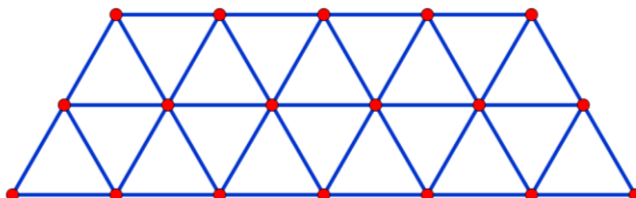


Proposta d'activitat

Títol: Patrons en estructures

Imatge:



Agrupament:

És aconsellable fer aquesta activitat per parelles per tal de crear la necessitat de compartir i contrastar arguments en el procés de determinació dels models algebraics que es demanen.

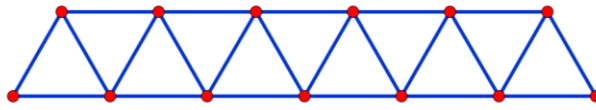
Material:

No cal un material especial llevat de les imatges de les estructures que cal estudiar. Tanmateix també és possible construir efectivament aquestes estructures mitjançant escuradents units per boletes de plastilina o altres materials que permeten fer exploracions geomètriques.

Descripció:

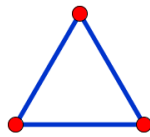
Moltes construccions industrials contenen estructures metàl·liques formades per barres i connectors que els donen solidesa. L'activitat que es proposa bàsicament consisteix a explorar estructures d'aquest tipus i determinar, en funció d'un paràmetre, el nombre de barres i de connectors necessaris per construir-les. De fet es tracta de trobar els termes generals a_n , $b_n...$ de successions definides a partir de figures geomètriques en les quals agafarem com a paràmetre n el nombre de barres de la base de l'estructura. Plantejarem cinc casos corresponents a estructures diferents i prendrem sempre a_n com el nombre de barres necessàries per a construir una estructura de n barres de base i b_n com el nombre de connectors necessaris per a construir una estructura de n barres de base. Malgrat que les preguntes que es plantegen són les mateixes té interès proposar l'exploració de diferents tipus d'estructures.

Estructura 1



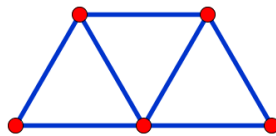
L'estructura de la imatge té 6 barres en la base ($n = 6$) i, per construir-la, necessitem 23 barres ($a_6 = 23$) i 13 connectors ($b_6 = 13$). Podríem trobar una expressió general que doni a_n i b_n per a tots els valors naturals de n ? Explorem-ho!

Per a $n = 1$:



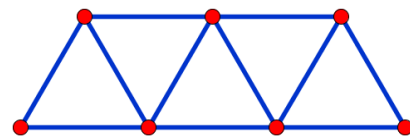
$$a_1 = 3 \quad b_1 = 3$$

Per a $n = 2$:



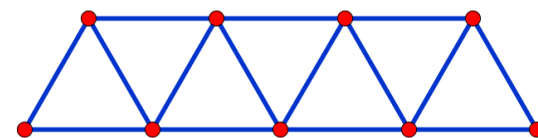
$$a_2 = 7 \quad b_2 = 5$$

Per a $n = 3$:



$$a_3 = 11 \quad b_3 = 7$$

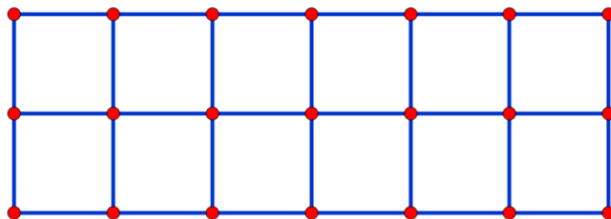
Per a $n = 4$:



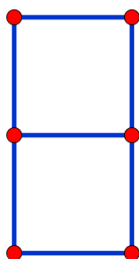
$$a_4 = 15 \quad b_4 = 9$$

Serà bo que els alumnes descobreixen (proposant, argumentant entre ells, cercant contraexemples...) els termes generals d'aquestes successions. De fet es tracta de dues progressions aritmètiques de diferències respectives 4 i 2 els termes generals de les quals són: $a_n = 4n - 1$ i $b_n = 2n + 1$.

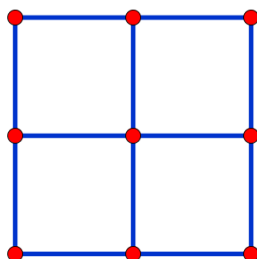
Estructura 2



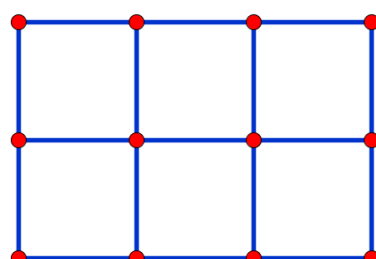
En aquest cas, novament, podem explorar el patró constructiu per a diferents valors de n :



$$\begin{aligned} a_1 &= 7 \\ b_1 &= 6 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} a_2 &= 12 \\ b_2 &= 9 \end{aligned}$$

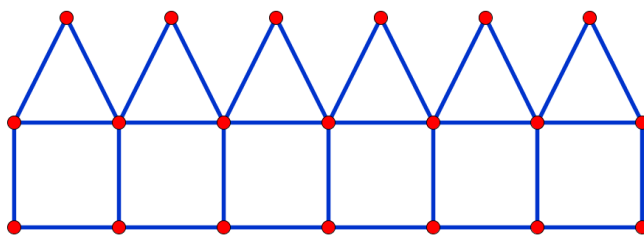


$$\begin{aligned} a_3 &= 17 \\ b_3 &= 12 \end{aligned}$$

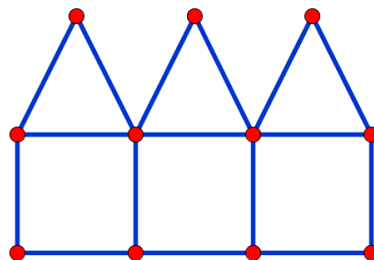
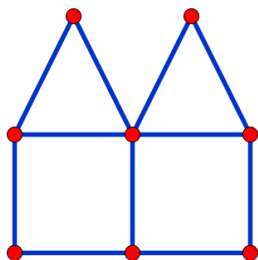
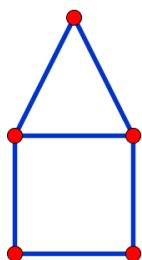
Els alumnes podran deduir els termes generals:

$$\begin{aligned} a_n &= 5n + 2 \\ b_n &= 3n + 3 \end{aligned}$$

Estructura 3



Explorem el patró constructiu per als primers valors de n :



$$\begin{aligned} a_1 &= 6 \\ b_1 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= 11 \\ b_2 &= 8 \end{aligned}$$

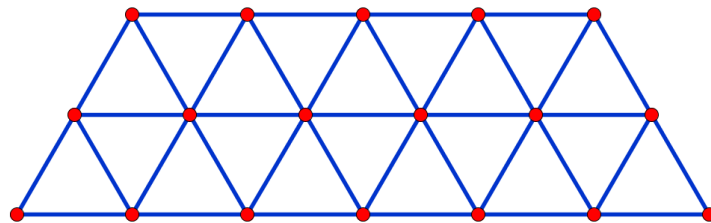
$$\begin{aligned} a_3 &= 16 \\ b_3 &= 11 \end{aligned}$$

Els alumnes podran deduir els termes generals:

$$\begin{aligned} a_n &= 5n + 1 \\ b_n &= 3n + 2 \end{aligned}$$

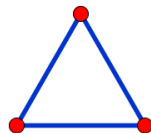
És interessant comparar aquest cas amb l'anterior tot observant com, en cada pas, s'hi afegeix una barra menys i un punt menys.

Estructura 4



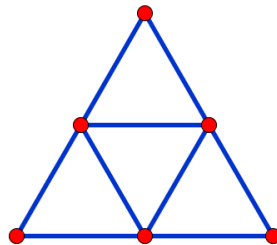
Es tracta d'una estructura una mica més complicada però que pot ser explorada de la mateixa manera:

Per a $n = 1$:



$$a_1 = 3 \quad b_1 = 3$$

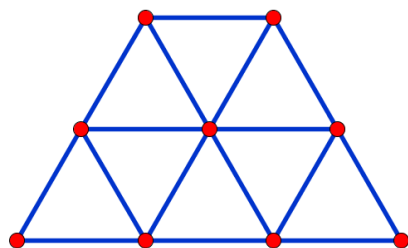
Per a $n = 2$:



$$a_2 = 9 \quad b_2 = 6$$

Observem que, respecte de la figura anterior, hi hem afegit 6 barres i 3 connectors.

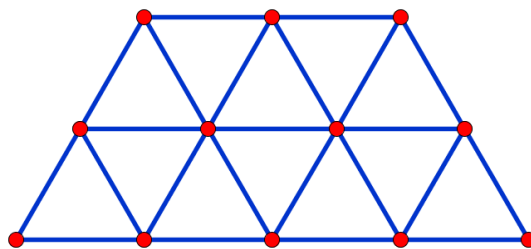
Per a $n = 3$:



$$a_3 = 16 \quad b_3 = 9$$

Observem que, respecte de la figura anterior, hi hem afegit 7 barres i 3 connectors.

Per a $n = 4$:



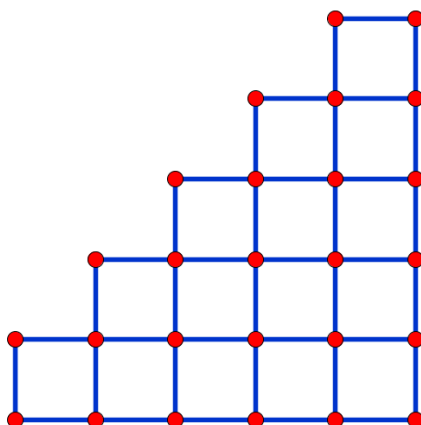
$$a_4 = 23 \quad b_4 = 12$$

Probablement els alumnes descobriran aviat que $b_n = 3n$ però tindran una mica de dificultat amb a_n pel fet que a_1 s'escapa del patró. Podem proposar d'escriure-ho així:

$$a_n = \begin{cases} 3 & \text{per } a \ n = 1 \\ 7n - 5 & \text{per } a \ n \geq 2 \end{cases}$$

Estructura 5

Explorem una nova estructura que suggereix la idea d'una escala o d'unes grades:

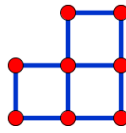


Com en els casos anteriors estudiem els primers valors de n :



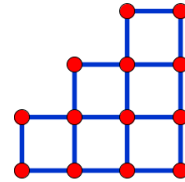
$$a_1 = 4$$

$$b_1 = 4$$



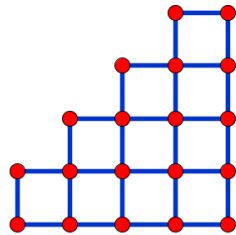
$$a_2 = a_1 + 2 \cdot 2 + 2 = 10$$

$$b_2 = 8$$



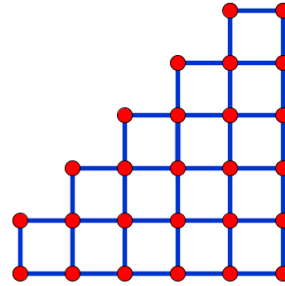
$$a_3 = a_2 + 2 \cdot 3 + 2 = 18$$

$$b_3 = 13$$



$$a_4 = a_3 + 2 \cdot 4 + 2 = 28$$

$$b_4 = 19$$



$$a_5 = a_4 + 2 \cdot 5 + 2 = 40$$

$$b_5 = 26$$

En primer lloc abordarem el treball entorn a la successió dels a_n . En aquest cas, la dificultat rau en què les diferències entre termes consecutius no són constants, cada vegada a un terme hi sumem més per tal d'obtenir el terme següent! En general:

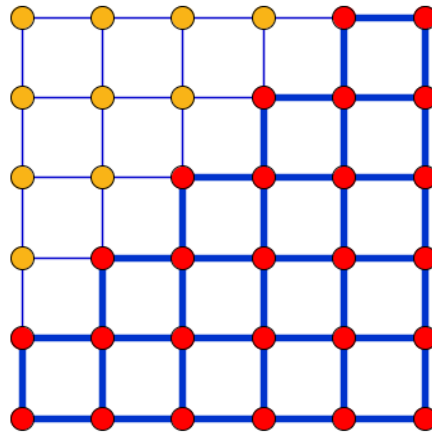
$$a_n = a_{n-1} + 2n + 2$$

Aquesta fórmula es pot deduir gràficament observant la geometria de l'última columna que hi afegim. De totes maneres no és tan senzill deduir l'expressió d' a_n únicament en funció del valor de n . Hi ha varis camins:

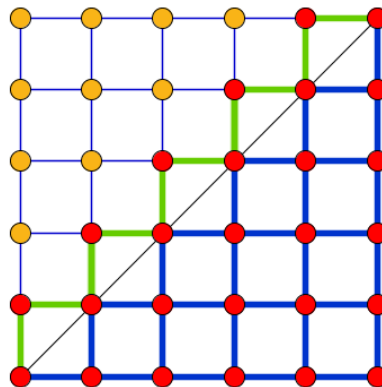
1. Un primer camí per què els alumnes descobreixen l'expressió d' a_n hauria de tenir un caire inductiu (en el sentit d'anar provant casos concrets) tot convidant els alumnes a experimentar amb expressions diverses on intervingués n^2 , n , $2n$, $3n$... Conjuntament aniríem "descobrint" l'art d'ajustar un model algebraic a un conjunt concret de valors. El docent els hauria d'anar acompanyant per tal d'encarar la cerca cap a l'expressió correcta:

$$a_n = n^2 + 3n.$$

2. Un camí visual, amb fort component geomètric, consisteix a prendre una de les escales i complementar-la fins a donar el quadrat corresponent tal com es mostra en la figura.



Si la base de l'escala té n barres i hi ha $n + 1$ files de barres horitzontals resultarà que el nombre total de barres horitzontals del quadrat serà $n(n + 1)$. Per la mateixa raó el nombre total de barres verticals serà $n(n + 1)$. Així el nombre total de barres de l'estructura quadrada serà de $2n(n + 1)$. D'entrada semblaria que la meitat d'aquestes barres, $n(n + 1)$, són les que componen l'estructura de partida en forma d'escala però, si posem atenció en com la diagonal parteix el quadrat, observarem que a aquest nombre de barres cal sumar-hi les que en el dibuix següent estan pintades de verd:

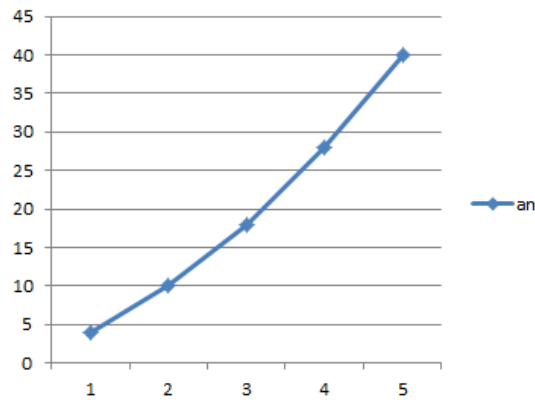


Observem que hi ha n barres horitzontals i n barres verticals acolorides de verd, això vol dir que a la meitat de les barres del quadrat hi hem de sumar $2n$ noves barres per tenir així el nombre total de barres de l'estructura triangular:

$$a_n = n(n + 1) + 2n = n^2 + 3n.$$

Una bonica demostració geomètrica molt visual!

- Un camí amb un fort component algebraic que no sembla adequat per a l'ESO però que sí que pot interessar per alumnes avançats i que s'inclou aquí com un element d'ampliació. Representant en un gràfic els valors obtinguts observarem que sembla que corresponen a una paràbola:



Això ens porta a pensar que potser els termes a_n seguiran un model quadràtic del tipus $a_n = pn^2 + qn + r$, on p , q i r s'hauran d'ajustar per tal que es compleixi la condició: $a_n = a_{n-1} + 2n + 2$. Simplement substituint tindrem:

$$pn^2 + qn + r = p(n-1)^2 + q(n-1) + r + 2n + 2$$

Eliminant la r i igualant els respectius coeficients de n i els termes independents obtindrem dues condicions (la igualtat dels coeficients de n^2 no aporta cap condició ja que és $p = p$) d'on podrem deduir els valors de p i de q :

$$\begin{aligned} q &= -2p + q + 2 \rightarrow p = 1 \\ r &= p - q + r + 2 \rightarrow q = p + 2 \rightarrow q = 3 \end{aligned}$$

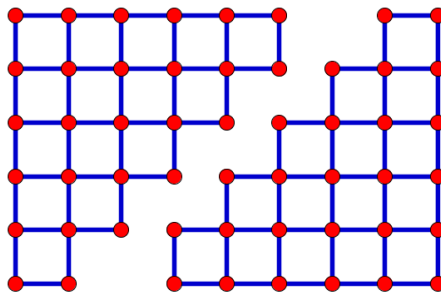
Emprant el fet que $a_1 = 4$ deduirem que $r = 0$. Substituint p , q i r en l'expressió d' a_n obtindrem el model algebraic que ajustarà la successió:

$$a_n = n^2 + 3n.$$

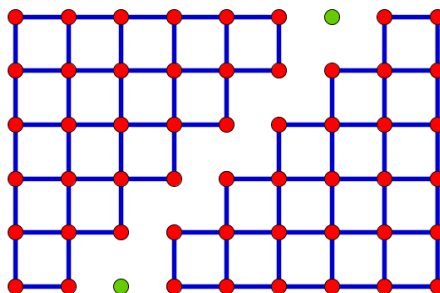
En segon lloc hem d'emprendre l'estudi de la successió dels b_n . Novament observem que les diferències entre els termes consecutius no són constants. Els alumnes poden experimentar amb diferents expressions (fins i tot els podem donar pistes) però és difícil que arribin a l'expressió correcta:

$$b_n = \frac{n^2 + 5n + 2}{2}$$

Tanmateix hi ha una demostració visual molt bonica: considerem una d'aquestes estructures escalades que suposarem que té n barres a la base (en el cas concret de la imatge $n = 5$) i prenem una còpia de l'estructura, la girem 180 graus i la desplaçem com indica la figura següent:



Si hi afegim els dos punts verds de la imatge tindrem un rectangle en l'altura del qual hi haurà $n + 1$ punts i en la base del qual hi haurà $n + 1 + 3 = n + 4$ punts:



Així el nombre total de punts d'aquest rectangle serà de $(n + 1)(n + 4)$. Restant d'aquí els dos punts verds i dividint per dos obtindrem els punts que componen una de les dues peces escalades. Així:

$$b_n = \frac{(n + 1)(n + 4) - 2}{2} = \frac{n^2 + 5n + 2}{2}$$

Una sorprenent manera de deduir, amb eines geomètriques ben visuals, l'expressió algebraica que dóna el patró del nombre de connectors de l'estructura en forma d'escala.

Naturalment es podrien posar més exemples d'estructures per estudiar. Tanmateix també és interessant convidar als alumnes a què inventin noves estructures i descobreixin expressions que donin el nombre de barres i de connectors en funció del nombre de barres de la base.

Continguts més rellevants que es tracten:

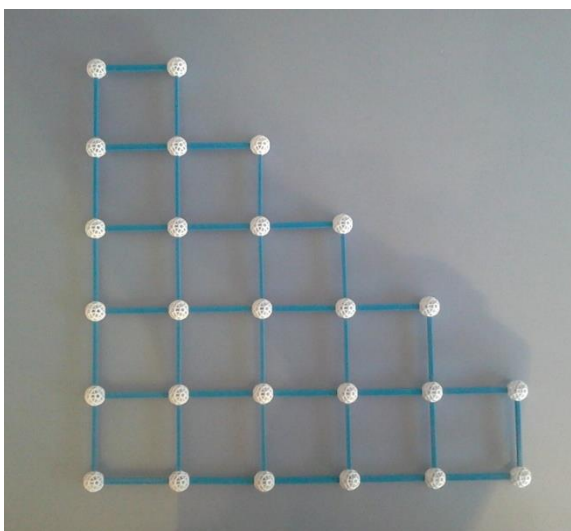
Successions, terme general d'una successió, expressions algebraiques, propietats geomètriques de figures planes, demostracions visuals.

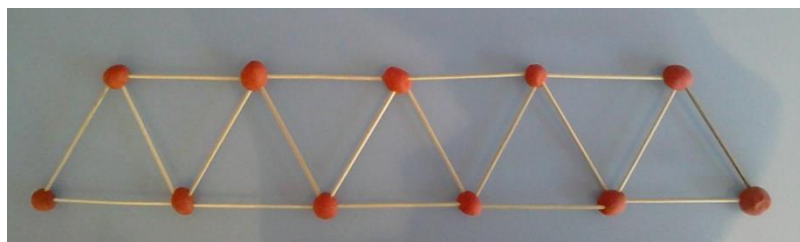
Dimensions i competències que es poden treballar especialment:

Amb aquestes activitats es pot treballar especialment la competència 1 de la dimensió de resolució de problemes (Traduir un problema a llenguatge matemàtic o a una representació matemàtica utilitzant variables, símbols, diagrames i models adequats). Si es té cura de promoure converses d'aula riques es contribuirà a desenvolupar la competència 5 de la dimensió de raonament i prova (Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques) i la competència 11 de la dimensió de comunicació i representació (Emprar la comunicació i el treball col·laboratiu per compartir i construir coneixement a partir d'idees matemàtiques). En totes aquestes activitats s'utilitza a fons la relació entre expressions algebraiques i geometria treballant així la competència 7 de connexions (Usar les relacions que hi ha entre les diverses parts de les matemàtiques per analitzar situacions i per raonar) i la 9 de comunicació i representació (Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic).

Comentaris i referències:

Aquestes activitats conjuguen l'exploració de figures geomètriques amb la determinació de l'expressió algebraica que dóna del terme general de successions. Tant les estructures de partida com, sovint, el procés per determinar els termes generals posen en joc idees geomètriques que, en alguns casos, poden representar-se no tan sols amb dibuixos sinó també amb materials. Les imatges següents mostren dos exemples emprant materials ben diferents:





Quan els alumnes construeixen aquestes formes o les exploren van descobrint patrons constructius que després podran emprar per avançar cap a la deducció dels models algebraics que donen els corresponents termes generals.

S'ha procurat que les descripcions de les activitats de la present proposta accentuin els aspectes intuïtius que contenen però també s'ha intentat aportar explícitament la solidesa del rerefons matemàtic que es posa en joc. Aquesta combinació entre intuïció i rigor en la utilització d'eines matemàtiques (que haurà de ser graduada pel docent atenent a les característiques de l'alumnat concret) atorga una força especial a aquestes propostes en les quals no és tan important el formalisme com que l'alumne entengui el patró constructiu i el sentit del model algebraic que dóna el terme general buscat. És molt convenient que, en l'abordatge d'aquestes propostes, es provoquin bones converses entre els alumnes, conjecturant, argumentant, confirmant o rebutjant hipòtesis...

Aquesta proposta presenta un context geomètric molt ric i obert per treballar expressions algebraiques i models de canvi i relacions. És el desenvolupament d'una idea que, de manera breu, s'apunta en el llibre *Thinking with Mathematical Models. Linear and Inverse Variation* de Glenda Lappan, Elizabeth Difanis Phillips, James T. Fey i Susan N. Friel, dins de la col·lecció *Connected Mathematics* editada per Pearson.