàtiques. Interpretar i emprar el llenguatge algebraic són accions que permeten relacionar el sentit algebraic i la competència comunicativa.

### **Sabers**

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar la comunicació i la representació són, entre d'altres:

- El **saber #2.ALG.MM.D** posa l'èmfasi en l'ús de recursos digitals per trobar les diferents representacions d'un model matemàtic, en particular els models elementals de funcions, per la qual cosa està directament relacionat amb la CE 7.
- També el **saber #2.ALG.MM.E**, en especial quan les activitats comportin explicar els resultats obtinguts i valorar críticament les solucions d'un problema, veient si són coherents i adequades per tal de prendre decisions en conseqüència, implica el treball de la competència CE 7.
- El **saber #2.ALG.ID.B**, resolució d'equacions senzilles, té un component comunicatiu important, relacionat amb la interpretació dels símbols, i l'ús de models (com la balança) per ajudar a establir les regles que permeten transformar una equació en la seva equivalent.
- El **saber #2.ALG.RF.A**, identificació d'una funció com a relació entre dues variables i estudi de la relació de dependència entre elles, té un component de comunicació rellevant.

Molts dels sabers esmentats en l'exemplificació anterior tenen una característica comuna que és la relació entre representacions d'un concepte.

## Recursos

- Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers del sentit algebraic, atesa la naturalesa d'aquests sabers, fan referència al procés de comunicació i representació. Totes aquelles activitats que promouen el pas del llenguatge verbal al simbòlic i d'aquest al gràfic o al tabular, i viceversa, són activitats que desenvolupen la competència CE 7. En general, les accions d'interpretar, traduir, explicar o argumentar tenen un component comunicatiu rellevant.

Alguns exemples concrets són:

- Com hem citat en els recursos sobre el **saber #2.ALG.MM.D**, el repositori de materials del programa [GeoGebra](#) proporciona multitud de propostes ja preparades per dur a l'aula, en què els canvis de representació i les relacions entre ells són un element fonamental de l'activitat amb funcions.
- L'activitat model de la balança per resoldre equacions senzilles, lligat al **saber #2.ALG.ID.B**, té un component comunicatiu important, relacionat amb la interpretació dels símbols, i l'ús de models per transformar una equació en la seva equivalent. També l'activitat relacionada amb el model de barres per resoldre problemes d'equacions lineals, exposada en els recursos del **saber #2.ALG.ID.B**, i aplicat a l'anomenat «El problema de la síndria», és un bon exemple d'ús de representacions, en aquest cas aplicat a resoldre un problema d'equacions.
- Qualsevol activitat en què hi hagi comparació o traducció d'una representació a una altra està desenvolupant la competència comunicativa. Per exemple, l'activitat exposada en el **saber #2.ALG.RF.A**, que es troba al llibre *El lenguaje de funciones y gráficas* on cal interpretar de manera creativa gràfiques qualitatives, és interessant quan es demana a l'alumnat que llegeixi el seu relat en veu alta i, a la resta de companys que identifiqui o dibuixi la funció a què fa referència.
- A l'activitat «Rectangles i funcions afins», **saber #2.ALG.RF.C**, es pot observar que són moltes les ocasions en què es busca l'intercanvi d'opinions per arribar a construir idees comunes (moments 2, 3). També s'utilitzen representacions diverses: rectangles amb cordill, rectangles retallats en paper, representació de punts i de gràfics funcionals en coordenades cartesianes, taules... i, per tant, es veu clara la seva contribució al treball de la CE 7.

## Gestió socioemocional (CE 8 i CE 9)

Tot i que a 1r d'ESO s'han començat a treballar alguns aspectes rellevants del llenguatge algebraic, com els models matemàtics i les equacions, és a 2n d'ESO que l'àlgebra es comença a treballar com un llenguatge propi. Com ja dèiem a 1r d'ESO, és fonamental reconèixer i atendre les dificultats que aquest salt cap a l'abstracció pot suposar per a part de l'alumnat. Si aquest pas es fa de manera gradual i acollidora, augmentarà l'autoconfiança dels alumnes en les seves capacitats matemàtiques, ja que se'ls proporcionaran eines per afrontar la resolució de problemes amb més seguretat i perseverança. Alhora es facilitarà la col·laboració en grup, discutint estratègies matemàtiques i interaccionant de manera positiva amb altres persones.

La descoberta d'un nou i fascinant territori matemàtic, la comprensió de les seves aplicacions en situacions reals i la sensació de dominar millor les matemàtiques incrementen la motivació i contribueixen a desenvolupar la identitat matemàtica de l'alumnat. Ara bé, si l'alumnat no comprèn la relació entre aquest llenguatge abstracte i els contextos en què es desenvolupa es pot crear una sensació d'inseguretat que faci que l'alumnat es focalitzi en la sintaxi (les regles per a la transformació d'expressions algebraiques) i perdi de vista el veritable significat dels conceptes algebraics involucrats (en particular, el concepte de funció).

La gestió socioemocional està vinculada a dues competències específiques:

- CE 8, relacionada amb el desenvolupament d'habilitats personals com les creences, les actituds i les emocions envers les matemàtiques

- CE 9, centrada en el desenvolupament d'habilitats socials com el treball en equip i la presa de decisions

A continuació, s'indiquen alguns aspectes que, treballats des del sentit algebraic, poden contribuir al desenvolupament de les competències CE 8 i CE 9.

### Aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 8

- Com ja dèiem a 1r d'ESO, l'aprenentatge d'un nou llenguatge és complex i, per això, és crucial dedicar temps perquè aquest aprenentatge sigui significatiu i sòlid, anant més enllà del simple ús dels procediments i les tècniques de transformació d'expressions algebraiques. Aquest procés s'ha de cuidar per evitar que cap alumne quedi enrere o perdi la confiança en les seves habilitats matemàtiques.
- El **saber #2.ALG.PC.H**, autoconfiança, persistència, adaptabilitat, flexibilitat, creativitat, col·laboració i gestió constructiva de l'error, del bloc Pensament computacional està estretament vinculat a la gestió socioemocional, i fa èmfasi en valors com els esmentats en relació amb els errors i la seva gestió. Aquesta idea és plenament aplicable en tot el sentit algebraic i va molt més enllà de l'àmbit del pensament computacional.
- És bo que l'alumnat prengui consciència dels avenços que fa en l'aprenentatge algebraic i de com aquest coneixement en potencia la capacitat per resoldre problemes. Això contribueix a fer que l'alumnat pugui apreciar tant la bellesa com la utilitat de les matemàtiques.

### Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 9

L'àlgebra, com la resta de sentits, ofereix oportunitats per treballar en equip, ja que promou actituds positives, implicació en la presa de decisions i respecte per les aportacions dels altres, i contribueix a superar qualsevol idea limitant sobre les habilitats pròpies o alienes en matemàtiques.

Diverses activitats del conjunt de recursos exposats en els sabers del sentit algebraic, són especialment adequades per ser treballades en petit grup i, fins i tot, amb tot el grup. A continuació, es destaquen activitats concretes en aquest àmbit:

- Les activitats amb ús de material, com les que es proposen per treballar el **saber #2.ALG.PA.A**, adreçades a resoldre i descobrir una pauta, són adequades pel treball amb petit grup. A la campanya [Laboratori de matemàtiques](#) del CREAMAT podem trobar propostes per treballar patrons amb diferents materials: [pattern blocks](#) i [cubets encaixables](#), entre d'altres.
- Una activitat interessant per treballar el **saber #2.ALG.MM.C** que porta per nom [Gràfics de funcions emplenant ampelles](#) i que podem trobar a l'ARC és especialment adequada per ser treballada en grup pel fet que implica presa de decisions i discussió sobre aquestes.
- Una eina imprescindible per modelitzar la realitat són les funcions. En aquest curs es proposa una primera aproximació al concepte i a les funcions més senzilles i la col·lecció de problemes de la primera fase del «Fem Matemàtiques» (citada a propòsit del **saber #2.ALG.PA.A**), amb la seva complexitat i obertura, és ideal per desenvolupar competències socioemocionals relacionades amb el treball en grup.
- Algunes activitats relacionades amb el pensament computacional «desendollat», com ara el disseny i l'execució d'algoritmes, resulten especialment enriquidores quan es fan en grup. Així mateix, exemples dels reptes Bebras que involucren el **saber #2.ALG.PC.A** com ara [Missió 5: En la biblioteca](#) o [Mesas de castores \(pàg. 20\)](#), es poden treballar en petit grup.