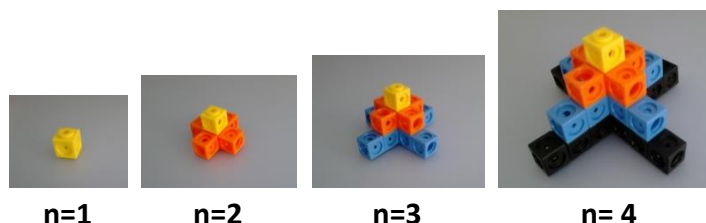


Proposta d'activitat

Títol: Patrons i policubs

Imatge:



Agrupament:

S'aconsella el treball en parelles per tal de facilitar les construccions i promoure la comunicació, la conjectura, l'argumentació, el contrast d'idees...

Material:

Cubets encaixables (com el *Multilink*) per a la construcció de figures policúbiques. Aquest material és un dels més polivalents entre els que s'utilitzen en educació matemàtica.

Descripció:

Presentem a l'alumnat el conjunt de policubs construïts amb cubets encaixables que es mostra en la imatge que encapçala aquesta proposta. Tenim torres d'un cub d'alçada ($n=1$), de 2 cubets ($n=2$), de 3 cubets ($n=3$) i de 4 cubets d'alçada ($n=4$). Es pot convidar a l'alumnat a construir, amb el mateix patró, una torre de 5 o de 6 cubets d'alçada. Un cop estan familiaritzats amb aquestes figures estem en disposició de plantejar la pregunta que volem investigar en l'activitat:

Podríem trobar una expressió que, en funció de l'altura n de la torre, ens doni el nombre de cubets que la componen?

D'entrada sembla natural fer una taula amb el nombre de cubets de les primeres torres. En l'elaboració d'aquesta taula és probable que els alumnes ja comencin a descobrir regularitats que després tindran importància en la deducció de l'expressió buscada. Aplicant aquestes regularitats es pot demanar que calculin el nombre de cubets que

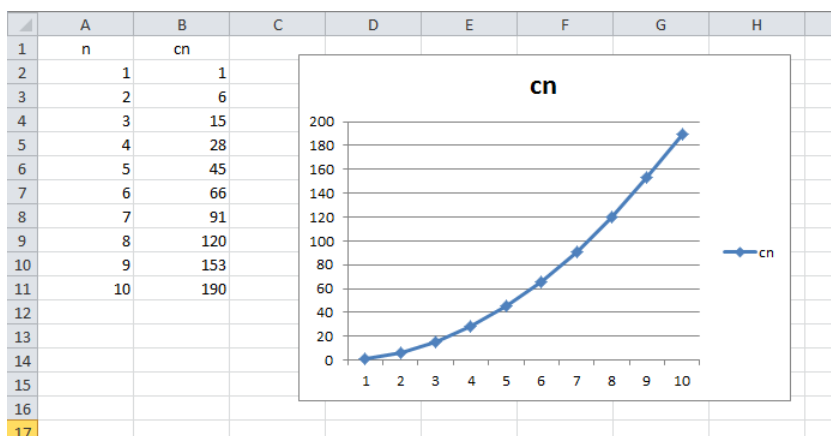
formaran torres semblants de 5, 6, 7 o 8 cubs d'altura. S'obtindrà la següent taula on s'ha indicat per c_n el nombre de cubs de la torre d'altura n :

Altura, n	Nombre de cubs, c_n
1	$1=1$
2	$1+5=6$
3	$1+5+9=15$
4	$1+5+9+13=28$
5	$1+5+9+13+17=45$
6	$1+5+9+13+17+21=66$
7	$1+5+9+13+17+21+25=91$
8	$1+5+9+13+17+21+25+29=120$

La pregunta inicial ara ja es pot formular en termes més algebraics: per a un valor n general quina expressió donarà c_n ?

A partir d'aquí s'obre un temps de recerca, de conjectures, de contrast d'opinions... on convé que els alumnes reflexionin i expressin i debatin les seves conclusions. El docent hauria de fer possible aquesta conversa de grup per anar perfilant la resposta a la pregunta inicial, sense pressa, és bo que el camí sigui llarg!

Es pot emprar el full de càlcul per fer una taula i construir una representació gràfica com la que es mostra en la captura de pantalla següent en la qual s'ha suposat que els càlculs s'havien fet fins a una torre d'altura 10:



Aquest gràfic convida a pensar que potser el perfil correspon a una paràbola. Segons el nivell de l'alumnat es pot apuntar que, si és així, l'expressió que busquem serà quadràtica en la variable n . Tanmateix això s'ha d'explorar!

Els camins d'abordatge poden ser variats. A continuació se n'apunten dos, un amb més càrrega algebraica, l'altre amb més accent visual. Tanmateix és probable i interessant que els alumnes "descobreixen" nous fils argumentals per arribar a la resposta demanada.

Un camí algebraic

Observem que una d'aquestes torres està formada per un nombre de cubs que és la suma dels cubs dels seus pisos:

- El pis de dalt sempre té 1 cub
- El segon pis començant per dalt sempre té 5 cubs (4 més que l'anterior ja que s'hi afegeixen els 4 dels extrems de les ales).
- El següent pis sempre té 9 cubs (4 més que l'anterior ja que, de nou, s'hi afegeixen els 4 dels extrems de les ales)

...així cada pis té quatre cubs més que el pis que té immediatament per sobre.

Ens podem preguntar quina serà l'expressió que dóna el nombre de cubs del pis inferior en la figura de n pisos (Observis que, de fet, estem buscant, malgrat que segons el curs no cal dir-ho, el terme general d'una progressió aritmètica de diferència 4). Aquest nombre de cubs serà igual al nombre de cubs del pis superior (1) més tantes vegades 4 cubs com salts haguem fet entre la planta superior i la planta inferior (si hi ha n plantes haurem fet $n-1$ salts per anar de la planta superior a la inferior). En termes algebraics podrem dir que el nombre de cubs de la planta inferior de la torre de n cubs d'altura serà $1 + 4 \cdot (n - 1) = 4n - 3$.

Així doncs el nombre total de cubs de la torre de n cubs d'altura serà:

$$c_n = 1 + 5 + 9 + 13 + \dots + (4n - 3)$$

Ens trobem així davant de la necessitat de calcular la suma d'una progressió aritmètica.

Segons el curs en què es faci l'activitat els alumnes no coneixeran les progressions aritmètiques però podem abordar el càlcul de la suma que busquem de manera raonada:

- Podem partir de la història que s'explica de l'etapa escolar de Gauss en què el mestre va demanar als seus alumnes que sumessin tots els nombres de l'1 al 100. Instants després Gauss va respondre 5050. Davant la sorpresa del mestre el jove geni ho va argumentar així: en lloc de fer $1+2+3+4+5+\dots+100$ es poden fer parelles prenent els termes a partir dels extrems $(1+100)+(2+99)+(3+98)+\dots+(50+51)$. Cadascuna d'aquestes 50 parelles suma el mateix, 101. Així la suma total que es demana és $50 \cdot 101 = 5050$.

- A partir d'aquesta història podem proposar altres sumes de progressions aritmètiques fins a “descobrir” que el valor de la suma d'un conjunt de termes consecutius d'una progressió aritmètica és la suma del primer terme més l'últim terme multiplicada per la meitat del nombre de termes (conseqüència del fet que la suma de termes equidistants dels extrems és constant). Aquesta afirmació és molt intuïtiva en el cas d'un nombre parell de termes però, en canvi, té un punt delicat en cas d'un nombre senar de termes.
- Naturalment, depenent del curs, es poden fer demostracions més algebraiques de la fórmula de la suma d'una progressió aritmètica.

Arribats aquí reprenem el nostre problema de les torres tot recordant que ens proposàvem calcular la suma següent:

$$c_n = 1 + 5 + 9 + 13 + \dots + (4n - 3)$$

Aplicant les descobertes que hem fet sobre la suma de progressions aritmètiques, tindrem que:

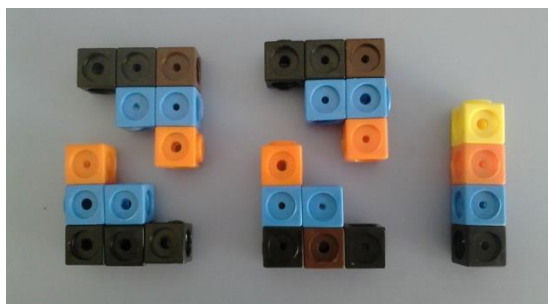
$$c_n = [1 + (4n - 3)] \cdot \frac{n}{2} = (4n - 2) \cdot \frac{n}{2} = 2n^2 - n$$

Serà bonic comprovar que aquesta expressió $c_n = 2n^2 - n$ ajusta bé tots els valors de la taula construïda inicialment. Feina feta!

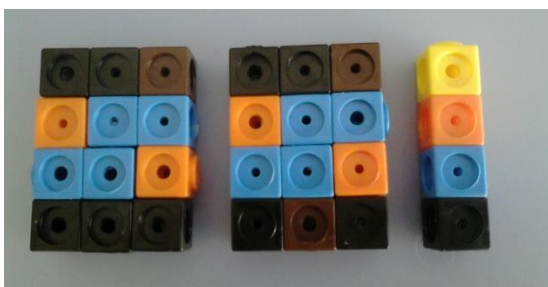
Un camí geomètric molt visual

Una bonica alternativa al camí anterior rau en la següent demostració visual. En les imatges representaren el procediment per a la torre d'altura 4 ($n=4$), tanmateix la descripció es farà per a un valor general de n .

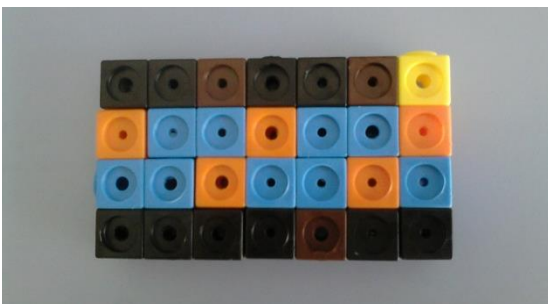
Considerem la torre d'altura n i separem les quatre ales. Tindrem quatre figures triangulars de dimensions $(n-1) \times (n-1)$ i la columna central que tindrà altura n . Podem agrupar les ales dues a dues com mostra la figura següent:



Ajuntant les parelles d'ales observarem que encaixen bé tot formant dos rectangles de dimensions $(n-1) \times n$ com mostra la imatge:



Així tenim tres rectangles, tots ells d'altura n , que tenen bases respectives $n-1$ (una agrupació de dues ales), $n-1$ (l'altra agrupació de dues ales) i n (la columna central). Si els ajuntem tindrem un rectangle també d'altura n i de base la suma de les bases: $(n-1)+(n-1)+1 = 2n-1$. En la imatge següent es mostra aquest rectangle per a $n=4$.



El nombre total de cubs que té aquest rectangle s'obté multiplicant el nombre de cubs de la base pel de l'altura. Així tindrem que el nombre total de cubs serà:

$$c_n = (2n - 1) \cdot n = 2n^2 - n$$

Què bonic! Observem com la força del raonament geomètric visual ha permès arribar al resultat buscat d'una manera tan elegant com assequible per a l'alumnat sense necessitat de posar en joc aspectes algebraics que, en certs nivells, poden resultar feixucs.

Tal com havíem sospitat a partir del gràfic del full de càlcul, obtenim una expressió quadràtica en n .

Observem que és una activitat potent per treballar la idea de successió de manera intuïtiva a partir d'un plantejament geomètric i per anar descobrint l'expressió algebraica que dona el terme general, d'una manera experimental i conjunta en un procés on la conversa d'aula juga un paper important.

Continguts més rellevants que es tracten:

Successions (especialment el concepte de terme general), progressions (especialment la idea de progressió aritmètica i la seva suma), funcions definides sobre els nombres naturals, expressions algebraïques, demostracions visuals, percepció de l'espai, terminologia geomètrica.

Dimensions i competències que es poden treballar especialment:

El mateix propòsit de l'activitat il·lustra bé la competència 1 de la dimensió de resolució de problemes (Traduir un problema a llenguatge matemàtic o a una representació matemàtica utilitzant variables, símbols, diagrames i models adequats). Les argumentacions que es formulin (especialment la descripció de demostracions visuals manipulant les figures) permeten cultivar la competència 5 de la dimensió de raonament i prova (Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques) i la competència 7 de la dimensió de connexions (Usar les relacions que hi ha entre les diverses parts de les matemàtiques per analitzar situacions i per raonar).

Comentaris i referències:

L'activitat parteix d'un plantejament geomètric i requereix la familiarització amb cossos policúbics i la cerca d'un patró constructiu. El procés pot provocar una conversa d'aula molt rica i inclusiva, amb bones argumentacions construïdes pels alumnes que poden posar en joc idees matemàtiques importants. Observem que, de fet, estem determinant el terme general d'una successió i, per tant, l'expressió d'una funció definida sobre els nombres naturals.

És especialment encantadora la demostració visual de l'expressió del terme general agrupant convenientment les "ales" de les torres de cubs.

A l'ARC hi ha una proposta didàctica entorn a les figures policúbiques que enllaça molt bé amb aquesta. El seu títol és "Policubs" i es pot trobar a l'enllaç:

<http://apliense.xtec.cat/arc/node/1304> . Conté un guió molt complet d'una activitat per fer amb alumnes.

La idea d'aquesta activitat està extreta del llibre *“Developing Essential Understanding of Proof and Proving (Grades 9-12)”* del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2012).