

TOR 1r d'ESO: Sentit espacial

Consideracions generals.....	1
Blocs de sabers.....	1
Formes geomètriques de dues i tres dimensions.....	1
Sabers.....	1
Descripció i orientacions.....	2
Reflexions inicials.....	2
Comentaris sobre les connexions.....	2
Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació.....	2
Observacions sobre alguns sabers específics.....	2
Recursos i activitats.....	3
Recursos i activitats generals per al bloc de sabers.....	3
Recursos i activitats per treballar sabers concrets.....	4
Visualització i modelització geomètrica.....	14
Sabers.....	14
Descripció i orientacions.....	15
Reflexions inicials.....	15
Comentaris sobre les connexions.....	15
Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació.....	15
Observacions sobre alguns sabers específics.....	15
Recursos i activitats.....	16
Recursos i activitats generals per al bloc de sabers.....	16
Recursos i activitats per treballar sabers concrets.....	16
Blocs de competències: processos matemàtics i gestió socioemocional.....	19
Resolució de problemes (CE 1 i CE 2).....	19
Sabers.....	20
Recursos.....	20
Raonament i prova (CE 3 i CE 4).....	20
Sabers.....	20
Recursos.....	21
Connexions amb altres parts de la matemàtica (CE 5).....	21
Sabers.....	21
Recursos.....	21
Connexions amb altres matèries i amb l'entorn (CE 6).....	22
Sabers.....	22
Recursos.....	22
Comunicació i representació (CE 7).....	23
Sabers.....	23
Recursos.....	23
Gestió socioemocional (CE 8 i CE 9).....	24
Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 8.....	24
Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 9.....	24



Generalitat de Catalunya
**Departament d'Educació
i Formació Professional**

Consideracions generals

La geometria és una branca fonamental de les matemàtiques que juga un paper crucial en l'educació secundària obligatòria, ja que fomenta el pensament crític i la capacitat de resolució de problemes. A través de l'estudi de les formes, les mesures i les relacions espacials, els estudiants no només aprenen a aplicar conceptes matemàtics, sinó que també desenvolupen habilitats visuals i lògiques que són essencials en la vida quotidiana i en diverses professions.

Desenvolupar el sentit espacial de l'alumnat és una tasca molt engrescadora, però que de vegades pot no resultar senzilla. Tot i estar present en la realitat propera de l'alumnat, de vegades ens trobem amb dificultats de representació o visualització, sobretot quan entrem a la tercera dimensió. És per això que cal parar una atenció especial en aquest sentit, de manera que els estudiants comprenguin amb profunditat els diferents sabers d'aquesta branca de la matemàtica i els integrin al seu bagatge. Cal tenir en compte que aquestes eines són molt útils per visualitzar els conceptes, d'aquest o d'altres sentits de les matemàtiques, i per resoldre problemes tant matemàtics com d'altres disciplines o de l'entorn proper de l'alumnat.

Al llarg de l'educació primària, els nois i noies ja haurien d'haver adquirit els fonaments del sentit espacial, com algunes formes geomètriques planes o de tres dimensions, el concepte d'alguns moviments i transformacions del pla i algunes nocions de semblança. Tot això, partint sovint de l'entorn proper de l'alumne i en connexió amb l'art, les ciències i la vida quotidiana, i a partir d'un treball molt vivencial amb l'ús de materials manipulatius i eines digitals. A secundària s'hauria de seguir aquest camí ja iniciat, de manera que els nostres estudiants puguin trobar una continuïtat i coherència en la manera de fer partint de la manipulació i la descoberta. Al llarg dels cursos de l'educació secundària, s'anirà introduint un grau més alt de formalització, però aquesta sempre hauria d'arribar després de la comprensió dels conceptes treballats.

En tot aquest bloc d'orientacions es vol donar continuïtat a la línia de treball que promou el document [Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria](#) (Aubanell, 2015).

Un espai que pot servir de suport en l'aprenentatge de les matemàtiques en general i del sentit espacial en particular és el Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA) que, en totes les exposicions que organitza pel territori, inclou mòduls que ajuden a l'assoliment dels sabers tractats al llarg de l'etapa. Alguns dels mòduls que estan relacionats amb els sabers proposats en el sentit espacial a 1r d'ESO són: [Fórmules inductives](#) o [Simetries de dos triangles](#), entre d'altres.

El sentit espacial conté, a 1r d'ESO, dos blocs de sabers: Formes geomètriques de dues i tres dimensions i Visualització i modelització geomètrica. El bloc sobre localització i sistemes de representació es comença a treballar a partir de 2n curs, lligat a l'aparició de les relacions funcionals, i el bloc de moviments i transformacions geomètriques, a partir de 3r curs, amb l'estudi de les translacions, els girs i les simetries.

Blocs de sabers

Formes geomètriques de dues i tres dimensions

Sabers

- A. Estudi dels diferents tipus d'angles i relacions entre ells: agut, recte, obtús, pla reflex i complet. Angles complementaris i suplementaris.
- B. Estudi de les propietats dels polígons. Classificació de polígons. **#ALG.PC**

- C. Construcció de polígons regulars.
- D. Estudi dels triangles: classificació segons costats i angles, suma d'angles interiors i desigualtat triangular. Rectes i punts notables d'un triangle. [ESS] #ALG.PC
- E. Classificació de quadrilàters segons costats i angles, suma d'angles interiors. [ESS] #ALG.PC
- F. Estudi de la circumferència i del cercle: centre, radi, diàmetre, longitud, el nombre pi, arc, corda i sector circular. [ESS] #MES.ME, #EST.DI

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

Aquest primer bloc de sabers és una continuació del treball que s'ha fet al llarg de l'educació primària. Ara, però, s'estudien amb més profunditat alguns dels objectes geomètrics, les seves propietats i construccions. És bo aprofundir de manera més exhaustiva a l'hora de classificar objectes o de buscar totes les solucions d'un problema, per exemple. Es pot introduir alguna demostració visual o manipulativa d'alguna propietat de les figures, com ara el concepte que la suma dels angles d'un triangle pla és sempre 180° .

També és important fer èmfasi en l'ús d'un vocabulari adequat, procurant evitar expressions incorrectes com per exemple «rodona» quan es fa referència al cercle o a la circumferència.

Els programes de geometria dinàmica, així com els materials, poden esdevenir una eina molt útil per treballar aquest bloc al llarg de tota l'etapa. Permeten experimentar i provar les conjectures pròpies, connectant el que l'alumnat està pensant i una visualització del que realment està passant.

D'altra banda, aquest bloc pot suposar un bon espai per treure tot el potencial del treball en grup. Discutir sobre les propietats de certes figures geomètriques, posar-se d'acord per establir classificacions, aprofitar la creativitat de cada membre de l'equip per treballar investigacions i projectes..., són algunes de les accions que el sentit espacial ens pot permetre treballar a l'aula.

Comentaris sobre les connexions

Tot aquest bloc ha d'estar connectat per força amb el sentit de la mesura, en especial #MES.ME, ja que és en aquest on es tracta la presa de mesures i el càlcul d'angles, longituds i àrees de figures. També destaca la connexió amb el sentit algebraic, #ALG.PC, en la cerca de regularitats i patrons en, per exemple, la determinació dels angles interiors dels quadrilàters, que es pot estendre a altres figures amb un nombre de costats superior. Per descomptat, no es demana arribar a una expressió algebraica, però hem d'ajudar els estudiants a ser capaços de descriure amb paraules els seus descobriments.

Per acabar, la geometria és un suport molt necessari en la representació de dades, per tant, hi ha una connexió amb #EST.DI.

Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

Es destaquen els sabers relacionats amb els triangles, els quadrilàters i la circumferència per la seva rellevància, en particular la dels triangles, que seran la base per al treball posterior tant de descomposició de figures com per a la trigonometria a 4t d'ESO.

Observacions sobre alguns sabers específics

El **saber #1.ESP.FG.B** pretén assentar les bases dels elements que formen i defineixen les figures geomètriques. És important acostumar els nostres alumnes a utilitzar el llenguatge adequat, de manera que disposin d'aquest vocabulari en treballs i cursos posteriors. Una bona manera d'aproximar-se a aquest saber és la de l'exploració i la descoberta a partir de materials manipulatius. La recerca en petits grups i la posada en comú per aconseguir trobar totes les simetries de diverses figures, per exemple, pot ser molt rica.

Es considera important fer la construcció de diferents triangles per arribar a trobar la desigualtat triangular a partir de l'exploració (**saber #1.ESP.FG.D**).

En els **sabers #1.ESP.FG.D** i **#1.ESP.FG.E** es poden proposar petites investigacions en equip. En aquest cas, i sempre que es facin investigacions, es proposa introduir la redacció d'informes senzills, que poden anar sent més acurats al llarg de l'evolució dels estudiants.

Recursos i activitats

Recursos i activitats generals per al bloc de sabers

Per tal de treballar tot el bloc de sabers de manera general, tot i que podem trobar recursos per treballar el sentit espacial a gairebé totes les campanyes del CREAMAT, en destacarem dues per la gran quantitat de propostes que hi podem trobar. D'una banda, tenim la campanya [Impulsem la geometria](#), que es va publicar al web del CREAMAT durant el curs 2012-2013 amb l'objectiu de dinamitzar aquest bloc del currículum i que des d'aleshores ha anat augmentant el nombre de recursos disponibles. L'altra campanya que cal destacar és la de [Laboratori de matemàtiques](#), on podem trobar activitats amb *pattern blocks*, *multilink*, geoplans, tangrams..., materials que, portats a l'aula amb bones propostes, poden facilitar l'aprenentatge i la comprensió del sentit espacial. Recordem que el material per si sol no fa res, és el material més una bona activitat que l'acompanyi el que el convertirà en un bon recurs.

També volem destacar l'apartat de geometria del [Polypad](#), amb moltes eines que permeten explorar i investigar de manera molt intuïtiva.

Encara que ja s'hagi citat a les consideracions generals, val la pena tornar a recordar el document [Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria](#) (Aubanell, 2015), on trobem orientacions i molts exemples d'activitats per treballar el sentit espacial.

Finalment, cal remarcar que els sabers del sentit espacial de 1r d'ESO, junt amb els dels sentits de la mesura i numèric, poden ser la base pel plantejament de situacions d'aprenentatge i projectes lligats a l'entorn proper de l'alumnat. Per exemple, es pot plantejar com a repte quant costaria canviar l'enrajolat de l'institut o d'una part d'aquest imposant les condicions que ens interessin segons els objectius de treball marcats (sobre les formes i combinacions de les rajoles), o quant ens costaria repintar les línies de la pista del pati; es poden proposar caceres de figures geomètriques i posteriorment fer-ne una exposició, o com transformar una zona del pati en una zona enjardinada amb motius geomètrics; pensar noves distribucions d'alguns espais del centre... I també es poden presentar projectes i situacions d'aprenentatge que tractin temes de caràcter més global, per exemple, a través de l'estudi de les formes de la natura, com ara les estructures de les bresques que destaquen per la seva eficiència i resistència, es poden plantejar reptes que tinguin com a eix central la sostenibilitat.

I ja per acabar, anomenarem la [Prova Cangur](#), que pot ser una font inesgotable de recursos i idees per treballar molts dels sabers del sentit espacial al llarg de tota l'etapa. Per exemple, per a 1r d'ESO podem trobar-hi propostes com les que es mostren a les imatges següents:

24. Si fem el desplegament d'un cub ens queda la figura de la dreta. Quan muntem el cub, cada triangle d'una cara queda adossat per un costat a un triangle del mateix color en la cara contigua. Quin dels quadrats següents, exactament amb l'orientació amb què està dibuixat, correspon a la cara amb l'interrogant?

A)



B)



C)

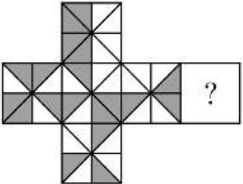


D)



E)





Font: Prova Cangur de 1r d'ESO de 2024

3. Quin dels polígons següents no es pot descompondre en dos triangles tallant-lo amb una línia recta?



Font: Prova Cangur de 1r d'ESO de 2023

8. L'Àlícia té quatre peces transparents d'un trencaclosques (1, 2, 3 i 4). Quines dues peces pot utilitzar per a formar l'hexàgon regular?



A) 1 i 2

B) 1 i 3

C) 2 i 3

D) 2 i 4

E) 1 i 4

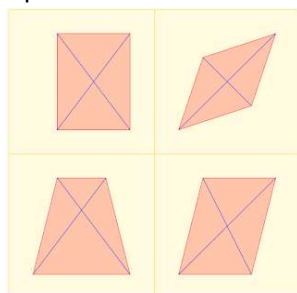
Font: Prova Cangur de 1r d'ESO de 2023

Recursos i activitats per treballar sabers concrets

Per treballar el **saber #1.ESP.FG.A**, l'activitat [Quant mesuren els angles de les diferents peces](#) de la campanya Laboratori de matemàtiques del CREAMAT proporciona un context interessant per fer un treball profund dels angles, a partir de les peces dels geomosaics o *pattern blocks*. Es tracta de descobrir els angles no a partir de la mesura, sinó de l'estudi de les propietats de les peces i les relacions entre elles. D'aquesta manera, fomentem la investigació i la descoberta, per passar després a la conceptualització i la formalització, si s'escau.

Per treballar el **saber #1.ESP.FG.B**, proposem fer un petit joc d'endevinar figures en tres dimensions, partint només del sentit del tacte. Es tracta de disposar un conjunt ben divers de figures (regulars i irregulars, còncaves i convexes, cossos rodons...), en una bossa opaca. Una noia o noi n'ha de triar una i, sense treure-la de la bossa, descriure-la amb el màxim detall possible fins que una companya o company endevina quina és. Ara serà aquest nou alumne qui triarà una nova peça i la descriurà. Aquesta activitat és molt adequada per treballar la competència específica 7, pel que fa a la part de comunicació, posant atenció a l'adequació de la terminologia emprada.

Les «Quelis» (quin és l'intrús) proporcionen una bona eina per treballar qualsevol concepte matemàtic, en aquest cas les propietats dels quadrilàters i les seves diagonals. Es tracta de plantejar als estudiants quatre imatges i demanar-los quina és la que no es correspon amb les altres tres. Si estudiem amb deteniment les figures, veurem que totes quatre poden destacar de les altres per alguna raó, i es tracta de tenir un diàleg amb l'alumnat per fer emergir com més propostes millor. Aquesta activitat, a més de fomentar la comunicació matemàtica, permet que tot l'alumnat s'atreveixi a participar, n'enforteix així l'autoconfiança i promou un ambient de motivació a l'aula alineat amb el que es proposa en el sentit socioemocional. L'exemple que tenim tot seguit ens serveix per treballar també el **saber #1.ESP.FG.B**.

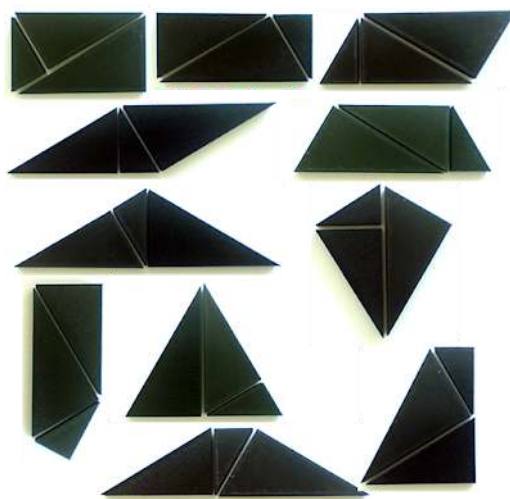


Font: [PuntMat](#)

Aquest exemple s'ha extret de la pàgina del [PuntMat](#), on a més d'exemples també podem trobar el resum de la presentació que el David Obrador i la Cecília Calvo van fer al C2EM 2016 analitzant aquest tipus d'activitats i la seva potencialitat. També podem trobar informació interessant sobre les Quelis a la campanya Dimensió web del [CREAMAT](#).

Una altra proposta per treballar el **saber #1.ESP.FG.B** i que connecta amb l'àrea de llengües i també amb l'entorn proper de l'alumnat és el projecte [Mirada matemàtica](#) de M. del Pilar Menoyo i que podem trobar a la campanya [Matemàtiques i projectes](#) del CREAMAT. La proposta relaciona la creació de microhistòries relacionades amb una fotografia, en format piulada de X (màxim 280 caràcters), que mostrin elements matemàtics. Es tracta d'utilitzar la imatge com a recurs i connectar el treball d'expressió escrita amb el treball de les idees matemàtiques que es poden veure a la fotografia. Es pot posar la condició a l'alumnat que els elements matemàtics de la fotografia siguin figures geomètriques i així se'n poden treballar les propietats i la classificació.

També per treballar el **saber #1.ESP.FG.B**, tenim el recurs de Joan Jareño [El Tangram mínim de Brügner](#). El Tangram mínim, inventat l'any 1984 pel matemàtic Georg Brügner, està format per només tres peces que són triangles rectangles semblants. Amb totes les peces del tangram xinès clàssic es poden construir només 13 polígons convexos, mentre que amb les tres úniques peces del Tangram mínim s'obté una quantitat que se li acostava molt. Aquest tangram pot ser un bon recurs per estudiar les propietats dels polígons.



Font: [El Tangram mínim de Brügner](#), de Joan Jareño

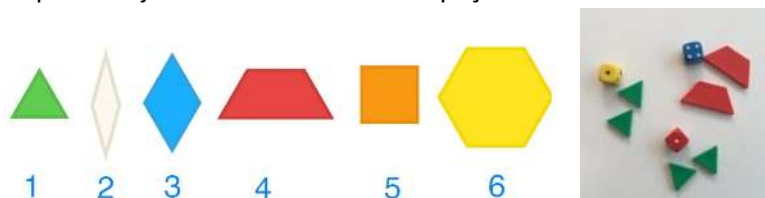
Els *pattern blocks* ens ofereixen moltes oportunitats per treballar el **saber #1.ESP.FG.B**. A la campanya Laboratori de matemàtiques del CREAMAT trobem com a proposta fer un [estudi complet de totes les peces](#):

Peça	Polígon	Perímetre	Angles	Polígon regular	Eixos de simetria	Gir invariant
	Triangle equilàter	3	3 de 60°	Sí	3	120°
	Quadrat	4	4 de 90°	Sí	4	90°
	Rombe (gran)	4	2 de 60° 2 de 120°	No	2	180°
	Rombe (petit)	4	2 de 30° 2 de 150°	No	2	180°
	Trapezi isòsceles	4	2 de 60° 2 de 120°	No	1	360°
	Hexàgon	6	6 de 120°	Sí	6	60°

Font: CREAMAT

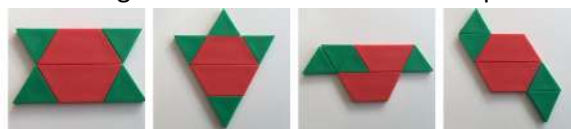
També hi trobem referenciat un joc molt interessant que podem consultar al [web d'ADEMGI](#) i que tracta de construir composicions simètriques a partir d'una proposta de *Pattern Block Lessons to Meet Common Core State Standards*, de The Math Learning Center.

Les explicacions i imatges següents són les que podem trobar al [web d'ADEMGI](#). Es necessita un dau i algunes peces de cada tipus. S'adjudica un número a cada peça:



Font: ADEMGi

Cada jugador tira el dau tres vegades i pren cada vegada dues peces iguals que es corresponguin al nombre obtingut. Així, cadascú tindrà sis peces, o millor encara, tres parelles de peces de *pattern blocks*. Amb les peces obtingudes s'ha de configurar damunt la taula una composició simètrica.



Font: ADEMGi

S'obté un punt:

- Per cada eix de simetria
- Per cada ordre de gir

Per comprovar els eixos de simetria és convenient tenir miralls. Posant el mirall damunt l'eix, la figura reflectida ha de coincidir amb l'original. Per comprovar l'ordre de gir és pràctic treballar damunt un full de paper, de manera que puguem girar el full una volta sencera damunt la taula. Cada vegada que, durant el gir, la figura coincideix amb l'original, tindrem un punt més.

Així, la primera figura obtindria 4 punts: té dos eixos de simetria (horitzontal i vertical) i una simetria de gir d'ordre 2. En canvi, les figures 2 i 3 només tenen un eix de simetria (vertical en els dos casos) i la quarta figura té un gir d'ordre 2, però no té cap eix de simetria.

Però podríem aconseguir 6 punts amb aquesta figura, que té tres eixos de simetria i ordre de gir 3:



Font: ADEMGi

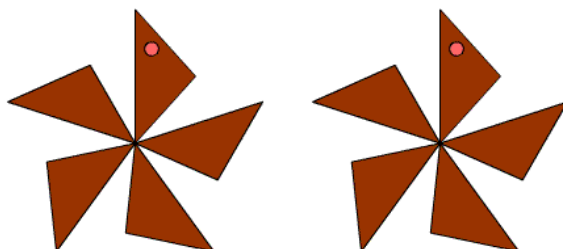
Es juga a tres rondes. Al cap de les tres rondes, guanya el jugador que ha obtingut més punts.

A la campanya del CREAMAT Mates *take away*, hi ha la proposta [Classifiquem logos i tapaboques de cotxes](#) per treballar el **saber #1.ESP.FG.B**. La proposta presenta els Grups de Leonardo, que ens serveixen per classificar figures segons la quantitat de girs invariants i els eixos de simetria que presenten. La proposta és interessant perquè porta l'alumnat a observar l'entorn amb una mirada matemàtica, ja que el fa cercar invariàncies per simetria o gir en logotips i tapaboques (encara que també es pot aplicar a rajoles, rosasses...).

Com a ampliació, es pot demanar a l'alumnat que busqui el motiu mínim de cada logotip o tapaboques, és a dir, el tros més petit de la figura que, per reproducció (fent simetries, girs o combinant-los tots dos), permet

reconstruir la figura sencera.

Una versió completa d'aquesta proposta es pot trobar al blog de Joan Jareño sota el nom [Lletres, logos, rosasses, rajoles...](#).



Font: [Lletres, logos, rosasses, rajoles...](#), de Joan Jareño

Una altra activitat per treballar el **saber #1.ESP.FG.B**, així com altres sabers del bloc del sentit espacial de 1r d'ESO, és la de l'NRICH [Sempre, de vegades o mai](#). Es donen unes targetes on hi ha una afirmació (per exemple: «els triangles tenen un eix de simetria») i l'alumnat ha de discutir si el que hi ha escrit a la targeta passa sempre, només de vegades o mai, donant arguments i buscant contraexemples, si fa falta. Sovint fem afirmacions matemàtiques que només són certes en determinats contextos i és important que l'alumnat sigui capaç de llegir i entendre de manera crítica les afirmacions. Podeu trobar l'activitat traduïda al català a l'[enllaç](#).

Ja per acabar aquest bloc, comentem un projecte que combina l'estudi de propietats com ara la simetria (**saber #1.ESP.FG.B**) i la mesura: [Matemàtiques al monestir de Poblet](#), de Josep Lluís Cañadilla i que es pot trobar a l'ARC. Aquesta activitat pot servir com a model per contextualitzar qualsevol sortida i fer que l'alumnat focalitzi la mirada matemàtica, alhora que es poden reforçar i aprofundir els sabers que s'estan treballant a classe.



Font: [Matemàtiques al monestir de Poblet](#), de Josep Lluís Cañadilla

El projecte de Poblet està format per un conjunt de 18 activitats en el context històric de l'edat mitjana i del monestir de Poblet. El conjunt està dividit en dues parts. La primera, són unes activitats per fer a classe, preparatòries de la sortida al monestir, i la segona part és el treball de camp que es fa durant la visita. A part de la simetria i de les figures geomètriques, també es treballen números romans, orientació, escales, unitats de mesura de longitud i de temps, etc.

Per treballar el **saber #1.ESP.FG.C**, pot resultar interessant construir figures geomètriques en el context de la Grècia antiga. Una activitat relacionada amb aquest saber i que es pot trobar explicada al document [Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria](#) (Aubanell, 2015) és «Euclid: The Game», una mena de joc creat per Kasper Peulen sobre la versió de GeoGebra en línia, que consisteix en el plantejament successiu de construccions gràfiques amb regle i compàs. S'inicia l'aventura amb un menú d'eines molt petit i cal anar passant nivells, fent les construccions que es proposen. Cada vegada que es fa una construcció el

programa entén que ja se sap fer i l'afegeix com una nova eina en el menú, de manera que es podrà emprar per fer construccions posteriors. Així, de mica en mica, es va construint la geometria euclidiana. Tot un poema geomètric que es troba en aquest [enllaç](#).

Una activitat que ens permet treballar els **sabers #1.ESP.FG.C** i **#1.ESP.FG.D** és l'activitat de l'ARC de Jordi Payró [Construïm i classifiquem triangles](#). Aquí, i amb ajuda de material, l'alumnat podrà arribar a la conclusió que, donats tres costats, no sempre es pot construir un triangle. També treballarà la classificació dels triangles segons els seus costats i segons els seus angles, per concloure que no es poden construir tots els triangles tenint en compte les dues característiques alhora. Finalment, l'alumnat aprèn a construir triangles amb regla i compàs.

Hi ha moltes activitats interessants per treballar el **saber #1.ESP.FG.D**. A la campanya Geometria del CREAMAT s'hi troba l'activitat [Construïm triangles amb llumins](#), amb la idea de descobrir, com amb la proposta anterior, quan es pot construir un triangle. Però l'activitat va molt més enllà, es pot estirar i fer un treball de patrons amb molta profunditat. L'activitat proposa investigar quants triangles es poden fer en el pla amb sis, set, vuit, nou, deu... llumins, també proposa cercar la «norma» per saber numèricament, sense construir-lo, si un triangle es pot fer i, ja per acabar, proposa buscar una regla per endevinar quants triangles es poden fer sense haver-los de construir.

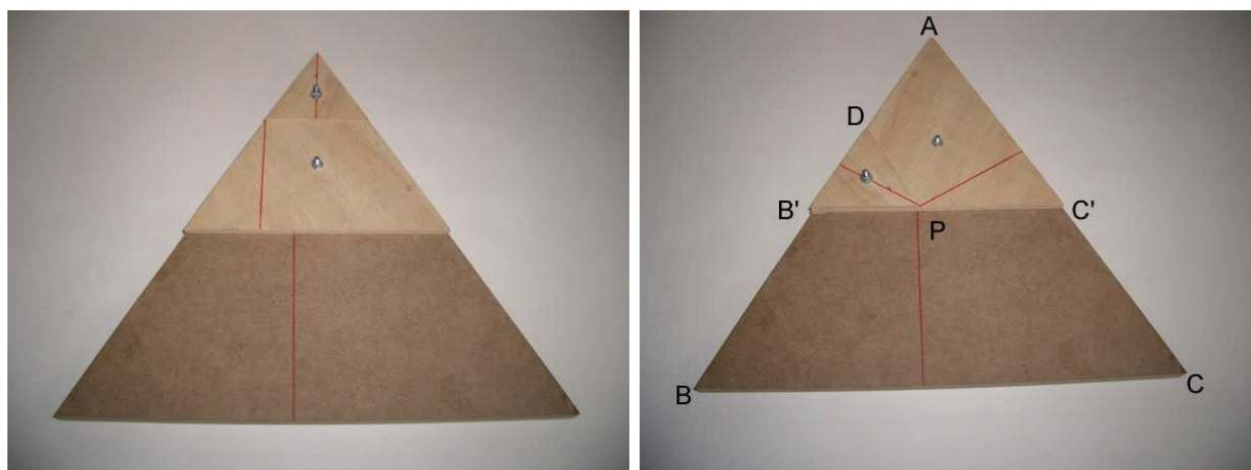
Per treballar el **saber #1.ESP.FG.D**, a l'ARC podem trobar, per exemple, [Descobrim els punts notables plegant els triangles](#), d'Enric Brasó, una activitat manipulativa que té com a objectiu entendre els conceptes de bisectriu, mediatriu, altura, mediana, incentre, circumcentre, ortocentre i baricentre d'un triangle. Es poden trobar vídeos explicatius a l'[enllaç](#) següent.

També per treballar el **saber #1.ESP.FG.D**, si cal reforçar el concepte de mediatriu, podem fer una activitat de joc de rol. Es demana a tot l'alumnat que se situï en una posició elevada, per exemple, a dalt d'unes escales o a les finestres que donen al pati. Tot seguit, es demana que un grup d'uns vuit alumnes vagi al pati o al passadís; és important que la resta d'alumnat que és a la posició elevada pugui veure bé el que passarà. El professorat demana a dos dels vuit alumnes que són a baix que se separin, els anomenarem alumne A i alumne B. A un tercer alumne, se li demana que se situï en un lloc que estigui a la mateixa distància dels alumnes A i B. Tot seguit, a un quart alumne li demanem el mateix i així successivament a tots els alumnes que hi ha a baix. Llavors es pregunta a l'alumnat que està a la posició elevada què observa. De seguida diuen que tots els alumnes estan alineats, és un bon moment per definir aquesta recta, la mediatriu. Tot seguit es pot fer una foto de la situació per posteriorment projectar-la a classe i acabar de definir i treballar el concepte de mediatriu. També es pot demanar a l'alumnat que faci una petita explicació per escrit de les seves descobertes.



Font: Núria Guitart

També a l'ARC, hi ha el [Teorema de Viviani](#), d'Anton Aubanell, que tracta el **saber #1.ESP.FG.D**, una proposta que sempre engresca i sorprèn l'alumnat i a través de la qual es treballen diversos conceptes de figures geomètriques al pla, demostracions visuals i raonament geomètric. Podem trobar una descripció molt detallada de com portar l'activitat a classe a l'article del número 35 de *Noubiaix* [Visitem un edifici construït o vivim l'experiència de construir-lo?](#), també d'Anton Aubanell (2014). El professor Manel Martínez té una [construcció feta amb el GeoGebra](#) per treballar-lo.



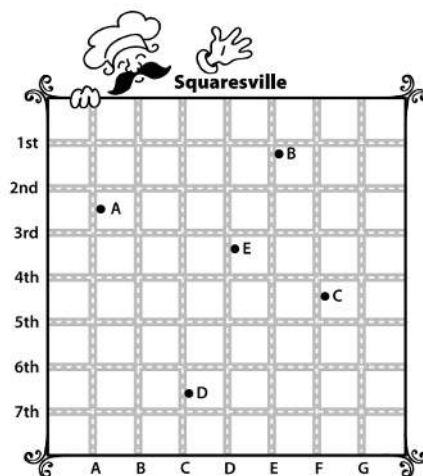
Font: "[Teorema de Viviani](#)", d'Anton Aubanell

Una altra proposta per treballar el **saber #1.ESP.FG.D** fa referència a la suma dels angles interiors dels triangles. L'autor és Manel Martínez i el títol, [Quant sumen els angles d'un triangle?](#). En aquesta, l'alumnat descobreix que la suma dels angles interiors d'un triangle és de 180° , cosa que posteriorment permetrà calcular la suma dels angles interiors de qualsevol polígon, triangulant. És interessant per la manera com el professor la porta a terme a l'aula: cada estudiant treballa amb el seu propi triangle seguint les indicacions del professor/a, però al final s'exposen tots els de la classe i s'aconsegueix una gran varietat de triangles, però tots complint la mateixa propietat. Un bon exemple d'activitat de descoberta i conceptualització.



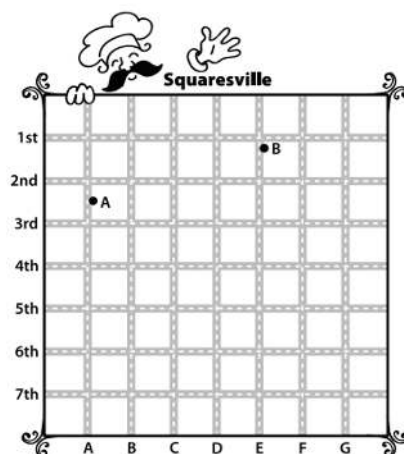
Font: [Quant sumen els angles d'un triangle?](#), de Manel Martínez

I, ja per acabar amb les propostes, per treballar el **saber #1.ESP.FG.D** parlarem de «La pizzeria més propera», inspirada en l'activitat de l'NCTM anomenada «Dividint una ciutat en regions de repartiment de pizzes», que serveix per introduir els diagrames de Voronoi. Es planteja la situació següent a l'alumnat. S'han d'imaginar que són els propietaris de cinc pizzeries a la ciutat de Squaresville. Per garantir uns terminis mínims de lliurament, s'ha ideat un sistema en què els clients truquen a una central i després la comanda es transfereix a la pizzeria més propera al seu domicili. Aquí hi ha el mapa de Squaresville amb les cinc pizzeries. S'ha de dividir la ciutat en cinc regions, perquè als clients els portin la pizza des de la pizzeria més propera.



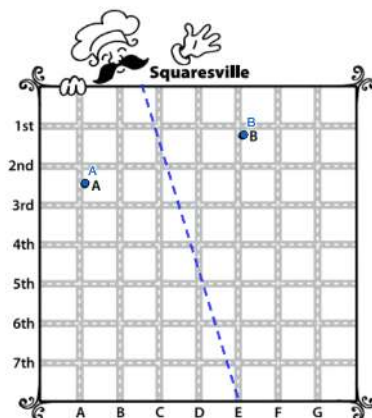
Font: NCTM

Es pot fer una primera posada en comú en gran grup de possibles idees per abordar el problema. El professorat pot aportar la idea que, de vegades, per resoldre un problema complicat, pot ajudar a començar amb una versió més senzilla. Així que es començarà atacant el problema amb només dues pizzeries.



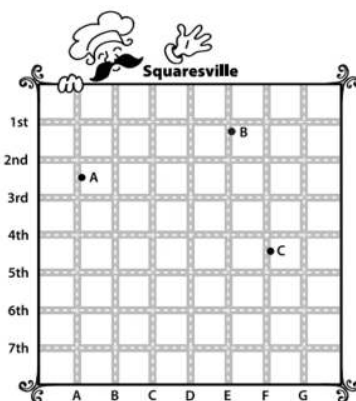
Font: NCTM

Podem fer aquesta pregunta a l'alumnat: les dues regions compartiran una frontera. Què tindran d'especial els punts d'aquesta frontera? Estaran a la mateixa distància de les dues pizzeries, és a dir, formen la mediatriu. Tot seguit l'alumnat, amb el GeoGebra, construirà la mediatriu. Se'ls pot facilitar un [full ja preparat](#).



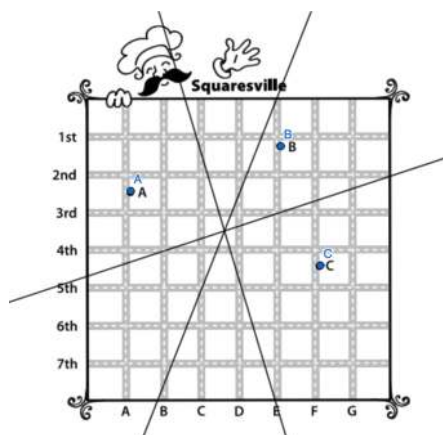
Font: Núria Serra

Amb dues pizzeries s'ha construït la mediatriu entre A i B per dividir la ciutat. Com es pot dividir la ciutat entre B i C? A i C?



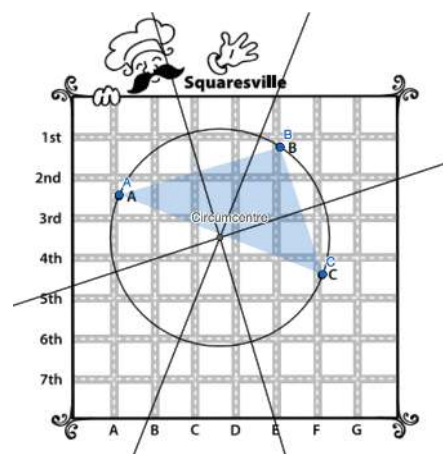
Font: NCTM

La idea és que l'alumnat vegi que s'han de fer tres mediatrises. Aquestes mediatrises es tallen en un punt, com es diu aquest punt?



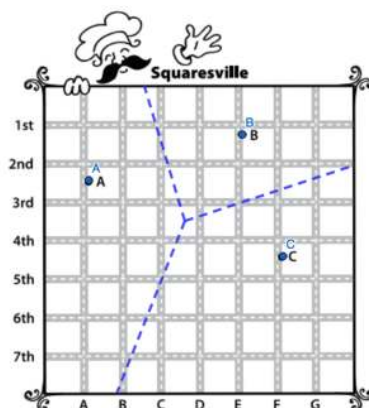
Font: Núria Serra

És un bon moment per treballar o recordar què és el circumcentre d'un triangle, el punt que equidista de cada vèrtex, és a dir, és el centre de la circumferència inscrita al triangle.



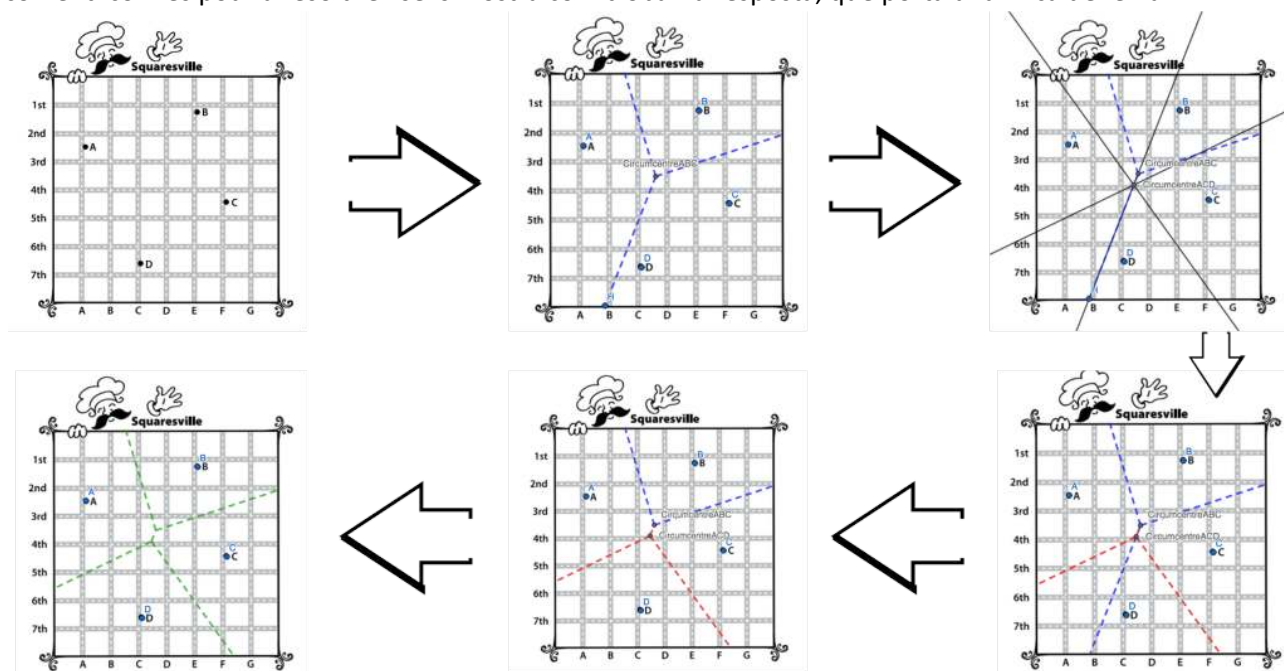
Font: Núria Serra

Es poden anar projectant les imatges anteriors mentre va avançant la classe per acompanyar les explicacions. Ara és el moment que l'alumnat faci la construcció amb tres pizzeríes, per exemple sobre aquest [full de treball](#). Els preguntem si han d'utilitzar tota la mediatriu per a cadascuna d'aquestes regions o només fem servir una semirecta per tal que quedin les regions ben clares a la construcció. El resultat ha de ser similar al següent:



Font: Núria Serra

I si ara es treballa amb quatre pizzereries? El problema es complica. Deixem uns minuts perquè l'alumnat comentis com es podria resoldre i se'ls mostra com trobar la resposta, que porta una mica de feina:



Font: Núria Serra

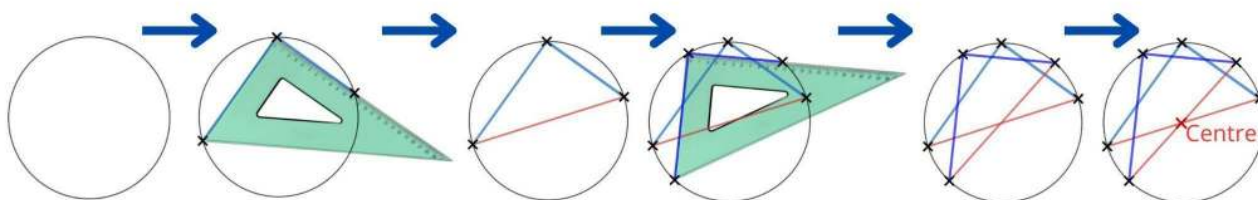
Lavors, se'ls explica que el GeoGebra té un comandament que fa aquesta feina, el comandament Voronoi, i se'ls convida a trobar la solució amb aquest [full de treball](#).

Acabem de descobrir què són els diagrames de Voronoi. A partir d'aquí, es poden veure diferents aplicacions d'aquests diagrames.

Per treballar el **saber #1.ESP.FG.E**, proposem l'activitat de l'NRICH anomenada [El joc dels quadrilàters](#). A través del joc, l'alumnat treballa les propietats dels quadrilàters. Aquest és un joc per a dos o més jugadors on fan falta unes cartes que es poden imprimir directament del web de l'activitat. Després de barrejar bé les cartes, se'n reparteixen vuit a cada jugador (de cara avall) i la resta es col·loquen en una pila al mig de la taula, també de cara avall. Es gira la carta superior de la pila. Cada jugador ha d'observar molt bé les vuit cartes que li han tocat. L'objectiu és aconseguir fer dos grups de quatre cartes, on a cada grup hi ha d'haver una imatge d'una figura, un nom que la descriu i dues propietats de la figura. Per exemple, un grup pot consistir en una imatge d'un estel, la paraula estel i després dues propietats d'un estel. Però també podríem tenir un grup format per una imatge d'un estel, la paraula quadrilàter i després dues propietats d'un estel. Es juga per torns. A cada jugada, un jugador pot agafar la carta superior de la pila o la carta que hi ha tot seguit a la pila (que estarà de cara avall). Aleshores, el jugador pot decidir quina de les nou cartes descartarà i la posarà a la part superior de la pila (de cara amunt). A continuació, passa el torn al jugador següent. El joc s'acaba quan algú té dos grups complets. Podeu trobar les cartes del joc traduïdes al català a l'[enllaç](#).

A la campanya [Geometria](#) del CREAMAT trobem la proposta [Fem volar estels](#), també per treballar el **saber #1.ESP.FG.E**. Tal com s'explica a la descripció de la proposta, la classificació de quadrilàters acostuma a ser complexa perquè normalment es barregen criteris de paral·lisme i comparació de longituds de costats. Així, es poden donar situacions en què es veu el quadrat com un rombe o el rectangle com un romboide determinat, per exemple. Molts cops, als quadrilàters que no presenten cap paral·lisme se'ls qualifica de trapezoides, però no es va més enllà. Aquesta proposta permet trobar altres vies de classificació ben interessants. La proposta estudia els deltoides, polígons que tenen els costats iguals dos a dos, però en què, a diferència de rectangles i romboides, els costats iguals concorren en un mateix vèrtex.

Ja gairebé per acabar el bloc de formes geomètriques, proposem treballar el **saber #1.ESP.FG.F** a través dels programes de geometria dinàmica. En concret, podem trobar moltes construccions fetes amb GeoGebra per treballar aquest saber. Per exemple, podem treballar els elements de la circumferència a través d'aquesta construcció de Bernat Ancochea i Isabel Sorigué: [Elements d'una circumferència](#). També es pot fer un treball a fons a partir d'una imatge, com en la proposta [Buscant geometria en una imatge](#), on tot el treball es fa a partir d'una imatge d'una rosassa del Museu de l'Aquitania a Bordeus (França). Aquests programes també ens poden ajudar a descobrir relacions entre alguns elements de la circumferència, com en la proposta de Manel Martínez [Angles en la circumferència](#), on s'estudia quina relació hi ha entre l'angle inscrit a una circumferència, l'angle central i es pregunta en quins casos es pot assegurar que l'angle inscrit serà de 90° . Tot seguit, per aplicar el que s'ha treballat amb el programa de geometria dinàmica, es podria proposar l'activitat següent a l'alumnat: amb només un escaire o cartabó i un llapis, com podem trobar el centre d'una circumferència? La solució consistiria a situar l'escaire o el cartabó amb el vèrtex de l'angle recte a sobre de la circumferència i dibuixar les dues cordes situades sobre els costats de l'instrument de mesura (línies blaves). Com que l'angle inscrit és de 90° , l'angle central serà de 180° , es dibuixa la corda vermella i es pot assegurar que es tracta d'un diàmetre. Es repeteix el procediment, posant el vèrtex de l'escaire a un altre punt de la circumferència i s'obté un segon diàmetre. El punt de tall dels dos diàmetres serà el centre de la circumferència.



Font: elaboració pròpia

I per acabar amb el treball del **saber #1.ESP.FG.F**, fem un esment a la descoberta del nombre pi. Es pot aprofitar l'efemèride del Dia Internacional de les Matemàtiques o Dia Pi, el 14 de març, per fer-la, o qualsevol altre moment del curs. La proposta és d'Anton Aubanell, s'anomena [Descobrim pi](#) i la trobem a l'ARC. A l'activitat cada parella d'alumnes portarà un objecte cilíndric rígid i tan gran com pugui (una cassola, un pot, una caixa d'ensaimades...). També disposaran d'un tros llarg de cordill fi, d'unes tisores i d'una cinta mètrica. Fent servir aquest material, cada parella obtindrà una aproximació del nombre pi.

Visualització i modelització geomètrica

Sabers

- Interpretació d'una multiplicació com l'àrea d'un rectangle: ús del model de caixa per a operacions amb nombres. **[ESS]** **#NUM.SO**
- Interpretació d'elevat al quadrat com l'àrea d'un quadrat. **#NUM.SO**
- Interpretació d'elevat al cub com el volum d'un cub. **#NUM.SO**
- Interpretació de l'arrel quadrada com la cerca del costat d'un quadrat amb l'àrea donada. **#NUM.SO**
- Interpretació de l'arrel cúbica com la cerca del costat d'un cub amb volum donat. **#NUM.SO**
- Visualització de la multiplicació de fraccions com un rectangle amb base i altura que són fraccions de la base i l'altura d'un rectangle inicial més gran. **#NUM.SO**
- Ús de models geomètrics per explicar relacions aritmètiques de nombres naturals. **#NUM.SO**
- Reconeixement de connexions entre el sentit espacial, la resta de sentits i altres àrees de coneixement properes a l'alumnat. **[ESS]**

Descripció i orientacions

Reflexions inicials

Ja s'ha comentat anteriorment la importància de la geometria en el conjunt del quefer matemàtic, no només pel fet de desenvolupar les habilitats pròpies del sentit espacial, sinó també com a eina que ajuda a la comprensió de sabers d'altres sentits. Les operacions, algunes propietats aritmètiques o sabers abstractes com l'àlgebra esdevenen molt més propers a l'alumnat a través de models geomètrics que els donen sentit i que molts cops serveixen com a «mostracions» (no es poden considerar demostracions, però afavoreixen la comprensió i, per tant, la incorporació d'aquell saber al bagatge propi).

L'ús de models geomètrics té un altre gran avantatge: facilita l'entrada a l'activitat a tot l'alumnat. L'ús de material manipulatiu o d'eines digitals per visualitzar un model fa que l'activitat sigui abordable per tots els estudiants i, en conseqüència, és un agent important per vèncer la por d'atacar un problema i l'ansietat matemàtica en general; per tant, es treballa així el sentit socioemocional.

En aquest bloc es mostren algunes de les visualitzacions d'objectes matemàtics més rellevants, però cal tenir en compte que la geometria pot ser una eina que ajudi a la comprensió de molts altres conceptes o propietats matemàtiques. Es deixa a criteri del professorat (i se l'anima a fer-ho!) el fet de “geometritzar” altres sabers.

Comentaris sobre les connexions

Les connexions amb altres blocs de sabers són, per tant, evidents. A primer curs, en què pren molta importància la part de numeració, destaquem moltes relacions amb el sentit numèric. A mesura que l'àlgebra va prenent força en els cursos següents, trobarem exemples de models geomètrics connectats amb el sentit algebraic i amb els altres sentits.

Comentaris sobre els sabers essencials i d'ampliació

Es considera essencial que el docent tingui una mirada «geometritzadora», que convidi l'alumnat a posar-se les ulleres geomètriques tot sovint (**saber #1.ESP.VM.H**). D'aquesta manera es faran evidents les connexions amb altres parts de les matemàtiques o, fins i tot, amb altres matèries, alhora que es facilita a l'alumnat la comprensió i integració dels sabers.

De tots els altres sabers es destaca el **saber #1.ESP.VM.A**, on es proposa l'ús de model de caixa com a interpretació d'una multiplicació. Dos casos particulars d'aquest saber són el **saber #1.ESP.VM.F**, que fa referència a multiplicació de fraccions, i el **saber #1.ESP.VM.B**, que fa referència a elevar al quadrat. Aquest últim saber permet un salt de dimensió i passar al cub (**saber #1.ESP.VM.C**).

Observacions sobre alguns sabers específics

Pel que fa a les operacions aritmètiques, se'n destaquen dues que, de fet, són la mateixa: la multiplicació amb el model de caixa. És un model que previsiblement l'alumnat haurà conegut durant l'educació primària, i que facilita molt la comprensió de l'algorisme. En aquest cas es proposa recordar el model de caixa per multiplicar nombres naturals (**saber #1.ESP.VM.A**) i introduir, si no s'ha vist abans, el mateix model per multiplicar nombres racionals (**saber #1.ESP.VM.F**).

Pel que fa al **saber #1.ESP.VM.G**, hi ha moltes relacions numèriques que es poden visualitzar a partir d'una modelització geomètrica. L'ús de cubets encaixables sol anar molt bé per treballar propietats sobre nombres parells o senars, que passen a ser evidents a simple vista, com per exemple el fet que la suma de dos nombres senars és un nombre parell:



Font: elaboració pròpia

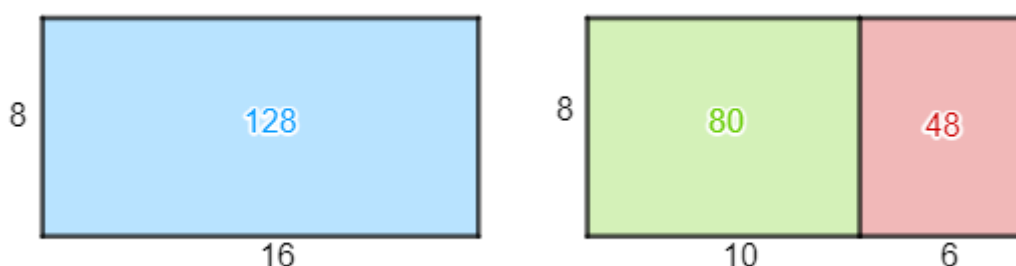
Recursos i activitats

Recursos i activitats generals per al bloc de sabers

Encara que ja s'hagi citat anteriorment, val la pena tornar a recordar el document [Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria](#) (Aubanell, 2015). Hi trobem exemples de l'ús de models geomètrics per explicar relacions aritmètiques, per visualitzar idees i propietats aritmètiques amb reglets numèrics i exemples de visualització en problemes de fraccions, entre d'altres.

Recursos i activitats per treballar sabers concrets

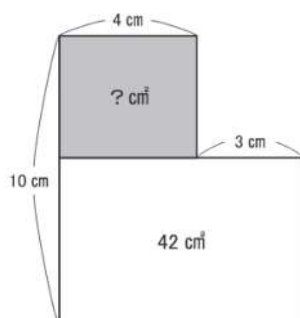
El model rectangular o de caixa per a la multiplicació (**saber #1.ESP.VM.A**) és molt útil per entendre algunes propietats, com la distributiva del producte respecte de la suma o la inversa de treure factor comú. L'operació de multiplicar 16 per 8, per exemple, es pot veure d'aquesta manera:



Font: elaboració pròpia

Aquesta visió permet descompondre fàcilment el nombre 16 com a $10 + 6$, de manera que $16 \cdot 8 = (10 + 6) \cdot 8 = 10 \cdot 8 + 6 \cdot 8 = 80 + 48 = 128$. Una altra possibilitat seria anar fins al 20 i restar-li 4, amb la qual cosa tindríem $16 \cdot 8 = (20 - 4) \cdot 8 = 20 \cdot 8 - 4 \cdot 8 = 160 - 32 = 128$. Tot això facilita el càlcul mental, però també fa que aparegui de manera natural la propietat distributiva i se li doni sentit automàticament, sense necessitat de cap justificació addicional. A més, aquest model tornarà a ser important més endavant quan, aplicat als objectes algebraics, permetrà resoldre equacions fent servir materials.

Un altre recurs per treballar el **saber #1.ESP.VM.A** són els *menseki meiro* (laberints d'àrees o *area mazes*), uns trencaclosques formats per rectangles que s'han de resoldre a partir de raonaments lògics i enginy. Un exemple podria ser el de la imatge.



Font: [Rompecabezas japoneses: Menseki Meiro](#), d'Antonio Omatos

Com es pot observar, la mateixa imatge ja conté les dades i la pregunta. El camí per respondre-la no té per què ser únic, però la resposta és tancada. En aquest cas, per exemple, es pot seguir aquest raonament: la base del rectangle blanc és $4 + 3 = 7$ cm, per la qual cosa l'altura ha de ser de 6 cm (donat que la superfície és de 42 cm^2). Per tant, l'altura del rectangle gris ha de ser $10 - 6 = 4$ cm i, llavors, l'àrea que busquem és de $4 \cdot 4 = 16 \text{ cm}^2$.

Observem que la figura grisa ha resultat ser un quadrat, però no podíem haver pressuposat aquest fet a partir de la imatge. És només en arribar al resultat final que ho hem pogut constatar numèricament.

Podem trobar múltiples trencaclosques a l'article [Rompecabezas japoneses: Menseki Meiro](#), d'Antonio Omatos, o en llibres com *The Original Area Mazes, 100 addictive puzzles to solve with simple math-and clever logic!* (Inaba & Murakami, 2017), classificats en cinc nivells de dificultat.

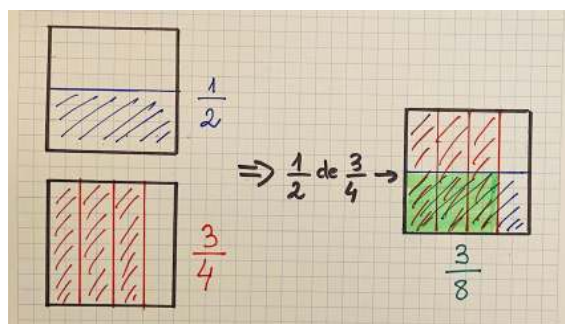
Es poden treballar els **sabers** [#1.ESP.VM.B](#) i [#1.ESP.VM.C](#) quan s'introdueix el treball de potències. Per la relació amb l'àrea i el volum de les figures geomètriques, les potències d'exponent 2 i d'exponent 3 reben noms especials: les potències d'exponent 2 s'anomenen quadrats i les d'exponent 3 s'anomenen cubs. Podem introduir-ho de manera senzilla, amb una seqüència de preguntes com, per exemple: si un quadrat té 2 quadradets per costat, quants quadradets conté aquest quadrat? El nombre de quadradets que hi caben és $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$. L'àrea d'aquest quadrat és de 4 unitats. I si té 3 quadradets per costat? Quants quadradets conté aquest quadrat? El nombre de quadradets que hi caben és $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$. L'àrea d'aquest quadrat és de 9 unitats. Podem continuar amb altres nombres.

De manera similar, podem treballar el cub. De quants cubets està compost el cub gran si hi ha 3 cubets al llarg, 3 a l'ample i 3 a l'alt del cub gran? El nombre de cubets és $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$. El volum d'aquest cub és 27 unitats. Podem ajudar-nos de policubs i gràfics a la pissarra.

Per treballar els **sabers** [#1.ESP.VM.A](#), [#1.ESP.VM.B](#) i [#1.ESP.VM.D](#), els programes de geometria dinàmica ens poden ser d'ajuda. Per exemple, podem proposar a l'alumnat una activitat en què, donat un punt A, construeixi un quadrat d'àrea 36, de manera que aquest punt sigui un dels vèrtexs del quadrat i en mesuri la longitud del costat. Tot seguit, es pot plantejar que, donat el mateix punt A, es construeixin tots els rectangles possibles amb àrea 36.

També per treballar el **saber** [#1.ESP.VM.D](#), tenim l'activitat de l'edu365 de Sílvia Margelí sobre les arrels quadrades anomenada [Arrel quadrada d'un nombre](#) on, d'una manera molt visual, s'explica que buscar l'arrel quadrada d'un nombre vol dir posar aquest nombre en forma de quadrat i veure quant mesura el seu costat.

Tot i que és possible que ja s'hagi treballat la multiplicació de fraccions a primària, val la pena tenir en compte el **saber** [#1.ESP.VM.F](#) mostrant alguns exemples senzills per potenciar la idea de fons i ajudar a la comprensió del concepte.



Font: elaboració pròpia

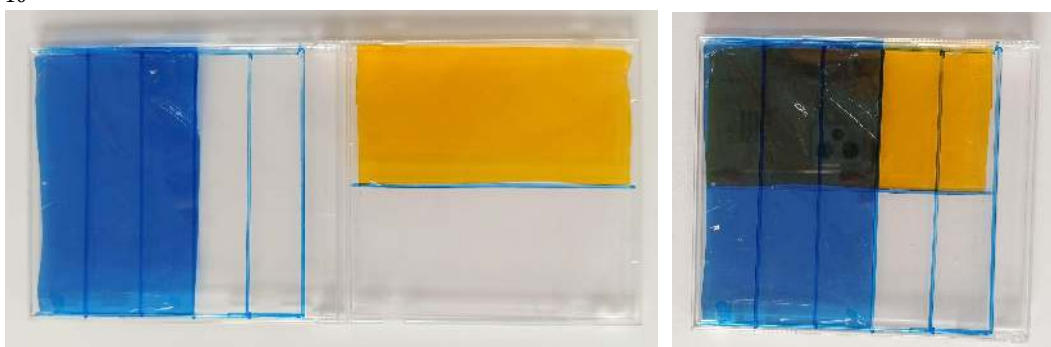
Una forma molt visual de presentar-ho a classe és fer servir tapes transparents (de CD, per exemple) i paper de cel·lofana. Per exemple:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$



Font: Anna Ausina

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$



Font: Anna Ausina

Hi ha un recurs per treballar aquest saber al web del Polypad, es tracta de [Fraction Multiplication](#). Hi trobem vídeos explicatius molt interessants de com treballar la multiplicació de fraccions a partir del model de barres de Freudenthal.

L'ús de models geomètrics a través de dibuixos o materials manipulatius o digitals permet visualitzar propietats numèriques que, d'altra manera, es farien difícils d'entendre i utilitzar en aquest nivell. Per treballar el **saber #1.ESP.VM.G**, a tall d'exemple, es pot fer veure a l'alumnat que la suma consecutiva de nombres senars és un quadrat perfecte a partir de l'ús de políedres de colors per simbolitzar els diferents nombres que, convenientment disposats, formen un quadrat. Aquesta activitat reforça, un altre cop, el **saber #1.ESP.VM.B**, per tant, és important haver-lo vist amb anterioritat per tal que el descobriment tingui sentit per a l'alumnat.



Font: elaboració pròpia

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$

Per treballar el **saber #1.ESP.VM.H**, reconeixement de connexions entre el sentit espacial, la resta de sentits i altres àrees de coneixement properes a l'alumnat, el professorat ha de plantejar situacions i activitats en què aquest reconeixement sigui possible. Tal com s'exposa a l'apartat «Blocs de competències», dins el punt de connexions amb altres matèries i amb l'entorn, vivim en un món geomètric i, a través de les propostes que presentem a l'alumnat de 1r d'ESO tant des del sentit espacial com des del sentit de la mesura, és bàsic posar en relleu aquesta idea. Tant a l'art com a la natura hi apareixen figures geomètriques i les seves relacions i propietats i, a través de la geometria, podem descriure els patrons i simetries que s'hi observen. La geometria no és quelcom aïllat de la nostra realitat i entorn, no tracta elements abstractes i fórmules que no ens interpel·len directament, al contrari, és una eina poderosa que ens permet prendre decisions, interpretar el món i també meravellar-nos de la seva bellesa. Com a professorat, hem de donar oportunitats a l'alumnat per aplicar i ampliar les destreses de raonament geomètric i també per veure que les idees geomètriques estan presents en altres disciplines, a part de les matemàtiques. Així, el treball del sentit espacial a 1r d'ESO pot connectar amb gairebé totes les matèries: amb les llengües, quan demanem que posin per escrit els seus raonaments o facin un informe d'una investigació; amb les ciències socials tenim la Grècia antiga com a punt per establir fortes connexions a través de la geometria euclidiana; a tecnologia, qualsevol construcció, maqueta o disseny d'espais porta implícit el treball geomètric; les ciències de la naturalesa ens permeten treballar les formes que hi ha a la natura i en els mateixos éssers vius; la matèria d'educació física ens posa a l'abast objectes geomètrics, així com espais interessants on poder fer molta geometria, i és evident la connexió amb educació visual i plàstica, des de fer construccions de geometria euclidiana a estudiar formes de determinats objectes o analitzar d'obres d'art. Queda clar, per tant, el paper rellevant que pot arribar a tenir el sentit espacial dins els projectes STEAM.

Blocs de competències: processos matemàtics i gestió socioemocional

El conjunt de sabers que constitueixen el sentit espacial, com tots els altres sentits, s'han de relacionar amb el conjunt de competències del currículum. Sense un coneixement dels sabers, difícilment es poden desenvolupar els processos per avançar en l'assoliment de les competències i, d'altra banda, la manera com s'introdueixen, es construeixen i s'utilitzen els sabers és clau per dur a terme un treball competencial.

Així doncs, tots els sabers poden contribuir a desenvolupar qualsevol competència si es treballen en activitats adequades. Igualment, un saber pot contribuir a desenvolupar diverses competències.

Es presenta la relació entre els sentits i les competències específiques a través dels processos: resolució de problemes (competències específiques CE 1 i CE 2); raonament i prova (competències específiques CE 3 i CE 4); connexions, on distingim les internes (competència específica CE 5) i les externes (competència específica CE 6); comunicació i representació (competència específica CE 7), i gestió socioemocional (competències específiques CE 8 i CE 9).

Aquesta relació, pel que fa al sentit espacial, es concreta, en el marc d'aquest exemple, de la manera que es descriu en els apartats següents, tot i que poden existir altres anàlisis igualment vàlides.

Resolució de problemes (CE 1 i CE 2)

El treball dels sabers del sentit espacial a 1r d'ESO propicia que l'alumnat investigui dibuixant, visualitzant, transformant, comparant i classificant objectes geomètrics. Si escollim bons problemes, podem aconseguir que l'alumnat compregui a fons les idees geomètriques més rellevants del curs.

El raonament espacial proporciona l'escenari per treballar problemes molt diversos i posar en joc un gran nombre d'heurístiques de resolució diferents: començar per casos més senzills, cercar patrons, organitzar la informació en una taula o amb un diagrama, començar pel final... L'alumnat de 1r d'ESO necessita aprendre com fer servir aquestes heurístiques de manera eficaç i és el professorat el que ha de brindar oportunitats

perquè això passi proposant problemes diversos que necessitin estratègies diverses.

Sabers

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar la resolució de problemes són, entre altres:

- El **saber #1.ESP.FG.B**, que permet plantejar situacions a l'aula en què l'anàlisi i l'aplicació de les propietats dels polígons és clau en la seva resolució i, per tant, contribueix al desenvolupament de la CE 1 i la CE 2. El treball de la simetria i la invariància ens permet proposar situacions i reptes sobre pensament exhaustiu, entre molts altres.
- El **saber #1.ESP.FG.D**, que porta a treballar la classificació i les propietats dels triangles, i això permet plantejar reptes sobre triangles i, per tant, desenvolupar el treball de la CE 1 i la CE 2.
- De manera similar al cas anterior, però ara amb quadrilàters en lloc de triangles, el **saber #1.ESP.FG.E**, que és essencial, contribueix al desenvolupament de la CE 1 i la CE 2.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers fan referència directa al procés de resolució de problemes. Per exemple:

- L'activitat «Construïm triangles amb llumins» (**saber #1.ESP.FG.D**) ens proporciona un context idoni per investigar i, per tant, treballar tant la CE 1 com la CE 2.
- Als problemes de la Prova Cangur hi trobem múltiples propostes per treballar diferents **sabers** del bloc **#1.ESP.FG** a través de la resolució de problemes, que contribueixen, per tant, al desenvolupament de la CE 1 i la CE 2.
- El recurs «Menseki Meiro» (**saber #1.ESP.VM.A**) permet treballar trencaclosques formats per rectangles que s'han de resoldre, entre altres coses, amb enginy i, per tant, contribueix a desenvolupar la CE 1 i la CE 2.

Raonament i prova (CE 3 i CE 4)

És evident que el treball del sentit espacial proporciona un context excel·lent per treballar el raonament matemàtic. L'alumnat de 1r d'ESO pot formular arguments matemàtics fent servir tant el raonament inductiu com el deductiu. L'estudi i classificació dels objectes geomètrics permet proposar activitats de cerca de patrons i detecció de regularitats, formular conjectures i generalitzacions sobre el que s'ha observat, validar les conjectures i construir arguments matemàtics.

La classificació i ordenació com una forma d'abstracció és un dels sabers que es poden treballar del pensament computacional i, des del sentit espacial, trobem nombroses oportunitats per fer-ho. A més a més, el treball amb programes de geometria dinàmica també pot contribuir a desenvolupar-lo.

Sabers

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar el raonament són, entre altres:

- El **saber #1.ESP.FG.B**, que implica l'estudi i classificació de polígons en general i, per tant, afavoreix el treball de la CE 3 i la CE 4.
- El **saber #1.ESP.FG.C**, que, acompanyat del treball amb programes de geometria dinàmica, pot ajudar a desenvolupar la CE 4.
- El **saber #1.ESP.FG.D**, que aborda l'estudi i classificació dels triangles i, per tant, contribueix al desenvolupament de la CE 3 i la CE 4.

- De manera similar al cas anterior, però ara amb quadrilàters en comptes de triangles, el **saber #1.ESP.FG.E**, que és essencial, contribueix al desenvolupament de la CE 3 i la CE 4.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar diferents sabers fan referència directa al procés de raonament i prova. Per exemple:

- El recurs «Quant mesuren els angles de les diferents peces» (**saber #1.ESP.FG.A**) ens permet fer un treball profund dels *pattern blocks* a partir de les propietats i relacions entre les peces, de manera que es propicia el treball de la CE 3.
- L'activitat «El Tangram mínim de Brügner» (**saber #1.ESP.FG.B**) proposa l'estudi i comparació de diversos polígons i l'anàlisi de les seves propietats, i aconsegueix així un treball de raonament que contribueix al desenvolupament de la CE 3.
- El recurs «Euclid: the Game» (**saber #1.ESP.FG.C**) aborda la construcció de la geometria euclidiana pas a pas amb l'ajuda del GeoGebra, treballant de forma clara el pensament computacional i, per tant, la CE 4.
- L'activitat «Quant sumen els angles d'un triangle?» (**saber #1.ESP.FG.D**) porta l'alumnat a conjeturar i, finalment, descobrir quant val la suma dels angles interiors d'un polígon i, consegüentment, contribueix al desenvolupament de la CE 3.
- El recurs «Menseki Meiro» (**saber #1.ESP.VM.A**) permet treballar trencaclosques formats per rectangles que s'han de resoldre, entre altres coses, a partir de raonaments lògics i, per tant, contribueix a desenvolupar la CE 3.

Connexions amb altres parts de la matemàtica (CE 5)

El sentit espacial connecta amb tots els sentits del currículum: amb l'estocàstic a través de la representació de dades i amb el numèric per establir relacions entre nombres a través de models geomètrics i per interpretar geomètricament el sentit d'algunes operacions. Però les connexions més fortes les trobem amb el sentit de la mesura i amb l'algebraic. Quan se cerquen criteris per classificar les figures geomètriques i fer-ne un estudi de les propietats o se cerquen patrons, es treballen sabers propis del pensament computacional i, evidentment, la comprensió i treball espacial comporta un treball de mesura (de longituds, angles, perímetres, àrees...).

Sabers

A tall d'exemple, alguns sabers d'aquest sentit que poden ajudar a reforçar les connexions internes són, entre altres:

- El treball del **saber #1.ESP.FG.B**, que també implica arribar a generalitzacions i a l'observació de patrons i aconsegueix, així, reforçar la CE 5.
- El **saber #1.ESP.FG.D**, que permet treballar la suma d'angles interiors de diversos polígons, de manera que arriba a un treball de patrons que contribueix al desenvolupament de la CE 5.
- Tot el bloc de **sabers #1.ESP.VM**, que connecta el sentit espacial amb el sentit numèric relacionant conceptes i, per tant, afavoreix el treball de la CE 5.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar sabers aporten o utilitzen connexions internes. Per exemple:

- L'activitat «Construir triangles amb llumins» (**saber #1.ESP.FG.D**) d'una banda, proposa un treball geomètric per veure quan es pot construir un triangle, però, d'altra banda, proposa un treball de

patrons per saber numèricament, sense construir-lo, si un triangle es pot fer o no, i d'aquesta manera estableix connexions que fomenten el treball de la CE 5.

- «El model rectangular» (**saber #1.ESP.VM.A**) permet, a partir d'una construcció geomètrica, entendre algunes propietats de les operacions i propiciar així el treball de la CE 5.
- A l'activitat «Arrel quadrada d'un nombre» (**saber #1.ESP.VM.D**) es mostra que fer l'arrel quadrada d'un nombre és posar el nombre en forma de quadrat i veure'n la mesura del costat, amb la qual cosa es connecta sentit numèric i espacial i, per tant, s'afavoreix el treball de la CE 5.

Connexions amb altres matèries i amb l'entorn (CE 6)

La geometria ens ajuda a interpretar el món i, a través de les propostes que presentem a l'alumnat de 1r d'ESO, és bàsic posar en relleu aquesta idea, tant des del sentit espacial com del de la mesura. Tant a l'art com a la natura hi apareixen figures geomètriques i les seves relacions i propietats i, a través de la geometria, podem descriure els patrons i simetries que s'hi observen. La geometria no és quelcom aïllat de la nostra realitat i entorn, no tracta elements abstractes i fórmules que no ens interpel·len directament, al contrari, és una eina poderosa que ens permet prendre decisions, interpretar el món i també meravellar-nos de la seva bellesa. Com a professorat, hem de donar oportunitats a l'alumnat per aplicar i ampliar les destreses de raonament espacial i també per veure que les idees geomètriques estan presents en altres disciplines, a part de les matemàtiques. Així, el treball del sentit espacial a 1r d'ESO pot connectar amb gairebé totes les matèries: amb les llengües, quan demanem que posin per escrit els seus raonaments o facin un informe d'una investigació; amb les ciències socials tenim la Grècia antiga com a punt per establir fortes connexions a través de la geometria euclidiana; a tecnologia, qualsevol construcció, maqueta o disseny d'espais porta implícit el treball geomètric; les ciències de la naturalesa ens permeten treballar les formes que hi ha a la natura i en els mateixos éssers vius; la matèria d'educació física ens posa a l'abast objectes geomètrics, així com espais interessants on poder fer molta geometria, i és evident la connexió amb educació visual i plàstica, des de fer construccions de geometria euclidiana a estudiar formes de determinats objectes o analitzar d'obres d'art. Queda clar, per tant, el paper rellevant que pot arribar a tenir el sentit espacial dins els projectes STEAM.

Sabers

A tall d'exemple, esmentem alguns sabers d'aquest sentit que, entre altres, poden ajudar a reforçar les connexions:

- El **saber #1.ESP.FG.B** tracta l'estudi de les propietats dels polígons i permet establir connexions amb les formes del nostre entorn i així aprofundir en el treball de la CE 6.
- De manera similar al punt anterior, però en comptes de polígons, ara centrant-nos en la circumferència i el cercle, el treball del **saber #1.ESP.FG.F** també permet establir connexions que enforteixen el treball de la CE 6.
- La simetria és present a tot el nostre entorn i és objecte d'estudi en moltes disciplines, per tant, queda clar que el **saber #1.ESP.MT.A** ajuda a desenvolupar la CE 6.
- El **saber #1.ESP.VM.H** promou la geometrització de qualsevol àrea del coneixement i, per tant, el desenvolupament de la CE 6.

Recursos

Molts dels recursos descrits per treballar sabers del sentit espacial ofereixen oportunitats per fer connexions externes. Per exemple:

- El projecte «Mirada matemàtica» (**saber #1.ESP.FG.B**) proposa relacionar la creació de microhistòries relacionades amb els elements matemàtics d'una fotografia, i de forma clara contribueix a desenvolupar la CE 6.

- El recurs «Classifiquem logos i tapaboques de cotxes» (**saber #1.ESP.FG.B**) proposa classificar figures quotidianes segons la quantitat de girs invariants i eixos de simetria, de manera que estableix connexions en la línia de la CE 6.
- L'activitat «Matemàtiques al monestir de Poblet» (**saber #1.ESP.FG.B**) és un exemple clar de proposta que contribueix al desenvolupament de la CE6 a través de la realització d'un treball de camp.
- A l'activitat «Descobrim pi» (**saber #1.ESP.FG.F**) es proposa descobrir el nombre pi a través de la mesura d'objectes quotidians i, per tant, es fa un treball que afavoreix l'assoliment de la CE 6.

Comunicació i representació (CE 7)

L'alumnat estudia les característiques i propietats de les figures geomètriques i, amb l'ús de diversos tipus de representacions, pot conceptualitzar i també argumentar sobre les seves troballes. Aprendre a comunicar els raonaments de forma precisa els prepara per als cursos posteriors, on serà necessari dotar de més formalisme el treball geomètric.

Com a professorat, hem de procurar fer propostes que permetin pensar a través de la resolució de problemes per posteriorment fer argumentacions. Aquestes argumentacions permetran fer servir el vocabulari i la notació geomètrics treballats a l'aula. També és important que les propostes posin èmfasi a entendre representacions geomètriques diverses, com podrien ser la de tres dimensions en un paper o la de formes i figures planes, entre d'altres.

Sabers

A tall d'exemple, hi ha alguns sabers d'aquest sentit que, entre altres, poden ajudar a reforçar la comunicació i la representació:

- El **saber #1.ESP.FG.B** implica un treball profund de raonament que, a la vegada s'ha d'argumentar, , per tant, propicia el treball en comunicació i representació, és a dir, el treball de la CE 7.
- De forma similar al punt anterior, però amb el cas particular dels triangles, tenim que el **saber #1.ESP.FG.D** contribueix al desenvolupament de la CE 7.
- Si en lloc de polígons en general o triangles, centrem el treball en els quadrilàters, tenim que el **saber #1.ESP.FG.E** també contribueix al desenvolupament de la CE 7, en el mateix sentit que els dos punts anteriors.
- El **saber #1.ESP.VM.A** tracta la multiplicació de dos nombres com a càlcul de la superfície d'un rectangle, de manera que treballa la CE 7.
- El **saber #1.ESP.VM.F** tracta el producte de fraccions representant-lo com a superposicions de rectangles i, per tant, desenvolupa la CE 7.

Recursos

Molts dels recursos esmentats per treballar sabers del sentit espacial fan referència al procés de comunicació i representació. Per exemple:

- L'activitat «Joc d'endevinar figures» (**saber #1.ESP.FG.B**) proposa la descripció d'una figura sense veure-la i, per tant, és molt adequada per treballar la CE 7, pel que fa a la part de comunicació, posant atenció a l'adequació de la terminologia emprada.
- El recurs «Quelis» (**saber #1.ESP.FG.B**) és un dels exemples més clars en què es treballa la CE 7, ja que promou que l'alumnat doni arguments cercant el vocabulari matemàtic més adient.
- L'activitat «Sempre, de vegades o mai» (**saber #1.ESP.FG.B**) proposa la discussió sobre la certesa d'algunes afirmacions matemàtiques i, per tant, l'alumnat treballa la comunicació per fonamentar les argumentacions, cosa que afavoreix el desenvolupament de la CE 7.

Gestió socioemocional (CE 8 i CE 9)

D'una banda, com ja s'ha tractat al punt anterior, «Comunicació i representació», el treball dels sabers del sentit espacial afavoreix la comunicació i l'argumentació i permet, així, fer una reflexió sobre la comprensió individual i sobre les idees dels altres, i també crea l'oportunitat de valorar les estratègies pròpies i les dels companys. D'altra banda, el treball del sentit espacial dona peu a l'alumnat a proposar i poder treballar molt bones investigacions. Aquestes investigacions permeten treballar en equip, fomentant la col·laboració entre iguals, i també suposen un repte, el treball del qual pot ajudar a adquirir confiança en les capacitats pròpies i desenvolupar actituds positives.

A més, el sentit espacial és un espai idoni per a la manipulació, que és una eina important per vèncer els possibles bloquejos i afavorir la inclusió de tot l'alumnat.

La gestió socioemocional està vinculada a dues competències específiques:

- CE 8, relacionada amb el desenvolupament d'habilitats personals com les creences, les actituds i les emocions envers les matemàtiques.
- CE 9, centrada en el desenvolupament d'habilitats socials com el treball en equip i la presa de decisions.

A continuació s'indiquen alguns aspectes que, treballats des del sentit espacial, poden contribuir al desenvolupament de les competències CE 8 i CE 9.

Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 8

- Totes les activitats proposades que porten implícita la resolució de problemes busquen ser una tasca gratificant i que engresqui a continuar investigant i, per tant, eviti bloquejos. La gestió que se'n faci permetrà que l'alumnat pugui valorar els seus propis avenços així com els dels companys o companyes. Així, activitats com «Construïm triangles amb llumins» (**saber #1.ESP.FG.D**) proposen una situació inicialment senzilla per començar a investigar en la qual tots i totes podran dir-hi la seva, però que acabarà amb un treball molt profund de patrons.
- Dintre les propostes del curs es poden trobar activitats dirigides a tots els nivells, com per exemple el «Joc d'endevinar figures» (**saber #1.ESP.FG.B**), on tothom podrà dir alguna cosa, de manera que es fomenta la participació i la confiança.
- La gestió que es faci de les activitats és molt important quant al desenvolupament de la CE 8. Si ens fixem en l'exemple descrit a «Quant sumen els angles d'un triangle?» (**saber #1.ESP.FG.D**) veiem que cada estudiant treballa amb el seu propi triangle seguint les indicacions del professor/a, però al final s'exposen tots els de la classe. Tot l'alumnat té l'oportunitat d'aportar i contribuir, i veu que el treball de tots i totes és important.
- Tot el bloc Visualització i modelització geomètrica (**#1.ESP.VM**) és clau. Els models geomètrics són una eina que afavoreix la comprensió dels sabers, donat que són una forma propera d'acostar aquests sabers a l'alumnat i fer que les activitats siguin atractives, d'inici, per a tothom. Poden esdevenir una eina poderosa per vèncer pors.

Alguns aspectes que poden contribuir al desenvolupament de la competència CE 9

- Els sabers del bloc de figures geomètriques que treballen la classificació i l'estudi de propietats (**saber #1.ESP.FG.B**, **saber #1.ESP.FG.D** i **saber #1.ESP.FG.E**) són una bona font d'inspiració per trobar investigacions que permeten el treball col·laboratiu. Les investigacions proposades («Quant mesuren els angles de les diferents peces» (**saber #1.ESP.FG.A**), «El Tangram mínim de Brügner» (**saber #1.ESP.FG.B**), «Construïm triangles amb llumins» (**saber #1.ESP.FG.D**) treballades de manera col·laborativa poden ajudar a construir coneixement de manera col·lectiva. L'alumnat ha d'escoltar l'opinió dels altres membres de l'equip i ha d'arribar a acords valorant l'opinió i les argumentacions



dels companys i companyes, per tal de trobar la solució del repte plantejat.

- La idea de construcció de coneixement de manera col·lectiva també es pot veure a l'activitat «Descobrim pi» (**saber #1.ESP.FG.F**), en què cada membre de la classe porta un objecte circular i amb el treball de tot el grup s'arriba a trobar una aproximació de pi.
- El treball per parelles, com es proposa per exemple al «Joc endevinar figures» (**saber #1.ESP.FG.B**) pot ajudar a identificar errors i dificultats entre companys i companyes i permetre fer aportacions constructives per ajudar-se els uns als altres.